三次方程解算表格

（基数法）

〔苏联〕Б. М. 許米耶格斯基 著

胡汝鼎 譯注

科学技術出版社

內 容 提 要

本書表格可适合解三次完全方程之用。使用这本表格时，一切計算可用計算机或算盤進行，但如所需的准確度不高，卽用計算尺作計算也无不可。

本表格的使用方法簡單，基數范圍合于实用，在一般計算中，可以大大減少解算三次方程的时間。

譯者增加了附錄，对表格的基本原理作了詳細的說明，可供大專学生及計算人員应用。

三次方程解算表格（基数法）

ТАБЛИЦЫ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДОМ ОСНОВ

原著者 〔苏联〕Б. М. Шумягский
原出版者 Гостехиздат · 1950 年版
譯注者 胡 汝 鼎

*

科学技術出版社出版
（上海建國西路336弄1号）
上海市書刊出版業營業許可証出〇七九号
上海市印刷四厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号：13119·55

开本850×1168耗 1/32·印張 4 1/2·字數 109,000
一九五六年十月第一版
一九五六年十月第一次印刷·印數1—7,000

定价：(10) 九 角

序　言

这一本表格，是为解算完全三次方程之用，解算的方法是把方程化为特殊形式的三項方程．至于这方法的念头已經在我的論文«Исчисление шойрош»里說明了(参照第 1 頁上的注解)．

使用这一本表格的时候，所有一切計算都是打算在計算机上做的；如果不須要高度准确，那就不妨用計算尺做計算．

任何批評、指教和建議，請函寄下列地址，作者表示万分感謝：Москва, Орликов 3, Гостехиздат.

目　　錄

表格的說明

§1

在这一本表格里，按照 A 的各值，排列方程

$$z^3+Az-A=0 \tag{1}$$

的根 ❶.

在表格里，每一个 A 的值与三个根相对应，我們称它为 A 的三次基数，并以符号

$$z=\sqrt[\mathfrak{I}]{A}. \tag{2}$$

作为标志.

§2. 表格的内容

表格 I 包括方程(1)的基数(根)，而与从 $8\cdot10^{-9}$ 到 300 的 A 的正值相对应. 每一个值 A 与一个实基数和两个共軛复基数相对应.

表格里，給出了实基数的值，并以 z_1 为标志；同时，又給出了复根中 i（虛数部分)的系数絕对値被实根 z_1 的絕对值除得的商；在表格里，这商以 α 作为标志.

假如已知 z_1 的值，則值 $z_{2,3}$ 可表示为

$$z_{2,3}=-\frac{z_1}{2}\pm iz_1\alpha. \tag{3}$$

最后的等式是根据：方程所有的三个根之和是等于零.

---

❶ 关于 $x^n+Ax-A=0$ 形式的三項方程性質的詳細說明，請参照我的以《Исчисление шойрош》为题的論文，登載于《Математический сборник》，1938 年，卷 40·3

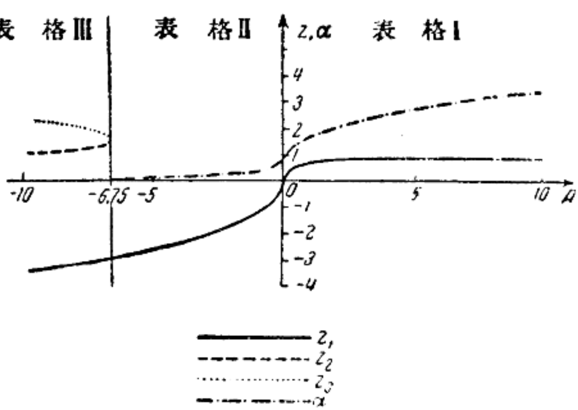
在表格 Ⅱ 里,給出大于 -6.75 到 -0.000000008(包括在內)的負值 A 的基数.

这些值 A 也与一个負实基数和兩个共軛复基数相应. 不論在表格 Ⅰ 或者在表格 Ⅱ 里,都給出負实基数 z_1 和值 α(如前: $z_{2,3}=-\frac{z_1}{2}\pm iz_1\alpha$).

表格 Ⅲ 包括从 -6.75 到 -300 的負值 A. 这些值 A 与三个实基数相应:一个負,兩个正.

在表格里,以 z_1 标志着負基数,以 z_2 标志着較小的正基数.

表格分別由兩个部分組成: 表格 Ⅲa 包括值 z_1(負数), 表格 Ⅲб 包括值 z_2 (正数). 按公式 $z_3=-(z_1+z_2)$求得第三个根.



表格里,根的分布如附圖所示.

对于实基数來說,表格准确到小数点后四个有效数字;对于复基数來說,表格准确到小数点后三个有效数字.

第一个情形中的小数点后第四、第五个有效数字以及第二个情形中的小数点后第四个有效数字,都可以用直綫內插法求得. 在極大多数的情形下, 用了內插法可以求得准确到小数点后五个有效数字的实基数. 用直綫內插法只能求出小数点后四个 (不是五个)有效数字的那几頁实基数表格,在它的左上角上以星号作为标

記.

§3. 三次完全方程的解法

最初我們說明怎样解算三項三次方程，然后說明怎样解算完全三次方程.

方程

$$y^3+py+q=0 \tag{4}$$

可以導成如形式(1)的方程

$$z^3+Az-A=0;$$

为此,在方程(4)里应当标志着

$$y=-\frac{q}{p}z. \tag{5}$$

我們得到

$$z^3+\frac{p^3}{q^2}z-\frac{p^3}{q^2}=0.$$

这得到的方程,正是方程(1)的形式,其中

$$A=\frac{p^3}{q^2}.$$

用我們的符号來表示,这方程解算为

$$y=-\frac{q}{p}\sqrt[3]{\frac{p^3}{q^2}} \tag{6}$$

假設給出方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \tag{7}$$

这方程可按如下的步序來解算:

1. 消去这方程里的第二項,把它導成如形式(4).

2. 把形式(4)的方程導成如形式(1)的方程,再按公式(6)解算.

在方程(7),我們标志

$$x = y - \frac{a}{3},$$

则得

$$y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0. \tag{8}$$

这是形式(4)的方程，其中

$$p = b - \frac{1}{3}a^2;\ q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

在方程(8)里我們标志了 $y = -\frac{p}{q}z$，則得

$$z^3 + \frac{[3(3b-a^2)]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2}z - \frac{[3(3b-a^2)]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2} = 0. \tag{9}$$

我們得到了方程(1)，其中

$$A = \frac{[3(3b-a^2)]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2}. \tag{10}$$

現在假設我們已知方程(9)里的基数的値．讓我們來求出原方程(7)的根的値．

我們有

$$y = -\frac{q}{p}z,$$

$$x = y - \frac{a}{3} = -\frac{q}{p}z - \frac{a}{3}. \tag{11}$$

应用我們的符号，采取 $A = \frac{[3(3b-a^2)]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2}$ ❶ 和 $z = \sqrt[3]{A}$，

我們就可以寫出

$$x = -\frac{1}{3}\left(\frac{2a^3-9ab+27c}{3(3b-a^2)}\sqrt[3]{\frac{[3(3b-a^2)]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2}} + a\right) \tag{12}$$

---

❶ 原文作 $A = \frac{[3(3b-a^2]^3}{(2a^3-9ab+27c)^2}$ ——譯者

当 $b=0$,则得

$$x=-\frac{1}{3}\left(\frac{2a^3+27c}{-3a^2}\sqrt[3]{\frac{-27a^6}{(2a^3+27c)^2}}+a\right). \quad (13)$$

当 $a=0$, 则得

$$x=-\frac{c}{b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}}. \quad (14)$$

对于 $mx^3+nx+k=0$ 形式的方程,

$$x=-\frac{k}{n}\sqrt[3]{\frac{n^3}{k^2m}}. \quad (15)$$

于是,解算形式(7)的三次完全方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

归結为解算

$$z^3+Az-A=0$$

的形式的方程,我們称它的根为 A 的三次基数.

我們个别地考察 2 种情形:

1. $A\leqslant-6.75$.

2. $A>-6.75$.

假如 $A\leqslant-6.75$, 则所有三个 A 的基数: z_1, z_2 和 z_3 都是实数.

在这情况之下,我們最初按公式(10)求出 A,然后按照表格求出值 z_1, z_2 和 z_3. 按照公式(12)—(15)中的一个公式(与方程的形式有关),進一步我們求出原方程(7)的三个根.

假如 $A>-6.75$, 基数中的一个基数 z_1 是实数, 而其它兩个基数是共軛复数. 在这情形之下,如同第一情形中的順序一样,我們首先求出方程(7)的实根 x_1.

为了求出方程(7)的复根,我們应用公式(3):

$$z_{2,3}=-\frac{z_1}{2}\pm iz_1\alpha.$$

这时，按公式(5)，我們有

$$y_{2,3}=\frac{q}{p}\cdot\frac{z_1}{2}+i\frac{q}{p}z_1\alpha=-\frac{y_1}{2}\pm iy_1\alpha. \qquad (16)$$

最后，

$$x_{2,3}=-\frac{x_1+a}{2}\pm i\left(x_1+\frac{a}{3}\right)\alpha. \qquad (17)$$

假如 $A>-6.75$，则按表格 I（假如 $A>0$）求出 z_1 和 α，或者按表格 II（假如 $-6.75<A<0$）求得值 z_1 和 α.

按照 z_1 求出方程(7)的第一个根(x_1).按照方程(16)或(17)，進一步求出值 $y_{2,3}$ 或 $x_{2,3}$. 于是：

对于方程 $y^3+py+q=0$，

则 $$y_{2,3}=-\frac{y_1}{2}\pm iy_1\alpha \text{ ❶};$$

对于方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ❷，

则 $$x_{2,3}=-\frac{x_1-a}{2}\pm i\left(x_1+\frac{a}{3}\right)\alpha.$$

当 $|A|>300$ 或 $|A|<8\cdot10^{-9}$的时候，可以采用如下的近似公式.

1. 假如 $A>300$，则

$$z_1=\frac{A+2}{A+3}; \qquad (18)$$

$$z_{2,3}=-\frac{z_1}{2}\pm\sqrt{-A-3\left(\frac{z_1}{2}\right)^2}. \qquad (19)$$

2. 假如 $A<-300$，则

$$z_2=\frac{A+2}{A+3} \qquad (20)$$

$$z_{3,1}=-\frac{z_2}{2}\pm\sqrt{-A-3\left(\frac{z_2}{2}\right)^2}. \qquad (21)$$

---

❶ 原文作 $y_{2,3}=-\frac{y_1}{2}\pm iy\alpha$——譯者

❷ 原文作 $x^3+ax^2+by+c=0$——譯者

3. 假如 $|A|<10^{-9}$，則

$$z_{1,2,3}=\sqrt[3]{A}. \tag{22}$$

我們用实例來說明表格的使用方法.

例 1. $x^3+0.9156x-1.91=0$.

按公式(14)，我們求得解答

$$x_1=-\frac{-1.91}{0.9156}\sqrt[3]{\frac{0.9156^3}{(-1.91)^2}}=\frac{1.91}{0.9156}\sqrt[3]{0.21041} \text{❶}$$

在这一个例子里，A 是正数，它有一个正的实基数和兩个复基数.我們在表格 I 里求出正数(从 0 到 300)的基数.

在表格 I 第 8 頁上，我們求出实基数 z_1 和复根虚数部分的系数 α. 按表格直接求出三个有效数字. 其余的有效数字可以用直綫內插法求出.

$$\begin{array}{lr|ll}
0.21041 & & & \\
\underline{0.20923} & 0.47800 & 15\cdot 0.69\cdots\cdots & 1.2906 \\
\dfrac{118}{172}\approx 0.69 & z_1=\dfrac{69}{0.47869} & & \dfrac{10}{\alpha=1.2916}
\end{array}$$

現在我們來求出根的値，同时，按公式(16)求出复根：

$$x_1=\frac{1.91}{0.9156}\cdot 0.47869=0.99858 \text{(准确到第五个有效数字)；❷}$$

$$x_{2,3}=-\frac{0.99858}{2}\pm i\cdot 0.99858\alpha\text{❸}=-0.49929\pm$$

$$\pm i\cdot 0.99858\cdot 1.2916=-0.49929\pm i\cdot 1.2897\text{❹}.$$

例 2. $716x^3-512x+467=0$. 按公式(15)，我們有

$$x=-\frac{467}{(-512)}\sqrt[3]{\frac{(-512)^3}{(467)^2\cdot 716}}=\frac{467}{512}\sqrt[3]{-0.85952}.$$

---

❶ 原文作 $x_1=\frac{1.91}{0.9156}\sqrt[3]{\frac{0.9156^3}{1.91^2}}=\frac{1.91}{0.9156}\sqrt[3]{0.21041}$，为明确起見，寫成上式——譯者

❷ 原文作 $x_1=\frac{1.91}{0.9195}$ 0.47869——譯者

❸ 原文作 $+i0.99858\alpha$——譯者

❹ 原文作 $-0.49928\pm i\cdot 1.2897$——譯者

在符号之下的基数是負数，而且是大于-6.75，它有一个負的实基数和兩个复基数.

在表格 II 里給出从 0 到 -6.75 的基数.

36 頁上求得

$$\begin{array}{r} 0.85952 \\ -60 \\ \hline -\dfrac{8}{169}\approx -0.05 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.24500 \\ -5 \\ \hline z_1=1.24495 \end{array}\left|\ \alpha=0.4420\right.$$ [1]

我們求得 $z_1=-1.24495$;　　$\alpha=0.4420$.

現在求出这方程的根:

$$x_1=\frac{467}{512}(-1.24495)=-1.13553;$$

$$x_{2,3}=\frac{1.13553}{2}\pm i\cdot 1.13553\cdot 0.442=0.56776\pm i\cdot 0.5019.$$

例　3.　　$x^3-2x^2+3x-5=0.$

按公式(12)，我們有

$$x_1=-\frac{1}{3}\left(\frac{-16+54-135}{3(9-4)}\sqrt[3]{\frac{[3(9-4)]^3}{(-16+54-135)^2}}-2\right)=$$

$$=\frac{97}{45}\sqrt[3]{0.3587}+\frac{2}{3}.$$

我們來求这方程的三个根(一个实根和兩个共軛复根).

$$\begin{array}{r} 0.35870 \\ 53 \\ \hline \dfrac{17}{277}\approx 0.06 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.54600 \\ 6 \\ \hline z_1=0.54606 \end{array}\left|\ \begin{array}{r} 17\cdot 0.06\cdots\cdots 1.3974 \\ 1 \\ \hline \alpha=1.3975. \end{array}\right.$$

我們有

$$x_1=\frac{97}{45}\cdot 0.54606+\frac{2}{3}=1.84373.$$ [2]

---

[1] 原文作 $z=1.24495$ 和 $\alpha=0.44$——譯者

[2] 原文作 $x=\frac{97}{45}\cdot 0.54606\pm\frac{2}{3}=1.84373$——譯者

按公式(17)求出复根:

$$x_{2,3}=-\frac{1.84373-2}{2}\pm i\cdot\left(1.84373-\frac{2}{3}\right)\cdot 1.3975=$$

$$=0.07814\pm i\cdot 1.6448.$$

例 4. $x^3-5x+3=0$❶

按公式(14),我們有

$$x_1=\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{-\frac{5^3}{3^2}}=0.6\cdot\sqrt[3]{-13.8889}.$$

数 $A<-6.75$:它有三个实基数．在这情况之下,在表 Ⅲ a 求出它的第一个基数（負的），而在表格 Ⅲ б 求出第二个基数（正的）.

在表格 Ⅲ a 里,求得　　　　在表格 Ⅲ б 里,求得

$$\begin{array}{rr|rr} 13.8889 & -4.15100 & 13.8889 & 1.09500 \\ \underline{57} & \underline{43} & \underline{204} & \underline{-64} \\ \frac{32}{74}\approx 0.43 & -4.15143 & \frac{685}{-1065}\approx -0.64 & 1.09436 \end{array}$$

現在我們有 $z_1=-4.15143$;　　$z_2=1.09436$.

$$x_1=0.6\cdot(-4.15143)=-2.49086,$$

$$x_2=0.6\cdot 1.09436=0.65662$$

我們已經求得二个根,第三个根等于已求得的二根之和,附以相反的符号:

$$x_3=-(-2.49086+0.65662)=1.83424❷.$$

❶ 原文作 $x^5-5x+3=0$ ——譯者

❷ 原文作 $x_2=-(-2.49086+0.65662)=1.83424$