高等学校教学用书

组合数学

周振黎　康泰

zuhesnuxue

重庆大学出版社

组　合　数　学

周振黎　康泰

重庆大学出版社出版

组　合　数　学

周振黎　康　泰

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
重庆大学出版社印刷厂印刷

开本:787×1092　1/16　印张:17.75　字数:416千
1986年1月第一版　1986年1月第一次印刷
印数：1—4,000
统一书号：15408·5　定价：3.35元

前　言

组合数学又叫组合分析或组合学，其起源颇早，但它形成独立的数学分支，则是二十世纪五十年代以后的事了。至今，它仍处在方兴未艾的发展过程中。计算机科学、数字通讯理论、规划论以及试验设计等学科提出的各种问题，如计数问题、某些关系结构的存在问题等对它的刺激，促进了组合数学的发展，丰富了组合数学的内容。

组合数学所研究的中心内容是与“按照一定的规则把一些元素安排成种种集合”有关的问题。若符合要求的安排的存在尚待证实，首要的就是证明或否定它的存在；若符合要求的安排显然存在或已证明其存在，接下来的问题就是确定这样的安排的个数、构造出符合条件的安排；如果给出了最优化的标准，还应找出最优化的安排。

由于组合数学在技术科学和管理科学中的广泛应用，在不少国家的高等学校里，它已作为许多专业的必修课，甚至已渗透到中学的教材之中。写作本书的目的，正是想为组合数学的普及尽一点微薄之力。

我们力图在本书中比较全面而系统地介绍组合数学的基本问题、理论、方法和应用。从组合数学的基础部分展开叙述，不要求读者有任何组合数学的予备知识。

本书叙述详尽，各章都有大量的例题，有的例题还有多种解法.其目的是向读者介绍组合数学解决问题的各种思想方法，尽力帮助读者掌握解题的技巧。

本书将一些易证的定理的证明留给读者作为练习，对一般的定理都给了严谨的证明，对某些重要定理的证明思路还作了分析探索，力图帮助读者掌握逻辑推理能力。

线性递归算子的理论和应用是作者的最近成果，它是解决计数问题和证明组合恒等式的一个重要工具。写进本书是为了抛砖引玉，并就教于海内外学者和读者。

本书可作为高等学校数学专业、计算机专业和经济管理专业的教材，也可作为中学教师、科技工作者的参考读物。

作　者　　　1985年7月

目　　录

第一章 导 论

§1 什么是组合数学(Combinatorics)

组合数学，也称组合分析或组合学．它肇源颇早．据说大禹治水时，在黄河见一神龟，它的背上有图(1·0)所示的字样，今天，人们称之为幻方(Magic squares)．若此传属实，则组合数学萌芽于公元前2200多年；即使此传不真，组合数学起源极早也是无可置疑的．近几个世纪，许多作者又从数学游戏的角度上接触了这个课题．Euler 的36名军官问题，Kirkman 的女生问题等等，都是这方面有名的例子．然而，它正式成为数学的一个分支，还是本世纪五十年代之后的事．这与它受到计算机科学、规划论、试验设计等新兴的应用和理论学科的推动有关．

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 (1·0)

正如 Richanl.A.Brualdi 指出的那样："经典数学中所研究的娱乐与艺术中的许多问题，对今天的纯理论学科与应用学科都具有巨大的意义．"不久以前，有限射影平面还只被当作一种组合的珍玩．今天，它在几何基础以及试验的分析和设计中都是基本的．由于离散性问题在现代技术中的极端重要性，过去的趣味数学也被赋予了新的严肃的意义．

组合数学包含的内容极其丰富．要给它下一个确切的定义还为时过早．我们应当注意的，是它的内容、特点和实质，而不急于追求一个简单、确切的定义．这个学科研究的中心问题，是与"按照一定的规则把一些元素安排成种种集合"有关的问题，这些元素的个数通常是有限的．文献中有两大类问题：第一类，符合要求的安排是否存在尚待证实，而我们的研究在于对此作出明确的断言，这类问题称为存在问题．第二类，符合要求的安排显然存在，或已被证明存在而我们的研究在于确定这样的安排的个数，以及如何构造出这样的安排，这类问题称为计数问题和构造问题．如果给出了最优化标准，往往还需寻求最优的安排，这就是最优化问题．

解决组合数学的问题，大约有下列方法：

(1)归纳法；(2)鸽巢原理(抽屉原理)；(3)递推原理；(4)组合线性递归算子；(5)母函数；(6)容斥原理；(7)反演公式；(8)Refield-Pólya理论；(9)图论方法等等．

这些原理、方法将在以后各章中分别介绍(由于"图论"已成长壮大为独立分支，因此本书不再专门介绍)．组合线性递归算子是组合数学中新的工作，它在组合式的计算和组合恒等式的证明等方面是强有力的工具．

§2 组合数学发展的趋势

现在，组合数学是数学的一个很活跃的分支，它与许多数学分支相互交义，相互渗透，

其发展正方兴未艾．我们相信今后它将更加活跃，蓬勃发展，而其发展的一个趋势则是，越来越多地用其他的数学方法，来解决纯粹的组合问题．例如：

Polya 定理是解决计数问题不可缺少的工具，而 Polya 定理则是建立在群论基础上的．

对于凸多胞形的研究已有很长的历史，它在线性规划等方面有重要的应用．但是凸多胞形的"面数问题"却是最近才被解决的．而解决这一问题时，又利用了 Cohen-Macanlay 环的性质．

离散不动点问题是刚刚开始研究的一个问题，它的初步结果是利用格、空间等代数工具得到的．

在阅读本教材的过程中，读者可以看到，近世代数的许多概念和结论在计算问题的解决过程中都得到了富有成效的应用．

§3　棋盘的完备复盖

一般说来，一个组合问题的解决需要一种与之相应的特别方法．可以这样认为，组合数学中典型问题的解题经验，对组合数学的学习是非常重要的．我们以"棋盘的完备复盖"这一问题为例来说明："组合数学常用的一般方法与问题的特殊性相结合的解题技巧"对问题的解决所起的重要作用．

对于一个 $m \times n$ 的棋盘，假定有外形完全一样的骨牌，每一骨牌可以复盖棋盘上两个邻接的方格．如果用一些骨牌复盖棋盘，使得棋盘上的所有方格都被骨牌复盖，并且没有两块骨牌交迭，就称这一复盖是棋盘的一个完备复盖．

十分明显，一个 3×3 的棋盘不存在完备复盖，而一个 $2 \times n$ 的棋盘显然有完备复盖．对于一个 8×8 的棋盘，完备复盖也是存在的．但对于一个剪去了两个对角的8×8的棋盘，是否还存在完备的复盖呢？这一问题的答案不是显然的．但是，如果我们把棋盘的方格按图（1·1）所示用黑、白二色相间染色（图中，有阴影的方格表示染黑色，而另外的方格表示染白色），则任一骨牌必然复盖一黑一白二方格，而剪角的棋盘中，有32个黑色和30个白色的方格，因此不可能有完备复盖．

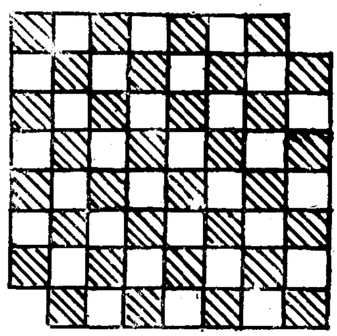

图　（1·1）

以上是对存在问题的初步研究，详细的研究放在第十章．从上述研究可以看出，对于存在问题，在有的情况下结论是明显的．如 $2 \times n$ 棋盘存在完备复盖，而 3×3 棋盘不存在完备复盖．在另一些情况下，结论并非显而易见．例如剪角的 8×8 棋盘是否存在完备复盖就并非显然．在有些情况下，存在性的解答甚至是非常困难的．

我们已经知道，一个 $2 \times n$ 的棋盘一定存在完备复盖，而且也容易用几块骨牌构造一个完备复盖，但 $2 \times n$ 棋盘的完备复盖数是多少？这就不是存在性问题而是计数的问题了．

我们用组合推理的分类分析方法来解决上述问题．设f_n表示 $2 \times n$ 棋盘的完备复盖数，

显然有 $f_1=1$，$f_2=2$．对于 $n\geqslant 3$ 的情形，我们考虑左上角的方格，在棋盘的完备复盖中，它有两种可能的复盖．第一种，在一个完备复盖中，它与左下角的方格被同一块骨牌复盖；另一种是，它与左下角的方格分别被两块骨牌复盖．在第一种情况下，剩下 $2\times(n-1)$ 个方格，恰好构成一个 $2\times(n-1)$ 棋盘，因此，对应于这种情况的完备复盖数是 f_{n-1}；在第二种情况下，余下的方格恰好是一个 $2\times(n-2)$ 棋盘；因此，对应于这种情况的完备复盖数为 f_{n-2}，于是，

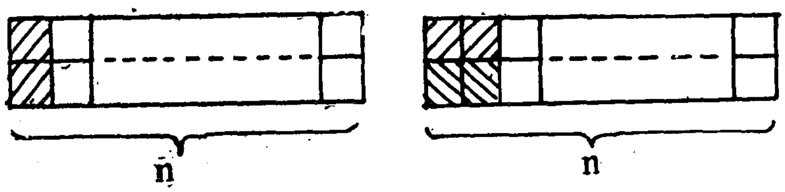

图 （1·2）

我们有

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \tag{1·1}$$

这样就给出了一个 $2\times n$ 棋盘的完备复盖数的递归关系．显然有

f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6……

1 2 3 5 8 13……

此即裴波拉契级数．因此，求完备复盖数的问题就转化为求裴波拉契级数的通项问题．仿照等比数列的情况，令

$$f_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n \qquad (n=1,2\cdots\cdots) \tag{1·2}$$

其中，c_1、c_2 为待定常数，q_1、q_2 为待定的公比数，将（1·2）式代入递归关系（1·1），得

$$(c_1q_1^n-c_1q_1^{n-1}-c_1q_1^{n-2})+(c_2q_2^n-c_2q_2^{n-1}-c_2q_2^{n-2})=0$$

即

$$c_1q_1^{n-2}(q_1^2-q_1-1)+c_2q_2^{n-2}(q_2^2-q_2-1)=0 \tag{1·3}$$

显然，方程

$$q^2-q-1=0$$

的二根能使（1·3）式成立，所以，可令

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{1·4}$$

现在，我们利用初始值 $f_1=1$，$f_2=2$ 来确定待定常数 c_1，c_2，即由

$$\begin{cases} c_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=f_1=1 \\[2ex] c_1\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=f_2=2 \end{cases} \tag{1·5}$$

解得
$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\qquad c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\tag{1·6}$$

故
$$f_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}\right].\tag{1·7}$$

上述例子不但说明了组合数学中解决一个问题的全过程，而且也揭示了组合数学解题方法的某些特点．例如，首先用组合推理的方法对问题进行分析，然后建立递归关系，再由递归关系得到所需的计数公式．

11	5	14	4
16	2	9	7
1	15	8	10
6	12	3	13

图 （1·3）

§4 幻　方

我们再用幻方作为例子来说明组合数学研究的问题及其研究方法．

前面谈到，大禹在龟背上看到的图形原来是一个3阶幻方．左上图(1·3)是一个4阶幻方，n 阶幻方的一般提法是："用 $n\times n$ 个数：1，2，……、n^2填入一个 $n\times n$ 正方形的方格中，使每行、每列以及对角线上 n 个数之和都相等"．

若设此和为s_n，则
$$s_n=n^2(n^2+1)/2n=n(n^2+1)/2,$$
和数s_n叫做 n 阶幻方的幻数．

当 $n=2$ 时，幻方不存在．

a	c
b	

图 （1·4）

从图（1·4）可以看出，由于任何一个数不可能与两个不相同的数构成相等的和数，即
$$b\neq c\Longrightarrow a+b\neq a+c,$$
所以，二阶幻方不可能存在．

当 $n=3$时，我们可以用解方程的办法来构造三阶幻方．令三阶幻方如图(1·5)所示，幻数

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

图 （1·5）

$$s_3=3(3^2+1)/2=15.$$

从而
$$(a_1+a_5+a_9)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_5+a_3)+(a_2+a_5+a_8)=4\times15.\tag{1·8}$$

又因为
$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=3\times15,\tag{1·9}$$

由（1·8）式减去（1·9）式得
$$3a_5=15\Longrightarrow a_5=5.\tag{1·10}$$

这就是说，对于任何一个三阶幻方，中心位置必须是5．由这一结论立即推知
$$a_1,\ a_9;\ a_2,\ a_8;\ a_3,\ a_7;\ a_4,\ a_6\tag{1·11}$$

这四对数的和都是10。因此可将其余八个数分为四对：

1，9；2，8；3，7；4,6。

由

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_4+a_7)=30$$

得到

$$2a_1+a_2+a_4=30-(a_3+a_7)=20 \tag{1·12}$$

从（1·12）式知，a_2、a_4 有相同的奇偶性。从而，a_2、a_4、a_6、a_8 的奇偶性相同，a_1、a_3、a_5、a_7 的奇偶性也相同，所以，a_1+a_7 为偶数。但$a_1+a_4+a_7=15$，因此a_4 必为奇数，从而三阶幻方的四角全是偶数。

若将 8 放在左上角，即令 $a_1=8$，则 $a_9=2$，这时，若$a_3=6$（或 4），则 $a_7=4$（或6），由此，立得三阶幻方如图（1·6）所示。

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 （1·6）

这就是说，8 放在左上角可得两个三阶幻方，而 8 可放在四个角中的任一个角上，由此可知，共有 $4\times2=8$ 个三阶幻方。若从同构的意义讲，则三阶幻方只有一个，换句话说，可以从一个幻方经翻转、旋转而得到其余七个。

从 $n=3$ 的情况看出，关于幻方的研究，需要回答：是否存在 $n(>2)$阶幻方？如果 n 阶幻方存在，如何构造出 n 阶幻方？有多少个 n 阶幻方？对这个问题的全面回答不在这里赘述。仅给出一些较一般的构造幻方的方法，首先给出构造 $n=2k+1(k\geqslant1)$ 阶幻方的一个方法。这个方法是在十七世纪由 de la lanbère 建立的：

将 $1,2,\cdots\cdots,n^2$ 个数相继按以下规则填入 $n\times n$ 个小方格中。

1. 首先将 1 放入第一行正中的方格，即第一行 $k+1$ 列处（$n=2k+1$）；

2. 对相继的自然数 $2,3,\cdots\cdots,n^2$，按如下规则填入：

a）当前数填在 $i(i\neq1)$行 $j(j<n)$列时，相继的数填在 $i-1$ 行 $j+1$ 列的方格中。即从右上方向填入；

b）当前数在第一行，$j(j<n)$列时，下一数填在第 n 行 $j+1$ 列；

c）当前数在第 $i(i\neq1)$行 n 列时，下一数填在 $i-1$ 行第 1 列；

d）当前数在第一行第 n 列时，或者前数的右上方向（$i-1$ 行 $j+1$ 列处）的方格已填有数时，下一个数填在与前一数同列的下行的小方格内。

例如，$n=5$时，按以上规则可构造出如图(1.7)的5阶幻方。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 （1·7）

这一方法直观、有规律，可用来构造任何阶的奇数阶幻方。但是它的局限性也正在这里。如果仅需写出幻方的某一行，它还是得从 1 开始一直写到这行的元素全出现为止，而且利用它来构造新的幻方也就存在了相应的困难。下面我们给出构造奇数阶幻方的公式法。

定理 设 $m=2n+1$，则

$$A=(a_{ij}),\quad a_{ij}=m(i+j+n+1)_m+(i+2j+1)_m+1\quad i,j=0,1,\cdots,2n$$

是一个m阶幻方.其中$(x)_m$表示将x模m取余。

证明 $\forall b\in[1,m^2]$,由带余除法知，存在唯一一对非负整数p，r $(0\leqslant p,r<m)$使得

$$b=mp+r+1 \quad \text{即} \quad b-1=mp+r$$

由

$$(i+j+n+1)_m=p$$

$$(i+2j+1)_m=r$$

可解出唯一一对满足条件$0\leqslant i,j\leqslant m$的非负整数$i$、$j$.从而$b=a_{ij}$。

另一方面,$1\leqslant a_{ij}\leqslant m^2$,即$A$的每一个位置都排上了$[1,m^2]$的一个数.从而$A$是由$[1,m^2]$中的$m^2$个数排成的方阵。

显然,

$$(i+0+n+1)_m、(i+1+n+1)_m、\cdots、(i+2n+n+1)_m$$

$$(0+j+n+1)_m、(1+j+n+1)_m、\cdots、(2n+j+n+1)_m$$

$$(i+2\cdot 0+1)_m、(i+2\cdot 1+1)_m、\cdots、(i+2\cdot 2n+1)_m$$

$$(0+2j+1)_m、(1+2j+1)_m、\cdots、(2n+2j+1)_m$$

都是$[1,\ 2n]$的全排列. 因此第i行$(i=0,\ 1,\ \cdots 2n)$的行和:

$$\sum_{j=0}^{2n} a_{ij}=\sum_{j=0}^{2n} m(i+j+n+1)_m+\sum_{j=0}^{2n}(i+2j+1)_m+\sum_{j=0}^{2n}1$$

$$=m\sum_{j=0}^{2n} j+\sum_{j=0}^{2n} j+(2n+1)=m\cdot\frac{(m^2+1)}{2}=S_m.$$

第j列的列和等于

$$\sum_{i=0}^{2n} a_{ij}=\sum_{i=0}^{2n} m(i+j+n+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}(i+2j+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}1=m\frac{m^2+1}{2}=S_m$$

同理，当$3\nmid m$时

$$\sum_{i=0}^{2n} a_{ii}=\sum_{i=0}^{2n} m(2i+n+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}(3i+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}1$$

$$=m\sum_{i=0}^{2n} i+\sum_{i=0}^{2n} i+(2n+1)=m\frac{m^2+1}{2}=S_m,$$

当$3\mid m$时,

$$\sum_{i=0}^{2n} a_{ii}=\sum_{i=0}^{2n} m(2i+n+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}(3i+1)_m+\sum_{i=0}^{2n}1$$

$$=m\sum_{i=0}^{2n} i+3\sum_{i=0}^{m/3-1}(3i+1)+(2n+1)=m\frac{m^2+1}{2}=S_m.$$

而

$$\sum_{i=0}^{2n} a_{i,2n-i} = \sum_{i=0}^{2n} m(i+2n-i+n+1)_m + \sum_{i=0}^{2n}(i+2(2n-i)+1)_m + \sum_{i=0}^{2n} 1$$

$$= m\sum_{i=0}^{2n} n + \sum_{i=0}^{2n} i + (2n+1) = m\frac{m^2+1}{2} = S_m.$$

因此，A的行和、列和以及两条对角线的元数和都等于幻数，所以A是m阶幻方. ■

习 题

1. 试构造一个 5 阶幻方.
2. 试构造一个 7 阶幻方.
3. 试由一个 3 阶幻方构造一个 9 阶幻方.
4. 构造一个 4 阶幻方.
5. 对一个 5 阶幻方施行行或列的对换，能得到几个不同的 5 阶幻方?
6. 证明 $m\times n$ 棋盘有完备复盖的充要条件是：m和 n 中至少有一个是偶数.
7. 证明当 n 为偶数时，剪去 $m\times n$ 棋盘的左上角的“修剪盘”不存在完备复盖.
8. 设一所监狱有64间囚室，其排列类似 8×8 棋盘. 典狱长告示关押在一个角落囚室里的囚犯：只要他能够不重复地通过每间囚室到达对角的囚室，他将被释放. 问囚犯能获得自由吗?（所有相邻囚室间都有门相通）.
9. 试求 3×2 和 3×4 棋盘的完备复盖数，并求 $3\times n$（n 为偶数）棋盘的完备复盖数序列的递归关系.
10. 证明，在一个 $m\times n$ 棋盘上，一只马能够从任一方格出发，跳遍（按国际象棋跳法）每一个方格，并且每一个方格只跳一次而回到出发点的必要条件是：m、n 中至少有一个是偶数.
11. 考虑 6×6 棋盘，证明对它的任一完备复盖，总存在一种水平的（或竖直的）切开棋盘的方法，使切割线不穿过任一骨牌.

第二章　排列与组合

§1　集的概念和运算

我们把研究的对象的总体叫做论域或全集．论域中的每一个体叫做元素或元，某些元的总体叫做集合或集．通常，用大写英文字母表示集合，小写英文字母表示元．元 a 在集 A 中，或者说集 A 含有元 a，记为

$$a \in A \quad 或 \quad A \ni a$$

元 a 不在集 A 中，或者说集 A 不含有元 a，记为

$$a \notin A \quad 或 \quad A \not\ni a$$

表示一个集合 M，常用的方法有

（1）把集合的元素全列出，例如

$$M = \{1, 2, 3, 5, 8\};$$

（2）列出集合的一部分元素，用'…'表示集的未列出的元素，而这些元素可以由已列出的元素判明，例如

$$M = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

表示全体正偶数的集合，而

$$A = \{2, 4, 6, \cdots, 10^{10}\}$$

表示不小于2且不大于 10^{10} 的全体偶数．

为方便起见，以 $[1, n]$ 表示从1到 n 的 n 个自然数之集．即

$$[1, n] \equiv \{1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

注意，记号"$A\equiv\cdots$"表示"A 定义为…"．当 $m<n$ 时，

$$[m, n] \equiv \{m, m+1, m+2, \cdots, n-1, n\},$$
$$[m, n) \equiv \{m, m+1, m+2, \cdots, n-1\},$$
$$(m, n] \equiv \{m+1, m+2, \cdots, n-1, n\},$$
$$(m, n) \equiv \{m+1, m+2, \cdots, n-1\},$$
$$N \equiv [1, \infty) = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

N 为全体自然数之集，N^c 表示全体非负整数之集．

（3）给出集合中的元的特性 P——有性质 P 的元全在集中，并且集中的元必有性质 P，记作

$$M = \{a \mid a 有性质 P\}.$$

若集 A 的每一个元素都是集 B 的元素，则称 A 是集 B 的子集，记作 $A\subseteq B$．若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 都成立，则称集合 A 与集合 B 等同，记作 $A=B$．

空集为不含任何元素的集合，通常以 ϕ 表示．显然，对于任一集 A，都有 $\phi\subseteq A$．

设 X 为全集，以 $P(x)$ 记 X 的一切子集作成的集，称为 X 的幂集．在 X 的幂集

$$P(x)=\{A \mid A\subseteq X\}$$

上，可定义如下的一些运算：

集合的并，记作$A\cup B$

$$A\cup B\equiv\{a \mid a\in A\text{或}a\in B\},$$

集合的交，记作$A\cap B$

$$A\cap B\equiv\{a \mid a\in A\text{且}a\in B\}.$$

对于$P(x)$中的有限个集，也可类似地定义他们的并和交.

集合的差，记作$A\setminus B$

$$A\setminus B\equiv\{a \mid a\in A\text{且}a\notin B\}.$$

特别，称$X\setminus A$为A的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}\equiv X\setminus A=\{a \mid a\in X\text{且}a\notin A\}.$$

集A与B的直积，记作$A\times B$

$$A\times B\equiv\{(a,\ b) \mid a\in A\text{且}b\in B\}.$$

类似地定义集A_1，A_2，…，A_n的直积$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\equiv\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\mid a_i\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\}.$$

若对集A的每一元a，都能按一个确定的规则φ找到集B的唯一元b与之对应，则称φ为A到B的映射，并称b是a在映射φ之下的像．记作

$$\varphi:\ a\to b$$

或$b=\varphi(a)$.若

$$\{\varphi(a)\mid a\in A\}\subseteq B,$$

则称φ是A到B内的映射.若

$$\{\varphi(a)\mid a\in A\}=B,$$

则称φ是A到B上的映射，也称φ是满射．若$a_1\neq a_2\Rightarrow\varphi(a_1)\neq\varphi(a_2)$，则称$\varphi$是$A$到$B$内的单射.这里，“$A\Rightarrow B$”表示这样的意义：“若命题$A$成立，则命题$B$成立”.

若φ既是单射又是满射，则称φ是A与B之间的(1—1)映射，此时又称A与B是（1—1）对应的。

如果集A与B之间有一个（1—1）映射存在，则称集A与集B等势，记作$A\sim B$．用$|A|$表示集A的势．当A是有限集时，A的势$|A|$就是A的元素个数.

设A、B都是有限集．若存在一个规则φ，使得对A的每一个元都可按照这个规则在B内找到至少一个元与它对应，则称φ为由A到B的多值映射.

若由A到B的多值映射φ满足：

(1) 在映射φ之下，A的每一个元都在B内恰有r个像；

(2) A的两个不同的元在B内的$2r$个像彼此不同；

(3) B的每一个元都是A的某一个元在映射φ之下的像，

则称φ是由A到B的（$1-r$）满射.

设A、B都是有限集．若存在一个由A到B的（$1-r$）满射，则

$$|A|r=|B|.$$

多重集（collection）与集(set)的概念是不同的．集的各个元素一定彼此不同，而多重集的某些元素可以相同．例如$\{a, a, b\}$和$\{a, b, b\}$是彼此不同的多重集．而

$$A = \{k_1 \cdot a_1,\ k_2 \cdot a_2,\ \cdots,\ k_n \cdot a_n\}$$

表示这样一个多重集：A含有k_1个a_1，k_2个a_2，…，k_n个a_n，而a_1，a_2，…，a_n彼此不同．称k_i为元a_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的重复度．

§2　加法原则和乘法原则

加法原则和乘法原则是组合论的基础．

加法原则．若A_1、A_2、…、A_n均为有限集，且当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \phi$，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{2·1}$$

特别，当$n=2$时，有

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|. \tag{2·2}$$

加法原则可以叙述为：若某物F_1有m种方法选出（这些方法所组成的集合记为A_1），另一物F_2有另外n种方法选出（这些方法组成的集合记为A_2），则选出F_1和F_2有$m+n$种方法．

乘法原则．若A_1，A_2，…，A_n均为有限集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{2·3}$$

特别，当$n=2$时，有

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|. \tag{2·4}$$

乘法原则可以叙述为：某物F_1有m种方法选出（这些方法之集记为A_1），若用这m种方法中的任一种选出F_1后，都有n种方法（这些方法之集记为A_2）选出另一物F_2，则依次选出F_1和F_2有$m \cdot n$种方法．

关于加法原则，要注意$A_1 \cap A_2 = \phi$这一条件，反映在它的语言叙述中，就是要注意“另外”二字，即是说，选出F_1与F_2的方法是互异的．

关于乘法原则，应当注意，对于$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的元$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$，它的各个分量是彼此独立的．在语言叙述中，这种独立性是以“先”、“后”这种顺序来体现的．

例1　如图(2·1)所示，由甲村到乙村的路径集合为$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$，由乙村到丙村的路径集合为$A_2 = \{b_1, b_2\}$．由丙村到丁村的路径集为$c = \{c_1, c_2, c_3\}$．求由甲村经乙、丙村到丁村的路径数．

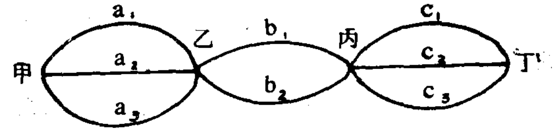

图　(2·1)

解　设P为由甲村经乙、丙两村到丁村的路径集．每一条路径可以表示为

$$(a, b, c)$$

其中，a表示从甲村到乙村的路径，b表示