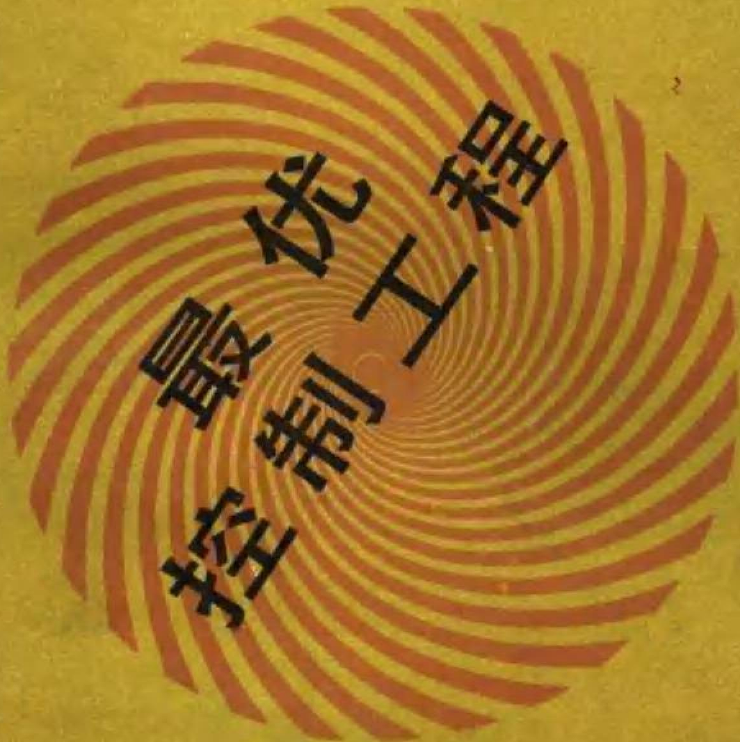
张明达 著



最优控制工程

中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书主要从工程角度阐明最优控制的基本理论和应用。内容包括：参数最优化的基本概念、最优控制中的变分问题、等式约束和不等式约束的处理方法、极值原理、最短时间和最少燃料控制、动态规划、线性二次型问题、奇异控制以及最优控制的数值解法。

本书特别看重基本概念、基本思想及解决实际工程问题的具体方法。尽量采用工科学生熟习的数学方法进行论证，简单明了，通俗易懂，便于自学。

本书可作为工科院校自动控制类型硕士研究生教材。亦可供从事自动控制系统研究、开发和运行管理的科技人员参考。

最 优 控 制 工 程

张明达 著

责任编辑：雷丽云

插图责任编辑：刘楷英

*

中南工业大学出版社出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印装

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：850×1168 1/32 印张：15.25 字数：369千字

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

印数：0001—1500

*

ISBN 7-81020-224-3/TP·009

定价：3.00元

目　　录

第一章　引　论

第一节　系统与控制

人类对自然界的控制能力，是衡量现代科学技术发展水平的重要标志之一。

本世纪以来，特别是自第二次世界大战以来，控制理论及其应用得到了迅速发展，成为提高劳动生产率和产品质量、改善劳动条件、推动社会发展的主要手段。

蒸汽机和电力的应用，实现了生产过程的机械化，完成了第一次工业革命，把人类从繁重的体力劳动中解放出来。但在相当长的一段时间内，调整、监督和管理生产过程的任务，仍在依靠人工来完成。在这种情况下，进一步提高生产率和产品质量、改善劳动条件受到了很大限制。对日益精密化、快速化、复杂化的现代工业过程，人工控制已完全不能胜任。人的思维在速度、可靠性和耐久性方面都显得不够。随着自动控制系统，特别是有电子计算机参入的自动控制系统的出现，在工业生产中引起了一场新的革命。

控制理论是许多学科之间的边缘科学。同时，它又渗透到各个学科领域之中。它对工业、农业、军事、社会科学、经济管理、航天航空、气象工程、生物工程等都具有十分重要的作用。

控制理论研究的对象是系统。所谓系统，是由相互制约的各个部分组成的具有一定功能的整体。一个自动机器，一条生产线，一个工厂，一类企业，一个电力网，一种行业，一个交通运输网，一个经济协作区，一个国家的军事、工业、农业、商业、人口，自然界的生物，人类，生态，生理，人类的智能，天体等都可称作系统。总之，系统概念十分广泛，系统处处可见。

所谓自动控制系统，就是为了达到某种目标而注入了人为因素的系统。

自动控制系统可以是开环的，也可以是闭环的。在开环系统中，输出量对输入量没有影响。当输出量偏离预期值时，即当输出量与输入量之间的对应关系遭到某种干扰作用的破坏时，并不采取任何措施来消除干扰作用带来的偏差。开环系统结构简单，稳定性问题容易得到解决，但由于它的抗干扰能力很差，不可能实现高精度控制。闭环控制的特点是对系统的状态或输出进行测量，并将测量结果与控制作用（即输入）进行比较，利用比较所得的误差对系统的工作状态进行自动调节，以消除或减小误差。闭环控制具有很强的抗干扰能力，可以实现精确控制，但系统的结构比较复杂，且稳定性和动态品质是较难处理的课题。由于闭环系统能消除或抑制各种干扰对系统的不利影响，而且可以采取适当措施，使系统具有较为理想的响应。所以在要求较高的场合，总是采用闭环控制方式。

虽然远在1696年，J.Bernoulli 就提出了具有最优控制意义的最速降线问题，18世纪60年代在蒸汽机上已经使用自动控制装置，1882年 A.M.Ляпуноb 还解决了自动控制系统稳定性方面的重大理论问题，但由于当时的科学技术水平不高，这些问题并没有受到普遍重视。直到20世纪30年代，由于科学技术和生产技能的进一步发展，对自动控制提出愈来愈高的要

求，控制理论及其应用才开始迅速发展。1932年，H·Nyquist曾提出图解型稳定判据，奠定了频率法的基础。第二次世界大战期间，由于武器发展的需要，很多国家大力资助自动控制理论的开发。到20世纪40年代，频率法已发展到比较完善的地步。同时，在实际应用方面，特别是在军事工程应用方面，也取得了明显进展。1948年，W.R.Evans 又提出根轨迹法。频率法和根轨迹法构成了经典控制理论的核心。前者以研究系统频率响应为基础，后者以研究系统闭环零极点分布为基础。经典控制理论的特点是：以传递函数作为系统的数学模型，在复数域中讨论系统的响应特性。这种方法直观、简单、物理概念清晰，结论一目了然，使用方便，它是研究单输入单输出的有力工具。

20世纪50年代末，由于计算机的出现和整个科学技术水平的发展，开始由单机自动化向机组自动化过渡，系统结构日趋复杂，经典控制理论无法满足需要，控制理论出现了新的发展高潮，出现了近代控制理论。

近代控制理论的特点是：主要在时域内研究系统的动态性能，广泛应用近代数学成果，如微分方程、差分方程、概率论、数理统计、数学规划、变分学、泛函分析、线性代数、矩阵分析、运筹学、群论、拓扑学…等几乎全部近代数学的主要分支。近代控制理论研究的对象是多变量系统，无论是线性或非线性系统，时不变或时变系统，集中参数或分布参数系统，定机或随机系统，近代控制理论都是有效的。

最优控制是近代控制理论的一个重要组成部分。在本世纪50年代初期，就出现了最短时间控制问题的论文，为最优控制理论工程的应用提供了第一批模型。实际上，任何系统都存在优化问题。优化问题可以分成两大类：参数最优化问题和最优控制问题。参数最优化问题亦称静态最优化问题或有穷维最优化问题。它可被数学抽象为在各种约束条件下函数求极值的问

题。最优控制问题又称动态最优化问题或无穷维最优化问题。它可被数学抽象为在各种约束条件下泛函求极值的问题。泛函求极值问题实际上就是变分问题。经典变分学只能解决一类简单的最优控制问题，因为它只适于研究不带闭域约束而且数学模型具有足够可微性的场合。但实际问题往往具有闭域约束，而且往往不具备所需的可微性。这样，就需要探索新的理论，以便求解各种实际最优控制问题。在种种新方法中，苏联学者Л.С.Понтрягин于50年代提出的“极大值原理”和美国学者R.E.Bellman于同一时期提出的“动态规划”具有特别重要的意义。这两种方法从不同的角度发展了经典变分学，完善了最优控制理论，推动了最优控制理论的实际应用。

第二节　参数最优化问题

在实际工程设计中，为改善系统综合指标，往往需要对系统的某些参数进行优化处理。这类问题，称为参数最优化问题。

参数最优化问题的数学抽象是函数求极值问题。这里给出的函数是根据设计中追求的目标来确定的，故称目标函数。记作

$$J = L(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) \tag{1-1}$$

其中：L 为标量函数；

$$\mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^T$$

为 n 维状态参数；

$$\mathbf{u} = [u_1\ \ u_2\ \ \cdots\ \ u_m]^T \quad m \leqslant n$$

为m维控制参数。

各参数之间，可能存在着这样或那样的联系。例如

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \tag{1-2}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leqslant 0 \tag{1-3}$$

其中： $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_p]^T$

为 p 维向量函数；

$$\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_q]^T$$

为q维向量函数。式(1-2)称为p维等式约束条件，而式（1-3）称为q维不等式约束条件。

参数最优化问题的提法是：在等式（1-2）和/或不等式（1-3）的约束下，寻求最优状态参数$\mathbf{x}^*$及最优控制参数 $\mathbf{u}^*$，使目标函数（1-1）取极小值。

在某些简单情况下，问题中可能不带任何约束条件，因而只有状态参数，没有控制参数。这时的参数最优化问题可以简化为：求系统最优化状态参数$\mathbf{x}^*$，使目标函数

$$J = L(\mathbf{x})$$

取极小值。

一、无约束参数最优化问题

问题1-1 给定目标函数

$$J = L(\mathbf{x}) \tag{1-4}$$

其中：L为标量函数；

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$$

为n维状态向量。求最优状态参数$\mathbf{x}^*$，使目标函数（1-4）取极小值。

由于L是标量函数，设其定义域为$D \in R$。函数L达到极值的含义是：当且仅当存在一个正实数δ，使对 $\mathbf{x}^*$邻域内的任意$\mathbf{x} \in D$，当

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|| < \delta \tag{1-5}$$

时，有

$$L(\mathbf{x}) \leqslant L(\mathbf{x}^*) \tag{1-6}$$

或

$$L(x) \geqslant L(\mathbf{x}^*) \tag{1-7}$$

则称函数L在 $\mathbf{x}^*$处达到极大值或极小值。若只有当 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$时，才有

$$L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}^*) \tag{1-8}$$

则称函数L在$\mathbf{x}^*$处达到严格的极大值或严格的极小值。若对$\forall \mathbf{x} \in D$而言，不等式(1-6)或（1-7）均成立，则称函数 L 在$\mathbf{x}^*$处具有绝对极大值或极小值；不然，则称函数L在$\mathbf{x}^*$处具有相对（或局部）极大值或极小值。

无约束时函数的极值称为普通极值。下面直接引用微分学中有关函数普通极值的基本定理。

定理1-1 函数达到普通极值的必要条件

设在内点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$处，函数 $L(\mathbf{x}^*)$及其一阶导数$\left.\frac{dL}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$存在且连续，则$L(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$处取极值的必要条件是：$L(\mathbf{x})$的一阶梯度为零，即

$$\nabla L|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \left.\frac{dL}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \left[\frac{\partial L}{\partial x_1^*} \; \frac{\partial L}{\partial x_2^*}, \cdots \frac{\partial L}{\partial x_n^*}\right]^T = 0 \tag{1-9}$$

定理1-2 函数达到普通极值的充分条件

设满足定理1-1，且函数$L(\mathbf{x})$在内点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ 处的二阶导数$\left.\frac{d^2L}{d\mathbf{x}^2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$存在且连续，则 $L(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$处取极大值的充分条件是：$L(\mathbf{x})$ 的一阶梯度为零，且二阶梯度为负定阵，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}=\left[\frac{\partial L}{\partial x_1^*}\ \frac{\partial L}{\partial x_2^*}\ \frac{\partial L}{\partial x_n^*}\right]^T=0$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^{*2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^*\partial x_n^*}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^*\partial x_1^*} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^{*2}}\end{pmatrix} \tag{1-10}$$

而$L(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ 处取极小值的充分条件是：$L(\mathbf{x})$的一阶梯度为零，且二阶梯度为正定阵，即

$$\left\{\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}=\left[\frac{\partial L}{\partial x_1^*}\ \frac{\partial L}{\partial x_2^*}\ \cdots\frac{\partial L}{\partial x_n^*}\right]^T=0\\ &\left.\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\mathbf{x}^2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^{*2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^*\partial x_n^*}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^*\partial x_1^*} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^{*2}}\end{pmatrix}>0\end{aligned}\right. \tag{1-11}$$

其中：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^{*2}} & \vdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^*\partial x_n^*}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^*\partial x_1^*} & \vdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^*}\end{pmatrix}$$

为Jacobi 矩阵。

例1-1 设二次函数为

$$L(\mathbf{x})=\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}+C$$

其中：L为标量函数，$\mathbf{x}$为 n 维状态参数，$\mathbf{A}$为$n\times n$对称常数矩阵，$\mathbf{b}$为n维常数向量，C为常数标量，则$L(\mathbf{x})$取极值的必要条

件是：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0$$

因

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\mathbf{x}^2} = \mathbf{A}$$

若$\mathbf{A}$ 为正定阵，即

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\mathbf{x}^2} = \mathbf{A} > 0$$

则函数L 在

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

处达到极小值。

例1-2　最小湿周问题

设需要挖掘一条灌溉渠道，横断面取梯形，如图（1-1）

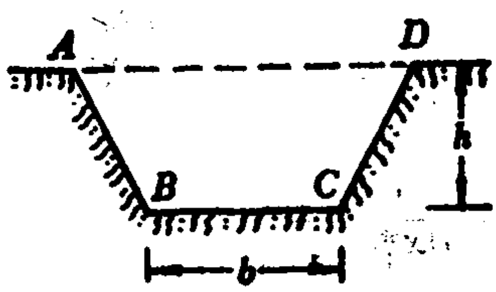


图1-1　渠道断面

所示。由于对流量有一定要求，故渠道断面的面积S是固定的。现在的问题是如何选择渠道两岸的倾斜角θ及高度h，以使湿周取最小值。所谓“湿周”，是指断面上与水接触的各边的总长度l。湿周愈小，筑渠所需的衬砌材料及投工量就愈少。

显然，有

$$S = (b + h\mathrm{ctg}\theta)h \tag{1-12}$$

$$l = b + \frac{2h}{\sin\theta} \tag{1-13}$$

由式（1-12）得

$$b = \frac{S}{h} - h\mathrm{ctg}\theta \tag{1-14}$$

将式（1-14）代入式（1-13），有

$$l = \frac{S}{h} - h\mathrm{ctg}\theta + \frac{2h}{\sin\theta} = \frac{S}{h} + \frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}h \tag{1-15}$$

这样，问题就归结为求二维向量$[h\ \theta]^T$的标量函数l的极小值的问题。

由定理1-1，最优参数h^*及θ^*应满足

$$\frac{\partial l}{\partial h^*} = -\frac{S}{h^{*2}} + \frac{2-\cos\theta^*}{\sin\theta^*} = 0 \tag{1-16}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta^*} = \frac{1-2\cos\theta^*}{\sin^2\theta^*}h^* = 0 \tag{1-17}$$

式（1-16）及（1-17）为多值方程，根据问题的性质，应取

$$h^* = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}},\quad \theta^* = \frac{\pi}{3}$$

读者可自行校验，矩阵

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 l}{\partial h^2} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial h \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial h} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \end{vmatrix} > 0$$

即该矩阵为正定的。

由此可知，l在（h^*，θ^*）处取极小值。

二、等式约束——Lagrange 乘子法

为了说明有约束和无约束两种情况下参数最优化问题的区别，用图1-2给出二元函数

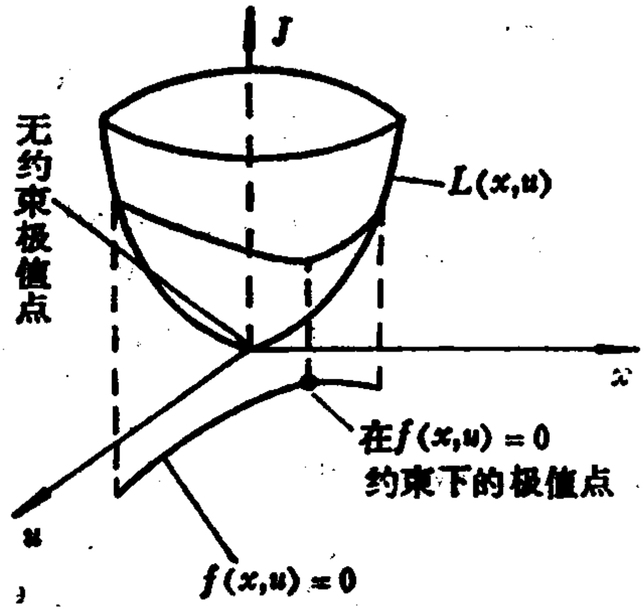


图1-2　条件极值

$$J = L(x,\ u)$$

的普通极值点及在等式

$$f(x,\ u) = 0$$

约束下的条件极值点。显然，二者可能是完全不同的。

问题1-2　具有等式约束的参数最优化问题

求最优控制参数 $\mathbf{u}^*$及最优状态参数 $\mathbf{x}^*$，以使目标函数

$$J = L(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) \tag{1-18}$$

在等式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) = 0 \tag{1-19}$$

约束下达到极小值。其中，L为标量函数；

$$\mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ \cdots x_n]^T$$

为 n 维状态向量；