初等数学疑难问题讲解

解题思路
解题方法
解题技巧

段明峻

内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

解题思路·解题方法·解题技巧

内蒙古人民出版社
1988·呼和浩特

初等数学疑难问题讲解
解题思路·解题方法·解题技巧
段明峻
*
内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　凉城印刷厂印刷
开本：787×1092　1／32　印张：15.5　字数：329千
1984年9月第一版　1984年12月第1次印刷
印数：1—58,800 册
统一书号：7089·357　　每册：1.20元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题思路·解题方法·解题技巧》、《容易错的概念·容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题，讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法，同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八三年十二月二十五日

前 言

解数学题的目的之一，应使你更深刻地理解和牢固地掌握基础知识和基本技能，同时在理解、掌握和运用基础知识和基本技能的过程中，可以更有效地培养和提高自已的解数学题的能力。

对解题的研究中，考虑解题思路、解题方法和解题技巧必然成为广大师生和立志自学的青年所共同关注的课题。其实我们的生活和生产中也经常遇到一些应用思路、方法和技巧的事例，这些事例和现象常给人们以某种启示，把它联想到解题，从题设到题断若采用简捷的思路、最优的解法和恰当的使用技巧，不仅会加快解题速度、提高解题的准确性，还会增加解题兴趣，促进解题“能力”，并能提高“智力”的发展。

解题思路、解题方法和解题技巧的获取是基于准确地掌握基础知识和严格地基本训练，是来源于对题目特点的认真分析，对有关图形的细致观察，对所涉及到的有关知识能够将其有机的联想。对于千变万化的数学题，没有一把现成的解题的万能钥匙，也没有一个既定的共同的规律可循，但是从结论出发紧扣已知条件进行富有创造性的独立思考，并能灵活应用其备有的解题知识和技能乃是解题的根本前提，这样经常积累解题的经验可以探索到题解的思路、方法和技巧的基本规律。

研究解题思路、方法和技巧，必然要涉及到一题多解的

问题，研究一题多解可以活跃思维，开阔思路，复习和运用更多的基础知识和基本训练，也为了“多”中选“优”。一题多解，实则一题多得，从“量”中求“质”。

全书选进了160多例，提供了300多种具体的思路、方法和技巧。使用本书时，读者应先独立思考，尽量完成题解后，本着研究、探讨和商榷的精神，通过书信与作者展开讨论，如果能够起到抛砖引玉的效果，作者将感到快慰。

本书编写过程中，参考了一些数学期刊发表的一些内容，在此向有关作者致以谢意。

由于水平所限和时间仓促，书中缺点和错误危恐不少，敬希读者批评指正，以便丰富、充实“初等数学解题思路、解题方法和解题技巧”的内容，并使其逐步完善起来。

作者

于1983年8月

目　录

一　代　数

二　三　角

三　平面几何

四　立体几何

五　解析几何

一 代 数

§1 数的运算和代数式的恒等变形

数的运算和式的恒等变形是中学数学中的两项极为重要的基本训练，对学好数学具有全局性的意义。这里，为了既要掌握一般地运算和变形的基本思路、方法和技巧，也要掌握一些特殊的解题思路、方法和技巧，我们有意识地通过例题介绍了"待定系数法"、"三角变换法"、"换元法"、等等。其中有些例题综合性较强，分别涉及到各有关知识的各种类型的变形或运算技巧，如行列式、排列、组合数公式等。请注意"变形"和"计算"技巧的积累。

例1 证明 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$.

〔**思路**〕 直接通过开平方、开立方算出左端为1，是困难的。我们采用一种特殊的思路，

设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，化成关于$x$的一元$n$次方程，若此方程是可解的特殊方程，又只有唯一的实根1，则求证该式成立.

〔**证法**〕 设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则两边立方，得

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$$\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)$$

$$=x^3.$$

整理，得，

$$2-x=x^3.$$

即 $x^3+x-2=0$.

$$(x^3-1)+(x-1)=0.$$

$$(x-1)(x^2+x+2)=0.$$

$\therefore$ $x_1=1$，而$x^2+x+2=0$无实根。

$\therefore$ $x^3+x-2=0$有唯一的实根。

$$\therefore\quad\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1.$$

〔技巧〕 证明数字等式的基本方法应该通过计算证得，从理论上讲这是可行的，但实际上徒手计算，或用计算器计算均得近似值，十分麻烦和困难。通过设$\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，化等式证明为解方程问题，正巧特殊方程有唯一的实根$x=1$，从而证得原数字等式成立。

这种证法在中学水平的范围是有一定局限性的。

例2 （1） 求方程$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$在有理数范围内的所有解。

（2） 设$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$，此处$a$、$b$、$c$是有理数。证明：$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$.

〔思路〕 第1题的意思是，$x\in Q$，$y\in Q$，$Z\in Q$，求使

等式$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$成立的$x$、$y$、$z$的值．由观察容易发现当$x=0$、$y=0$、$z=0$时，满足方程，即

$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$ 是方程的一组解．其它非零解呢？先解决有无非零解，若证得无非零解，则寻找非零解就毫无意义．关键是确定无非零解的存在性，（或者是零解的唯一性）．考虑唯一性的问题，通常用反证法，通过假设，方程有非零解：

$\begin{cases} x=a, \\ y=b, \\ z=c. \end{cases}$ 其中a、b、c不全为零，若导出矛盾，否定假设，证明了零解的唯一性；若$x=a$，$y=b$，$z=c$仍能满足方程，

则可得非零解 $\begin{cases} x=a, \\ y=b, \\ z=c. \end{cases}$

考虑2的证明，估计到可能借用1的结论．证明$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$，关键是对多项式$a^3+2b^3+4c^3-6abc$分解因式，可猜想到其中有一因式可能是$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$．与1中的$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$类似，如果1中的方程只有零解，即$x=0$，$y=0$，$z=0$是等式$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$成立的充要条件，那么$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$，其中$a$、$b$、$c$一定不会同时为零，再以此结论，再推证另一个因式也不会为零，从而证得$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$，现在问题转化成$a^3+2b^3+4c^3-6abc$的因式分解，与$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$比较，发现$a^3+2b^3+4c^3-6abc=a^3+(b\sqrt[3]{2})^3+(c\sqrt[3]{4})^3$

$-6\cdot a\cdot(b\sqrt[3]{2})\cdot(c\sqrt[3]{4})$，这时，联想$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$，易得$a^3+2b^3+4c^3-6abc=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})[(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}]$。这就容易看清解题的全过程的症节所在。

〔**解法**〕（1） 显然$x=y=z=0$是方程$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$的一组解。

假定方程在有理数范围内还有非零解，即存在不全为零的有理数a、b、c，使

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0. \qquad (1)$$

两边同乘以$\sqrt[3]{2}$，得

$$2c+a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}=0. \qquad (2)$$

$b\cdot(1)-c\cdot(2)$，得$ab-2c^2+(b^2-ac)\sqrt[3]{2}=0$。

$\because$ $\sqrt[3]{2}$是无理数，

$\therefore$ $ab-2c^2=0$， (3)

$b^2-ac=0$。 (4)

$(3)\cdot c+(4)\cdot b$，得 $b^3-2c^3=0$。

或 $b^3=2c^3$，

若 $c\neq 0$，则$2=\left(\frac{b}{c}\right)^3$。

即 2是一个有理数的完全立方，这不可能，因此必须$c=0$，由（3）和（4）得，$a=0$，$b=0$，这与a、b、c不全为零的假设相矛盾。

因此，已知方程在有理数范围内仅有一解，即

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

(2) 由$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

令 $x=a$，$y=b\sqrt[3]{2}$，$z=c\sqrt[3]{4}$，则

$x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3+2b^3+4c^3-6abc$。

$\therefore$ $a^3+2b^3+4c^3-6abc=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})[(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}]$ （5）

$\because$ $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$.

假设$a^3+2b^3+4c^3-6abc=0$，则等式（5）的右端的第二个因式等于零，由1，得

$a^2-2bc=0$，$2c^2-ab=0$，$b^2-ac=0$，同1，可导出$a=b=c=0$，因此$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$，这与已知$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$相矛盾.

故 $(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}\neq 0$

因此，$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$。

〔技巧〕 原方程$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$是三元一次方程，仅通过一个三元一次方程确定方程的所有解，通常情况下，有无数组解，但方程有特点，而又在有理数集内求解，由视察法得一组零解之后，通过反证法证得零解的唯一性，其中进行了频繁的恒等变形，或得$2=\left(\frac{b}{c}\right)^3$，或得$\frac{b}{c}=\sqrt[3]{2}$.显然，两个有理数的商的立方不可能为2，或任何一个无理数不可能表示成一个分子、分母均为有理数的分数（即不可能用有理数表示无理数）.有目的的变形是此题的技巧所在。

在完成2的证明时，我们应用$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$，这是一个重要的恒等式.把$a^3+2b^3+4c^3-6abc$分解成$(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})$

$\cdot[(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}]$，又灵巧地借用了1的结论，反复地应用了形为$x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}=0$有唯一的零解，完成了2的证明。

注意：此题逻辑性强，结合反证法证明，是代数中训练逻辑思维的典型例举。

例3 已知 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，$a>0$，$b>0$

求 $Q=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$。

〔思路〕把x直接代入Q式；或把x式化简后代入Q式；或把化简后的x式代入$\sqrt{x^2-1}$，再代入Q式，化简过程要特别注意条件。还可化简Q式，即有理化分母后，代入。

我们采用化简后的x式，代入$\sqrt{x^2-1}$，再把x和$\sqrt{x^2-1}$代入Q式计算，求Q。

〔解法〕$\because\quad x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\sqrt{ab}+\frac{1}{a}\sqrt{ab}\right)=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab}$，

$$\therefore\quad \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-4ab}{4ab}}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}},$$

$$\therefore\quad Q=\frac{\dfrac{2b|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab}-\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}$$

$$=\frac{2b|a-b|}{(a+b)-|a-b|}.$$

$$\because\quad |a-b|=\begin{cases}a-b & (\text{当}a\geqslant b\text{时}),\\ b-a & (\text{当}a<b\text{时}).\end{cases}$$

$$\therefore\quad Q=\begin{cases}\dfrac{2b(a-b)}{a+b-(a-b)}=a-b & (\text{当}a\geqslant b\text{时}),\\[2ex] \dfrac{2b(b-a)}{(a+b)-(b-a)}=\dfrac{b}{a}(b-a) & (\text{当}a<b\text{时}).\end{cases}$$

〔技巧〕 化简x式后，代入$\sqrt{x^2-1}$，再把此式化简后代入Q式，通过计算化简得解，这比直接代入Q式化简容易，从书写上也简单．将Q式有理化分母，也十分简单．

注意，若$a<0$，$b<0$，则

$$Q=\begin{cases}-\dfrac{b}{a}(a-b) & (\text{当}a\geqslant b\text{时}),\\[2ex] a-b & (\text{当}a<b\text{时}).\end{cases}$$

例4 证明 $$\frac{b+c+d+\cdots+k+l}{a(a+b+c+\cdots+k+l)}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\cdots\cdots+\frac{k}{(a+b+\cdots+h)(a+b+\cdots+k)}+\frac{l}{(a+b+\cdots+k)(a+b+\cdots+k+l)}.$$

〔思路〕 如果从等式右端导出左端，显然这是很繁的．若把右端移向左端，证得左端－右端＝0即可，但这与上述思路同样是很繁的．我们还可试图由左端分式逐个减去右端的各分式，若最后差为0，也就证得等式成立．

〔证法〕 $$\frac{b+c+d+\cdots+k+l}{a(a+b+c+\cdots+k+l)}.$$

$$-\frac{l}{(a+b+\cdots+k)(a+b+\cdots+k+l)}$$

$$=\frac{(a+b+c+\cdots+k)(b+c+d+\cdots+k+l)-la}{a(a+b+c+\cdots+k)(a+b+c+\cdots+k+l)}$$

$$=\frac{b+c+\cdots+k}{a(a+b+\cdots+k)}.$$

又 $\frac{b+c+\cdots+h+k}{a(a+b+\cdots+h+k)}-\frac{k}{(a+b+\cdots+h)(a+b+\cdots+h+k)}$

$$=\frac{b+c+\cdots+h}{a(a+b+\cdots+h)},$$

……以此类推，

$$\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}-\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$$

$$=\frac{b+c}{a(a+b+c)},$$

$$\frac{b+c}{a(a+b+c)}-\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}$$

$$=\frac{b}{a(a+b)},$$

$$\frac{b}{a(a+b)}-\frac{b}{a(a+b)}=0.$$

故原等式两端相等，

即 $\frac{b+c+d+\cdots+k+l}{a(a+b+c+\cdots+k+l)}=\frac{b}{a(a+b)}$

$$+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\cdots$$

$$+\frac{k}{(a+b+\cdots+h)(a+b+c+\cdots+h+k)}$$

$$+\frac{l}{(a+b+\cdots+k)(a+b+\cdots+k+l)}.$$

〔技巧〕 我们采取依次逐一相减的方法，把等式左端看成一个整体，倒着依次减去右端的各分式得零，从而证得了等式成立。这在代数式的恒等变形中也是重要的解题技巧。

如果我们把右端各分式通过分式运算得等式左端，与上述证法比较显然是笨拙的。

例5 用待定系数法完成下列各题：

（1）当a和b为何值时，多项式

$$x^3+8x^2+5x+a$$

能被三项式x^2+3x+b整除。

（2）分解因式：$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$。

（3）化分式 $\dfrac{x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$ 为部分分式。

〔思路〕 待定系数法的思路和方法是多项式恒等变形的基本思路、基本方法，待定系数法的理论依据是：在某个数的集合范围内，要使以标准形状给出的两个多项式恒等，其充要条件是：含有同字母的同次项的系数相等。（简单讲：两多项式恒等的充要条件是同次项的系数相等。）

待定系数法的思路和方法是：①根据已知多项式的特点，先设出与其恒等的一个含有待定系数的多项式；②令其同次项的系数相等，得关于待定系数的方程或方程组；③解方程或方程组确定待定系数的值（或者从方程组中消去待定系数得到已知系数间的关系），从而达到解决问题的目的。

（1）．既然多项式x^3+8x^2+5x+a能被二次三项式x^2+3x+b整除，设$(Ax+B)(x^2+3x+b)$恒等于x^3+8x^2