本尼迪克
维 拉 斯 合著

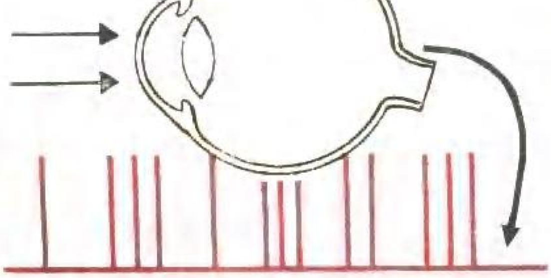
物理学

结合医学和生物学解说性实例

卷二 统计物理学

$p(i,k)=p(i)p(k)$

黄诒焯 等译
邝华俊 校



$P(n)=(\overline{n})^n e^{-\overline{n}}/n!$

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是美国麻省理工学院本尼迪克和维拉斯两位教授根据哈佛-麻省理工学院保健科学和技术的教学计划写成的教材，共分三卷出版：1. 力学，2. 统计物理学，3. 电磁学. 本书收集了大量结合医学和生物学重要和典型的说明性实例，并收入了若干宝贵的原始科学记载及科学家治学的轶事，既结合医学和生物学专业需要，又富启发性，取材先进，文笔生动.

本书适用于我国医科院校和综合大学生物专业的基础物理教学，可供有关师生作为参考教材，亦可供广大生命科学工作者自学基础物理学之用.

PHYSICS

WITH ILLUSTRATIVE EXAMPLES

FROM MEDICINE AND BIOLOGY

George B. Benedek·Felix M. H. Villars

Volume 2 Statistical Physics

Addison-Wesley Publishing Co. (1974)

物 理 学

结合医学和生物学解说性实例

卷二 统计物理学

本尼迪克 维拉斯 合著

黄诒焯 等译 邝华俊 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

金 堂 县 印 刷 厂 印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 23.75 字数 540,000

1985 年 8 月第 1 版 1985 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,000

书号 13010·0967 定价 4.50 元

序

经典物理学的结构是建立在三个基石之上的：(1)力学，(2)电学和磁学，以及(3)统计力学和热力学.

牛顿力学是本书第一卷的主要内容，它提供物理现象的一种决定论的描叙．如果作用在一个物体上的力为已知，并且它在开始时的坐标和动量也知道，则牛顿运动定律就使我们能够很精确地预知这物体以后的运动情况．力学是一门明显的因果科学．牛顿的运动定律提供原因(力)和效果(运动)之间的联系.

电学和磁学(本书第三卷的内容)也提供物理现象的决定论描叙．在这里麦克斯韦方程组提供一个决定论的结构，它把电荷和它们的运动与电场和磁场联系起来.

由于这两门学科所起的支配作用，以及习惯上总是把它们放在物理课程的前面，因此很自然地在学生的心目中形成一种看法，认为物理学是一门严守决定论的学科.

在本卷中我们要介绍统计物理学的概念，统计力学和热力学仅是其中的一部分．我们想在学生学习的初期就给他们说明，用一种概率性的、非决定论的观点来解释许多物理现象的来源是非常有力、应用范围广泛而又十分有用的．我们通过把这种方法分析地和定量地应用到一些问题上(例如：无规线团聚合物的大小；通过渗透膜的溶质扩散流；细菌受病毒侵袭后的继续生存；氧在血红蛋白分子结合部位上的附着；以及溶质对挥发性溶媒蒸汽压强和沸点的影响)来说明统计物理学的概率分析能够对许多各不相同的学科(如物理学、生物学、医学、生理学及物理化学)的一些重要问题提供使人满意的解释.

统计物理学的概念不是象力学和电磁学那样按照传统的成熟的模式发展的．我们很难用几个紧凑的公式，象麦克斯韦方程组或牛顿方程，来概括统计物理学的精华．但是我们总算把我们的统计物理学观点发展成为一种逻辑上满意的结构，从概率论的原理开始，最后在第四章以统计力学和热力学的深入了解结束.

在第一章我们介绍概率论基本概念的发展，加上一些有关历史的插话．通过考虑投掷硬币过程(这种过程和许多生物及物理过程事实上都是同类型的)，我们发展了最基本的二项式概率分布．然后我们把这种分布应用到三个问题上：不同人口家庭中子女的性别分布；无规线团聚合物的均方半径；以及溶液中血红蛋白的平均电荷、均方电荷和溶解度.

第二章开始是用伯努利概率分布来对一维随机游动问题进行分析．这种分布的时间-空间演变使我们对溶液中溶质粒子通过生物膜和合成膜的扩散输运现象有所理解．事实上这一课题的讨论对被动输运过程的理解达到了最新水平．我们还介绍了在人工肾透析、肾的生理功能以及溶质和溶媒对毛细血管壁的通过等方面的应用.

第三章的标题是“泊松统计”．开始是详细分析适用于泊松概率分布的一般条件．事实上在许多不同课题(从经济学到流行病学、体育和战争)的分析中都出现这种分布．学生将从我们对

著名的 Hecht, Shlaer, Pirenne 试验和 H. Barlow 的光强分辨阈试验的讨论中看到，泊松分布在理解极低和极高强度光照下的光感觉时所起的主要作用. 在本章中我们还要分析 Luria-Delbrück 的试验，它用纯统计的思考方法证明，细菌对病毒的免疫是突变的结果而不是后天获得的特性.

本卷最后的第四章讨论玻耳兹曼分布和多体系统的热平衡. 在这一章中我们特别注意对统计物理学的两个中心概念——玻耳兹曼因子和熵——的清晰介绍和物理含义的理解. 我们认识到熵是这样一个量，它的最大化建立起平衡状态(热力学第二定律)，并利用这一点来发展热力学，用于描述单相系和复合系统平衡状态间的关系. 我们认为第四章包含许多很好的应用例子. 例如我们介绍了固体的蒸汽压强与温度关系的理论，并证明可以利用这个经典的宏观现象来相当准确地测定普朗克常数. 我们还介绍了一个微观的与热力学相结合的理论，它很准确地说明重要的肌红蛋白和血红蛋白氧解离曲线的形状. 我们深信，第四章的内容不仅对物理学和生命科学的学生有用，而且对物理化学和化学热力学的学生也是很有价值的.

读者在每章的后面将会找到许多习题，它们可以帮助读者进一步弄清楚书中介绍的一些物理的、生物的或数学的概念. 习题是按从易到难的次序排列的，并按照它们所属的教材内容来分组.

在概率理论中所需要的基本数学技巧就是计算各种可能模式的能力、求级数和(特别是几何级数和二项式级数的和)的能力. 这些技巧用到高中代数的知识，掌握这些知识的学生对概率论数学将不会感到困难. 这里所用的初等微积分的水平大致和第一卷差不多. 在本卷中我们经常用到多变量函数$f(x, y, z)$的偏导数. 学生应该知道函数 f 对某一变量(比方说z)的偏导数$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$和通常的第一次导数是一样的，只要在演算时把所有其余的自变量都保持不变($x, y=$常量)就成了.

有经验的教师一定看出这一卷的内容超过了一学期课程的正常份量. 这本教材的编写方法容许有选择性地删去某些内容而不致影响后来章节的讲授. 例如，不需要把第一章中所有各种应用都一一介绍. 还有，在第二章中也可以略去第 2.5 节或第 2.6 节. 第三章大部分是自成体系而不是为第四章打基础的. 在第四章中教师可以(比方说)只介绍统计力学部分而删去后面的热力学. 总的说来，我们鼓励教师利用这本教材在结构上所提供的灵活性，选择那些最能适合他的特殊目的的材料.

我们把统计物理学(卷二)提到了电磁学(卷三)的前面，因为我们深深感到概率的概念在物理学中有后来居上的重要性. 在描述一些对物理学、化学和生命科学的学生来说是十分关键性的现象时，概率的概念是主要的. 当然我们知道在习惯上电磁学是紧接着力学讲授的. 本书第三卷《电学和磁学：医学和生物学解说性实例》的写法将使教师可以按一般习惯安排课程，如果他们想这样做的话.

维拉斯(Felix M. H. Villars)
本尼迪克(George B. Benedek)
1974 年 8 月 1 日于麻省坎布里奇
(兰州医学院 邝华俊译)

卷二　统计物理学目录

第一章　概率论原理．二项式分布．应用

1.1　概率的定义．两个法则．举例说明

概率的数学概念以及以此为基础的概率论，是从赌博的实践中产生的．随机游戏有着悠久的历史．在古代，这种游戏的一个方面是求助于命运，在即将作出决定之前寻找可以给予指示的兆头(这一直保留在抽签活动中)．不管怎样，作为一种娱乐手段，随机游戏大概永远是要保持重要地位的，而且由于这种游戏要下赌金，于是就希望对自己的获胜机会能有一个定量的测量方法．

虽然解决这种问题的尝试是15世纪在意大利开始的，但是用清晰而又严密的数学公式来表示机遇问题这一决定性的步骤，是在十七世纪中叶在法国实现的，当时在法国下大赌注的赌博正在盛行．

数学在十七世纪得到了空前的发展．我们只要提到笛卡儿、费马、帕斯卡、莱布尼兹(Leibnitz)和牛顿等人的名字就够了．费马和帕斯卡偶然地就在当时建立了我们现在称为概率论的基础．

帕斯卡所写的有关当时宗教辩论的文学作品和辩论著作比他的科学著作更为后代所熟知．但是他对几何学作出了重大贡献，他建立了液体静压强定律，并制成了一台最早的计算机器．后来，在他30岁的时候，他认为从事科学工作是“有罪”的，于是完全放弃了这方面的努力．

在他28岁时，他父亲去世了，并留给他一笔可以过舒适生活的遗产．大约有两年的时间，帕斯卡过着浪荡公子的生活．据推测，在此时期他结识了德·梅耳(de Méré)爵士，一个老赌徒．这个朋友经常向他请教在赌博时怎样估计获胜的机会．这引起了帕斯卡的兴趣．他知道费马是当时最有名的数学家．他就通过一个认识费马的朋友与他取得联系，并在1654年开始通信．这可以看作是概率数学理论的开始．费马是个律师，当时他是法国南部图芦兹(Toulouse)议会的王室评议员．[他们的来往信件还保存着，除了帕斯卡的第一封信以外，其余的都可以在戴维特(N. F. David)所著的《游戏，神和赌博》(*Games, Gods and Gambling*)一书中找到．(见参考文献2)]．

从那个时候起，这个课题的研究就作为对数学家的一个挑战而开始，并且在其后的一百五十年中得到了迅速的发展．在这个进程中，伯努利的著作(“*Ars Conjectandi*”，1713)和拉普拉斯的著作(“*Théorie Analytique des Probabilites*”，1812)是令人注目的成就．

概率的数学概念出现得那样晚，这一点我们不必感到惊奇．它的确是一种难以捉摸的想法，对它可以有许多不同的解释，但一般来说，它是以大量重复某一过程所得到的规律性为根据的，而这种过程如果只进行一次的话，其结果将是不可预测的．

概率的概念可以用于不同意义(或者稍微有些差别的意义)，这一点只要我们引证几个例子就不难理解．

在它最明显的应用中，概率的概念具有操作型的定义，即它是以可验证的经验为根据的：我们可以进行掷骰子的实验，在我们耐力所允许的范围内尽可能作多次投掷来测定1到6中任一指定数字出现的次数．偶数面出现的概率为50％这种说法，就表示了一种以过去的经验为根据的**期望**．这种经验就是，当重复地掷骰子时，将有约一半的情况出现偶数面．

人寿保险公司在制定与顾客年龄有关的保险单价格时，用的是类似的但有些模糊的概率概念．没有两个同一年龄的顾客是完全一样的，因此保险公司的保险单必须以某一"平均人员"的特性为根据，此"平均人员"要尽可能代表该年龄的大多数人的共性．

应用于像赛马或选举结果这一类"不可预测事件"时，概率这个词(例如，某匹马将获胜的概率)就不包含在相同条件下重复多次可以验証的这样一个特性．在赛马中，人们认为某一匹马将取胜，这可以代表从过去的经验中所得出的"似乎有理的判断"．但是，那匹马获胜的"概率"是属于一种我们不需要研究的问题．

现在，我们叙述一下在这里讲的概率概念所适用的场合，并进而给出定义：

(a) 我们讨论一种**行动**或**过程**，以后称为"试验"，这种试验有几种不同的可能结果．而在单次试验中哪一种结果出现都不能预先确定．设$\mathcal{N}$表示互斥的不同结果的数目，用下标i标记这些结果，i的范围是从1到n．

(b) 试验能够在**显然相同**的条件下重复任意多次．设$\mathcal{N}$表示重复试验的次数，$\mathcal{N}_i$表示结果"i"出现的次数．显然：

$$\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2+\cdots+\mathcal{N}_i+\cdots+\mathcal{N}_n=\mathcal{N}. \tag{1.1-1}$$

(c) 如果我们观察到，当使$\mathcal{N}$越来越大时，结果i出现的次数$\mathcal{N}_i$和重复试验的总次数$\mathcal{N}$之比趋向一个固定值，我们就称此极限

$$P(i)=\left(\frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}}\right)_{\mathcal{N}\to\infty}, \tag{1.1-2}$$

为试验中结果"i"出现的概率．

由此定义可直接得出两个结果．第一：结果"i"的概率$P(i)$是一个在0和1之间的数：

$$0\leqslant P(i)\leqslant 1.$$

第二，全部可能的、互斥的结果的概率之和是1：

$$\sum_{\text{全部结果}}P(i)=\Sigma_i\left(\frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}}\right)_{\mathcal{N}\to\infty}=\left(\frac{\Sigma_i\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}}\right)_{\mathcal{N}\to\infty}$$

$$=\left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}}\right)_{\mathcal{N}\to\infty}=1. \tag{1.1-3}$$

因为我们强调了互斥这一点，让我们来举例说明一下．考虑一个骰子，它的六个面上分别标记从1到6．在任何一次试验中，仅有其中的一个面朝上．所以我们共有六种互斥的结果，并且这六种也就是全部可能的结果．再没有其它的结果了．只有当这两个条件，即互斥性和完备性都满足时，式1.1-3才能成立．作为一个相反的例子，考虑下述试验：从已洗过的纸牌中抽出一张纸牌，并考虑下述几种结果出现的概率：

(1) 抽出一张黑桃，

(2) 抽出一张方块，

(3) 抽出一张 K.

现在，这些结果不是互斥的：方块 K 就属于(2)和(3)两种结果．表中所列的结果也不完备：红心 10 就既不属于(1)、(2)，也不属于(3)，虽然我们也能确定所述三种结果的概率(利用式1.1-2)，但式 1.1-3 在这种情况下不成立：

$$P(1)+P(2)+P(3)\neq 1.$$

上面所给出的概率的定义似乎需要我们**证明**，当试验的重复次数 $\mathscr{N}$ 达到很大时，这极限(式1.1-2)是存在的．实际上，在大多数的应用中，人们将认为这个极限的存在是理所当然的．经验告诉我们，只要主要的条件(在明显相同的条件下重复)仍然满足，我们就不会出问题．一般的情况确是如此．举一个例子，如果我们去求气体分子在两次相继的碰撞间通过某一距离的概率，我们立刻可以看到，所有的分子都是在显然相同的条件下不断进行试验的．

在这一节中，我们主要关心的是建立一组法则，这些法则使我们能够确定试验可能结果的概率．这些试验是由一些更基本的、其概率为已知的试验所组成的．例如我们希望了解在连续四次掷一对骰子时，至少有一次双六出现的概率．这概率可以根据一次掷一个骰子时，出现六的概率来确定．我们来看看具体作法是怎样的．显然，我们需要一套"工作法则"．我们只要两个基本法则就够了．下面依次来讨论这些法则：

第一个法则是所谓的**加法法则**．考虑某一具有 n 个互斥结果的试验，用 $i=1$ 到 $i=n$ 来标记它们．设 $P(i)$ 表示结果"i"出现的概率．我们要求出现"或者是 i 或者是 j"(i 与 j 不相同)这种结果的概率．这个意思是指：重复 $\mathscr{N}$ 次试验时，出现结果为"i"的次数 $\mathscr{N}_i$ 次，结果为"j"的次数 $\mathscr{N}_j$ 次，则我们将取二者之和($\mathscr{N}_i+\mathscr{N}_j$)作为结果"或者是 i 或者是 j"出现的次数．我们用"$i+j$"表示这种结果，用 $P(i+j)$ 表示它的概率．这概率根据式 1.1-2 定义如下：

$$\begin{aligned}P(i+j)&=\left(\frac{\mathscr{N}_i+\mathscr{N}_j}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}\\&=\left(\frac{\mathscr{N}_i}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}+\left(\frac{\mathscr{N}_j}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}\\&=P(i)+P(j).\end{aligned}$$

这就是加法法则的实质，现在将它叙述如下：

结果"或者是 i 或者是 j"出现的概率 $P(i+j)$(i 和 j 是不同的并且是互斥的)是

$$P(i+j)=P(i)+P(j). \tag{1.1-4}$$

$P(i)$ 和 $P(j)$ 分别是结果"i"和结果"j"单独出现的概率．

作为例子，考虑一个骰子，它的六个面上分别用 1 到 6 标记，现在假定面 1 涂绿色，面 2 和面 3 涂蓝色，面 4、面 5 和面 6 涂红色．掷这个骰子时，我们希望知道红色的、蓝色的或绿色的各面出现的概率．如果已经知道面 1 到面 6 出现的概率分别为 $P(1)$ 到 $P(6)$，那么，由加法法则可以得到：

$$P(\text{绿})=P(1);$$

$$P(\text{蓝})=P(2)+P(3);$$

$$P(\text{红})=P(4)+P(5)+P(6).$$

虽然它很简单，学生常常不会利用这个法则．例如，考虑这样一个问题：用一个骰子不掷出"6"的概率是多少？这里所讨论的结果是"非 6"．它意味着或者是 1，或者是 2，或者是 3，或者是 4，或者是5．因此，利用加法法则，概率 P(非 6)是：

$$P(\text{非 }6)=P(1)+P(2)+P(3)$$
$$+P(4)+P(5)$$
$$=1-P(6).$$

因为全部结果的概率总计为 1．

第二个法则是乘法法则，它用于几个独立事件的联合出现．作为例子，考虑由掷两个骰子组成的试验．为了区别这两个骰子，让其中一个骰子的各面标记上 1 到 6，另一个骰子的各面标记上 A、B、……、F．这个试验有 36 种不同的互斥结果，把它们分别标记为 $1A$、$2A$、……、$1B$、$2B$、……、$1F$、$2F$、……、$6F$．现在将这一对骰子掷$\mathscr{N}$次，$\mathscr{N}$是一个很大的数目，列表记下各种结果的次数 $\mathscr{N}_{1A}$、$\mathscr{N}_{2A}$、……、$\mathscr{N}_{6F}$．我们可以把这表排列成 6 行和 6 列的方阵．

$\mathscr{N}_{1A}$	$\mathscr{N}_{2A}$	……	$\mathscr{N}_{6A}$	$\mathscr{N}_{A}$
$\mathscr{N}_{1B}$	$\mathscr{N}_{2B}$	……	$\mathscr{N}_{6B}$	$\mathscr{N}_{B}$
⋮	⋮		⋮	
$\mathscr{N}_{1F}$	$\mathscr{N}_{2F}$	……	$\mathscr{N}_{6F}$	$\mathscr{N}_{F}$
$\mathscr{N}_{1}$	$\mathscr{N}_{2}$	……	$\mathscr{N}_{6}$	$\mathscr{N}$

图 1.1-1　将两个不同的骰子掷$\mathscr{N}$次的可能结果的表格．

除了这个方阵以外，我们还记下每一行和每一列的次数小计：

$\mathscr{N}_1=\mathscr{N}_{1A}+\mathscr{N}_{1B}+\cdots\cdots+\mathscr{N}_{1F}=$列的次数小计，

$\mathscr{N}_A=\mathscr{N}_{1A}+\mathscr{N}_{2A}+\cdots\cdots+\mathscr{N}_{6A}=$行的次数小计，

右下角中的$\mathscr{N}$为投掷次数总计，

$$\mathscr{N}=\mathscr{N}_1+\mathscr{N}_2+\cdots\cdots+\mathscr{N}_6$$
$$=\mathscr{N}_A+\mathscr{N}_B+\cdots\cdots+\mathscr{N}_F.$$

借助这组数字，我们就能够定义各种结果的概率．如事件"$1A$"的概率是：

$$P(1A)=\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}. \tag{1.1-5}$$

对于 $1A$ 到$6F$ 的 36 种结果中任一结果都有相应的定义．

现在假定我们已经作过只用一只骰子（这些骰子可以是不匀称的！）的实验．并且确定了用数字标记的骰子出现 1 到 6 的各种结果的概率

$$P(1), P(2), \cdots\cdots P(6),$$

以及用字母标记的骰子出现 A 到 F 的各种结果的概率

$$P(A), P(B), \cdots\cdots P(F).$$

现在的问题是：我们能不能利用上面列出的掷单个骰子的概率知识，推论出掷一对骰子出现36种结果的概率 $P(1A)$到$P(6F)$？回答是肯定的，只要两个骰子是独立的假定能够成立．在同一次掷出的两个骰子的情况中，我们直观地知道：第一个骰子落下的方式一般不会影响到第二个骰子．但是，如果在每个骰子内都放置一小块磁棒，这个结论就不正确了．

从这个独立性的假设中，我们能得出什么结论呢？第一个并且是相当明显的一个结论是：

$$P(1)=\left(\frac{\mathscr{N}_1}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}. \tag{1.1-6}$$

让我们看看为什么是这样：$\mathscr{N}_1$ 表示标有数字的骰子出现结果"1"的次数，而不管另一个骰子出现的字母是什么．$\mathscr{N}$是投掷的总次数．所以比值$(\mathscr{N}_1/\mathscr{N})$是不管第二个(标有字母的)骰子出现的是什么，仅仅由第一个骰子得到结果"1"的相对频率．独立性的含义正是这样：虽然这第二个骰子是与第一个骰子一道掷出来的，不过它的存在不可能对第一个骰子出现"1"或者"2"的频率有所影响．这些频率必须和第二只骰子不存在时的情况完全一样．

根据同样的推理，我们得出：

$$P(A)=\left(\frac{\mathscr{N}_A}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}. \tag{1.1-7}$$

其中 $\mathscr{N}_A$ 是投掷中第二个(标有字母的)骰子出现"A"的次数，不管第一个骰子上的数字是什么．

但是，我们还没有完全充分利用这个独立性假设．从这个假设还可导出一个不太明显的结论：

$$P(1)=\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{\mathscr{N}_A}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}=\left(\frac{\mathscr{N}_{1B}}{\mathscr{N}_B}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}=\cdots\cdots. \tag{1.1-8}$$

为了弄懂这一点，我们考察式1.1-8右边两个比值的含义：$\mathscr{N}_A$ 是第二个骰子掷出"A"的总次数．$\mathscr{N}_{1A}$ 是 $\mathscr{N}_A$ 中的一部分，是第一个骰子也同时出现"1"的次数．所以$(\mathscr{N}_{1A}/\mathscr{N}_A)$是当标有字母的骰子出现"$A$"时，第一个骰子出现"1"的频率．同样，$(\mathscr{N}_{1B}/\mathscr{N}_B)$是当标有字母的骰子出现"$B$"时，第一个骰子出现"1"的频率．式1.1-8断言，这些频率必定是相同的．如果假设它们不相同，那就意味着第一个骰子出现结果"1"的频率实际上是与第二个骰子出现什么面有关，这就与我们所作的独立性假设相矛盾了．

所以，我们得出结论：

$$\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{\mathscr{N}_A}\right)=\left(\frac{\mathscr{N}_{1B}}{\mathscr{N}_B}\right)=\cdots\cdots=\left(\frac{\mathscr{N}_{1F}}{\mathscr{N}_F}\right). \tag{1.1-9}$$

这样，这些比值也就等于 $P(1)$*，即：

$$\frac{\mathscr{N}_{1A}+\mathscr{N}_{1B}+\cdots\cdots+\mathscr{N}_{1F}}{\mathscr{N}_A+\mathscr{N}_B+\cdots\cdots+\mathscr{N}_F}=\frac{\mathscr{N}_1}{\mathscr{N}}=P(1). \tag{1.1-10}$$

---

* 初等代数指出：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{(a+c)}{(b+d)}$，因为$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)$，我们可以写出 $c=\lambda a$ 和 $d=\lambda b$，其中 λ 是一常数：故有$\left(\frac{a+c}{b+d}\right)=\frac{a(1+\lambda)}{b(1+\lambda)}=\frac{a}{b}$．证完．

这个结果(式 1.1-9)是非常重要的，结合式 1.1-7可导出:

$$P(1)=\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{\mathscr{N}_A}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}=\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{P(A)\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}$$

$$=\frac{1}{P(A)}\left(\frac{\mathscr{N}_{1A}}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}.$$

但是比值$(\mathscr{N}_{1A}/\mathscr{N})_{\mathscr{N}\to\infty}$正好是式 1.1-5 中所定义的概率 $P(1A)$. 所以我们得出结果:

$$P(1A)=P(1)P(A), \tag{1.1-11}$$

掷两个独立的骰子出现结果"$1A$"的概率等于第一个骰子出现结果"1"的概率 $P(1)$，与第二个骰子出现结果"A"的概率$P(A)$的乘积. 显然，同样的法则对于"$1A$"到"$6F$"的 36 种结果中任何一种都是成立的.

这个结果就是乘法法则. 我们用一种普遍的形式来叙述它:

如果试验 T_1 有几种不同的、互相排斥的结果"i"$(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$，它们出现的概率为$P(i)$，试验 T_2 有 m 种结果"α"$(\alpha=1, 2; \cdots\cdots, m)$，它们出现的概率为 $P(\alpha)$，那么，在联合的试验 T_1T_2 中，结果"$i\alpha$"(表示"i 和 α"同时出现)的概率 $P(i\alpha)$可由下式给出:

$$P(i\alpha)=P(i)P(\alpha), \tag{1.1-12}$$

条件是 T_1 和T_2 两个试验是独立的.

乘法法则的一个重要而又直接的推广是应用于重复某一给定过程N次所组成的试验. 设这个试验有结果"i"(独立的，互斥的)，它出现的概率为 $P(i)$. 那么，任一特定的N次重复结果可以用下面一组数来标记:

$$\text{“}i_1, i_2, \cdots\cdots, i_N\text{”}.$$

这意味着，第一次是结果 i_1，第二次重作的结果是i_2，重作第N次的结果是 i_N. 例如，设一个单项试验包括将一个骰子掷 5 次. 在这种情况下，N等于 5. 这个单项试验中的一个特定结果需要用五个面上的数字所组成的集合来说明，如"2、5、3、1、6". 另外，我们可以把这个单项试验想像为同时把 5 个独立的骰子掷向依次排列的 5 条槽沟上. 在这种情况下，结果"2、5、3、1、6"表示槽沟中骰面数字的空间序列.

重要的是要记住: 符号N在这里是用来说明在单次试验中的元素数目的. 这个符号一定不要与$\mathscr{N}$混淆，$\mathscr{N}$是我们曾经用来并将继续使用来说明进行试验的总次数的.

在独立性假设之下，对于某一特定结果"$i_1, i_2, \cdots\cdots, i_N$"的概率 $P(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_N)$由下式给出:

$$P(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_N)=P(i_1)P(i_2)\cdots\cdots P(i_N). \tag{1.1-13}$$

这个问题的证明留作课堂作业.

现在，我们要介绍几个应用这些法则的例题. (更多的应用例题将在习题中给出.)在所有这些例子中，我们考虑的都是一个理想的骰子，它的六个面中任何一个面"i"出现的概率都等于1/6.

例 1: 用一个骰子掷出偶数的概率是多少?

这是加法法则的一个简单应用：六个面中三个面上数字是偶数，所以

$$P(\text{偶数})=P\left(\frac{\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_4+\mathcal{N}_6}{\mathcal{N}}\right)_{\mathcal{N}\to\infty}$$

$$=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

例 2: 不掷出 6 的概率是多少？

再一次引用加法法则．“非 6”意味着“或者是 1 或者是 2 或者是 3 或者是 4 或者是 5”，所以

$$P(\text{非 }6)=\sum_{1}^{5}P(i)=\frac{5}{6}.$$

例 3: 投掷两个骰子出现相同面的概率是多少？

按照乘法法则，任一种指定的结果的组合(i,j)，其概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$．这对于(1, 1)、(2, 2)、……、(6, 6)中每一个都是成立的．所以，对于“或者(1, 1)或者(2, 2)或者……(6, 6)”的概率由加法法则给出：

$$P(\text{相同面})=P(1,1)+P(2,2)+\cdots\cdots+P(6,6)=6\times\frac{1}{36}=\frac{1}{6}.$$

例 4: 用一个骰子掷两次至少得到一个 6 的概率是多少？

在这种情况下，我们可以首先使用加法法则来确定单个骰子的概率：

$$P(6)=\frac{1}{6},\qquad P(\text{非 }6)=\frac{5}{6}.$$

把这个骰子掷两次时，有四种可能的结果：

“6, 6”，“6, 非 6”，“非 6, 6”，“非 6, 非 6”．

其概率分别是：

$$P(6,6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36},$$

$$P(6,\text{非 }6)=P(\text{非 }6,6)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$P(\text{非 }6,\text{非 }6)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}.$$

上述四种结果中除最后一种外，全都表示至少有一个 6 的结果．所以至少获得一个 6 的概率是：

$$P(\text{至少出现一个 }6)=P(6,6)+P(6,\text{非 }6)+P(\text{非 }6,6)=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}.$$

得出这结果的另一种更迅速的方法是根据求和法则(式 1.1-3)，对于全部可能的、互斥的结果的概率和必须是 1．所以，

$$P(\text{至少出现一个 }6)=1-P(\text{非 }6,\text{ 非 }6)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}.$$

例 5: 前面提到的德·梅尔爵士(他是这门科学的创始人) 在掷骰子的赌博上耗费了大量的时间(和金钱)．他发现，在等量的赌注下，对一个骰子掷四次，至少获得一个 6 的打赌是一种赢

钱的组合．按照下述理论他是应当赢钱的：

在单个骰子一次投掷中，我们得到以下的概率：

$$P(6)=\frac{1}{6},\qquad P(\text{非 }6)=\frac{5}{6}.$$

当掷四次时，有 $2\times2\times2\times2=16$ 种可能的不同结果．按照乘法法则，“非 6，非 6，非 6，非 6”这一结果的概率为：

$$P(\text{非 }6,\text{非 }6,\text{非 }6,\text{非 }6)=[P(\text{非 }6)]^4=\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

其余的 15 种结果中的每一种至少有一个 6．因为这些概率的和为 1，所以我们推得：

$$\begin{aligned}P(\text{至少出现一个 }6)&=1-P(\text{全部非 }6)\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\\&=\frac{671}{1296}=0.517.\end{aligned}$$

这样，事实上，他的打赌取胜的机会高于 50-50．因此，在大量试验之后，若赌注是相等时，他应当赢钱．例如，他以这种取胜的组合与另一赌徒打赌十块钱．那么，经过 1000 次试验后，平均的来说，他将获胜 517 次，失败 483 次．若他下赌金的总数为 10,000 元，他将平均赢回 $20\times517=10{,}340$ 元．输者下同样的赌注，平均的来说，仅仅拿回来 9,660 元．

后来，这位爵士想稍微改变一下这种赌法．如果他能够在一个骰子掷四次至少得到一个 6 的打赌中取胜，他推论在掷一对骰子 24 次获得至少一个双 6 的打赌中他也能够取胜．他的想法是这样的：当所希望的结果是 6 种可能中的一种时，四次试验就可以取胜．那么，当所希望的结果是 36 种可能中的一种时，24 次试验也应当可以取胜．因为 24 比 36 与 4 比 6 是相等的．显然，这是一种相当模糊的想法．无论如何，他还是试验了这种新的赌法，并且很惊奇地发现他赌输了．下面是帕斯卡在给费马的第二封信中关于此事的评论，写信的日期是1654年 7 月29日．[2,3]

“我没有时间给您证明一个使德·梅尔大感困惑的难题．他是很能干的，但他不是一位几何学家（这个，您知道，是一个很大的缺陷），他甚至不了解，一条数学的线段可以无限地分割，反而相信它是由有限的点组成的．我没有办法使他摆脱这种想法，您如果能做到这一点，您将使他成为一个十全十美的人．

他告诉我，他发现了一个数论上的错误，其理由是：

如果要用一个骰子掷得一个 6，在掷四次中能达到目的的优势是 671 比 625*．

如果用两个骰子掷出两个 6，在掷 24 次中得到的是劣势．

然而，24 比 36（36 是两个骰子的两个面的配对数）与 4 比 6（6 是一个骰子的面数）是相等的．

---

* 帕斯卡所说的“优势”是指爵士获胜的概率与他的对手获胜的概率的比，这比值是：

$$(671/1296)/(625/1296)=671/625.$$

正因为这个原因，使他那样的生气，并且对所有的人说：定理是互相排斥的．算术是自相矛盾的．但是，如果像您那样懂得这些原理，您将很容易明白，我所说的是正确的．"

事实上，我们很容易看出，在将一对骰子连续掷 24 次中，至少获得一对六的赌法是不能赌赢的：

按照乘法法则，掷一对骰子一次，出现一对六的概率是：

$$P=(6,6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

那么，每掷一对骰子，我们可以确定"6, 6"和"非(6, 6)"两种结果的概率：

$$P(6,6)=\frac{1}{36},$$

$$P[\text{非}(6,6)]=1-P(6,6)=\frac{35}{36}.$$

现在掷一对骰子 24 次，按照乘法法则，每一次都出现结果"非(6, 6)"的概率是：

$$[P\,\text{非}(6,6)]^{24}=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.5086.$$

掷 24 次试验的 2^{24} 种结果中的所有其它结果都包含有至少一对六，所以

$$P(\text{至少一对 }6)=1-0.5086=0.4914,$$

因为这是一个小于$\frac{1}{2}$的数，当赌注是相等的时候，它不是一种获胜的打赌．读者也将注意到，所打赌的那个结果的劣势的确是很小的，这位爵士必须持久地进行赌博，才能从经验上发现他的这个假设是错误的．(见习题(25))

1.2 伯努利试验．二项式分布

这种试验的最简单情况是仅有两种可能的结果．它的典型就是抛掷硬币，出现"正面"(h)朝上，或"反面"(t)朝上．在这种情况下，通常把相应的两个概率称为 p 和 q，

$$P(\text{正面})=p,$$

$$P(\text{反面})=q=1-p. \tag{1.2-1}$$

这类试验之所以重要和令人感兴趣的原因在于它的 N 次重复可以用来作为许多物理过程的模型．

重复只有两种可能结果的试验 N 次，并假定第 n 次重复的结果不受前$(n-1)$次试验中任何结果的影响，这种过程就叫做伯努利过程．因此，重复地抛掷硬币是一个伯努利过程．

重复有两种结果的试验不一定都是伯努利过程．例如，考虑一个受下面规定支配的 N 步随机游动(有向前与向后二种选择)：

$$p=\text{第 }n\text{ 步与前一步方向相同的概率},$$

$$q=\text{第 }n\text{ 步与前一步方向相反的概率},$$

这规定确定了这一过程完全不同于伯努利过程．在这个过程中，每一步结果的概率是受前一步所发生的事件的"记忆"所控制的．这样的过程被称作马尔柯夫(Markov)过程．尽管在统计物

理中它们非常重要，但我们必须把它们放在一边，因为它们不能用初等方法来描述.

伯努利研究了只有两种结果的试验的 N 次重复过程，用来回答任何数学家都要提出的一个与概率定义(式 1.1-2)有关的问题：$\mathscr{N}$ 必须是多大？即，为了以一定的精确度来确定概率 P 的值，我们必须重复多少次试验？并且，当 $\mathscr{N}$ 越来越大时，比值 $(\mathscr{N}_h/\mathscr{N})$ 实际上能收敛于某一极限值吗？

J. 伯努利(1654年生)是显赫有名的、在三代中出了八个数学家的伯努利家族中最老的一个数学家. 他的家庭象很多新教徒的家庭一样，在 1583 年逃离了西班牙的尼德兰 (Netherlands)，在瑞士的城市贝塞耳(Basel)避难，以后成了富商. J. 伯努利本来要当牧师，取得了神学学位. 但他在 22 岁时改变了主意，到外地去旅行，后来成了一位数学家. 惠更斯关于随机游戏的著作引起了他对概率数学理论的兴趣. 他第一个回答了上述关于概率的真正定义的问题：例如，在抛掷硬币时，我们定义“正面”出现的概率为

$$p=\lim_{\mathscr{N}\to\infty}\left(\frac{\text{正面出现的次数}}{\text{试验的次数}}\right)=\left(\frac{\mathscr{N}_h}{\mathscr{N}}\right)_{\mathscr{N}\to\infty}. \tag{1.2-2}$$

p 存在吗？若假定存在，$\mathscr{N}$ 应当多大才使 p 的数值达到一定的精确度呢？这个问题导致 J. 伯努利去研究有限(N 步)的试验序列.

由这些考虑而出现的著名的伯努利概率分布将是本章的中心内容.

在研究这种分布之前，我们将暂时离开本题来简单地看一下，对于伯努利提出的上述问题能给出什么样的回答。我们用尽量准确的语言再将此问题叙述一遍：

假定正面以某一确定的概率 p 出现. 如果我们抛掷硬币有限次数 $\mathscr{N}$，正面出现 $\mathscr{N}_h$ 次，那么，我们知道，比值 $\mathscr{N}_h/\mathscr{N}$ 未必正好等于 p. 但它接近于 p 的程度如何？让我们用差值 d 定量地表示这两个数值接近的程度：

$$d\equiv\left|\left(\frac{\mathscr{N}_h}{\mathscr{N}}\right)-p\right|. \tag{1.2-3}$$

因为在硬币投掷过程中的固有随机性，回答不能像人们所希望的那样，以确定的叙述形式给出. 例如，我们不能叙述为：

$$若\ \mathscr{N}>10^4,\qquad 则\ d<10^{-3}.$$

相反，回答只能用概率的术语来叙述：d 比某一数值 ε(比方说，$\varepsilon=0.001$)小的概率 $P(d<\varepsilon)$ 由下面不等式给出：

$$P(d<\varepsilon)>1-\frac{p(1-p)}{\mathscr{N}\varepsilon^2}. \tag{1.2-4}$$

我们仅仅引出这个结果，它的证明在本章末留作练习. 不过，我们想解释一下这个结果的意义和应用. 比方说我们需要75％的“置信水平”，意思是说我们希望 $P(d<\varepsilon)$ 至少是0.75. P 一经给定，式 1.2-4 就给出了所需试验的次数 $\mathscr{N}$ 和所希望的精度 ε 之间的关系. 这种关系由下面公式给出：

$$\mathscr{N}\varepsilon^2=pq/(1-P)=常数,$$

常数与试验次数及所希望的精度无关. 它决定于置信水平和先有的概率 p 和 $q=1-p$. 这个结果导致一重要结论，即 $(\mathscr{N}_h/\mathscr{N})$ 接近于 p 的精确度由下式给出：