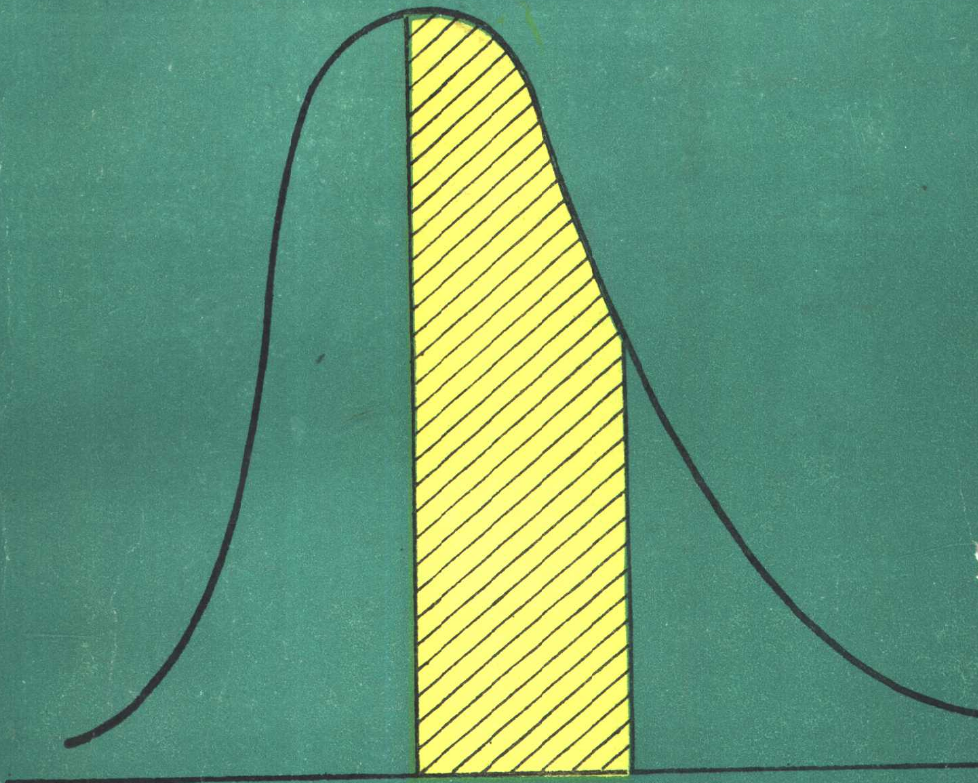
GAODENG SHUXUE



高等数学

（物理类专业用）

（第二版）

第三册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（物理类专业用）

（第二版）

第三册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

出版前言

本书是四川大学数学系编《高等数学》第三册的第二版．本版对第一版的内容作了适当调整，增加了习题答案．本书主要内容为行列式，矩阵，线性方程组，线性空间，线性变换，欧几里得空间，n 元实二次型；常微分方程；概率论的基本概念，随机变量及分布函数，随机变量的数字特征，极限定理等．

本书第一版由田景黄、周城璧两位同志编写，第二版由叶方怡，田涛杨秀清三位同志修订，可供综合大学和师范院校物理类专业作为教材．

高等学校教材

高　等　数　学

（物理类专业用）

（第二版）

第三册

四川大学数学系高等数学教研室　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 16.25　字数 390 000

1979年[illegible]月第1版　1990年5月第2版　1990年5月第[illegible]次印刷

印数 0001— 12 170

ISBN7-04-002843-[illegible]/O·902

定价 3.45 元

再版前言

本书自1978年陆续出版以来，收到许多读者的来信，对本书内容安排，习题配备等方面提出许多宝贵的意见，在此特向他们表示感谢.

这次修订，我们采纳了读者意见，修正、补充了部分内容(如概率论中补充了二维随机向量及其分布)和个别定理的证明，体系上也作了调整，增加了习题类型和数量. 书后附有习题答案.

本书是第一版第三册两个分册的合订本. 第一版由田景黄(常微分方程，线性代数两部分)，周城璧(概率论部分)两位同志编写，第二版由叶方怡(常微分方程部分)，田涛(线性代数部分)和杨秀清(概率论部分)三位同志修订，钟丽华同志在修改中作了不少工作.

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编　者

1989 年 8 月

目　录

第一篇　线性代数……………………………………………………1
√第一章　行列式……………………………………………………1
第一节　n阶行列式的定义……………………………………1
§1.1.1　二、三阶行列式的定义………………………………1
§1.1.2　n阶行列式的定义……………………………………4
第二节　行列式的主要性质……………………………………9 √
第三节　行列式按行(列)展开…………………………………18
§1.3.1　按一行(列)展开行列式……………………………18
§1.3.2　拉普拉斯定理…………………………………………22 √
习题…………………………………………………………………28
√第二章　矩阵代数…………………………………………………34 √
第一节　矩阵的概念……………………………………………34
第二节　矩阵的代数运算………………………………………36
§2.2.1　矩阵的加法与数乘……………………………………36
§2.2.2　矩阵的乘法……………………………………………39
√第三节　逆矩阵与矩阵的初等变换…………………………48
§2.3.1　逆矩阵…………………………………………………49 √
§2.3.2　矩阵的初等变换………………………………………54 √
第四节　转置矩阵与一些重要方阵……………………………59
§2.4.1　转置矩阵………………………………………………59 √
§2.4.2　几个重要的方阵………………………………………61
第五节　分块矩阵…………………………………………………65
习题…………………………………………………………………72
√第三章　线性方程组………………………………………………79
第一节　向量组与矩阵的秩……………………………………79
§3.1.1　向量组的秩……………………………………………79 √
√§3.1.2　矩阵的秩………………………………………………85 √√√
第二节　线性方程组的解法……………………………………91

§3.2.1　非齐次线性方程组的解法……………………………………91
§3.2.2　齐次线性方程组的解法……………………………………96
第三节　线性方程组解的结构……………………………………98
§3.3.1　齐次线性方程组的基础解系……………………………………98
§3.3.2　非齐次线性方程组解的结构……………………………………102
习题……………………………………104
第四章　线性空间……………………………………110
第一节　线性空间的概念……………………………………110
§4.1.1　线性空间的定义与例子……………………………………110
§4.1.2　子空间……………………………………114
第二节　n 维线性空间……………………………………115
§4.2.1　n 维线性空间的定义……………………………………115
§4.2.2　基底变换与坐标变换……………………………………119
习题……………………………………124
第五章　线性变换……………………………………127
第一节　线性变换的定义……………………………………127
第二节　n 维线性空间 V 中线性变换的矩阵……………………………………130
§5.2.1　线性变换在一个基底下的矩阵……………………………………130
§5.2.2　线性变换在不同基底下矩阵之间的关系……………………………………136
第三节　矩阵的对角化……………………………………138
§5.3.1　矩阵的特征根与特征向量……………………………………138
§5.3.2　矩阵的对角化……………………………………146
习题……………………………………152
第六章　欧几里得空间……………………………………156
第一节　欧几里得空间……………………………………156
§6.1.1　向量的标准内积……………………………………156
§6.1.2　标准正交基底……………………………………160
第二节　正交变换……………………………………165
习题……………………………………167
第七章　n元实二次型……………………………………170
第一节　n 元实二次型及其标准形……………………………………170
§7.1.1　n 元实二次型的定义……………………………………170

§7.1.2 n元实二次型的标准形……173
第二节 正定二次型……181 √
√第三节 用正交变换化二次型为标准形……185 √
习题……194

第二篇 常微分方程……197

第八章 一阶常微分方程……197
第一节 一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 解的存在与唯一性定理……197
第二节 未解出导数的一阶方程 $F(x,y,y')=0$……208
习题……216

第九章 高阶常微分方程……218
第一节 一般概念……218
第二节 几类特殊的高阶方程……219
第三节 n阶线性微分方程……224
§9.3.1 n阶线性微分算子……225
§9.3.2 线性齐次方程的通解……226
§9.3.3 降阶法……235
§9.3.4 线性非齐次方程的通解……237
习题……241

第十章 常系数线性微分方程……243
第一节 常系数线性齐次方程……243
第二节 常系数线性非齐次方程……246
第三节 尤拉方程……250
第四节 常系数线性方程的应用举例……252
§10.4.1 振动问题……252
§10.4.2 双回路电路……261
习题……263

第十一章 微分方程组……265
第一节 标准方程组……265
第二节 首次积分……269
第三节 线性方程组的理论……278
§11.3.1 线性齐次方程组……279
§11.3.2 线性非齐次方程组……282

第四节　常系数线性方程组……284
习题……292
第十二章　微分方程的级数解法和数值解法……294
第一节　级数解法……294
§12.1.1　一阶方程的级数解法……294
§12.1.2　二阶线性方程的级数解法……296
第二节　数值解法……305
习题……310
第十三章　一阶偏微分方程……311
第一节　偏微分方程的基本概念……311
第二节　一阶线性及拟线性偏微分方程……313
第三节　法夫(Pfaff)方程与一阶相容偏微分方程组……321
第四节　一阶非线性偏微分方程……329
习题……332
附录　常系数线性非齐次方程的算子解法……333
习题……344
第三篇　概率论……345
第十四章　基本概念……346
第一节　随机事件及其运算……346
§14.1.1　随机试验……346
§14.1.2　随机事件……347
§14.1.3　样本空间……347
§14.1.4　事件的关系与运算……348
第二节　频率的稳定性与概率……352
§14.2.1　事件的频率……352
§14.2.2　概率定义……353
§14.2.3　概率的主要性质……355
第三节　古典概型……357
§14.3.1　古典概型……357
§14.3.2　古典概率……358
第四节　条件概率　独立性……362
§14.4.1　条件概率……362

§14.4.2 概率的乘法公式……365
§14.4.3 事件的独立性……366
第五节 全概率公式 贝叶斯(Bayes)公式……370
§14.5.1 全概率公式……370
§14.5.2 贝叶斯(Bayes)公式……372
第六节 独立试验概型……373
习题……377
第十五章 随机变量及分布函数……382
第一节 随机变量的概念……382
第二节 离散型随机变量的概率分布……384
§15.2.1 离散型随机变量概率分布的概念……384
§15.2.2 几个常见的离散型分布……387
第三节 连续型随机变量的概率分布……391
§15.3.1 连续型随机变量的概率密度……391
§15.3.2 几个常见的连续型分布……394
第四节 随机变量的分布函数……395
§15.4.1 分布函数概念……395
§15.4.2 分布函数的基本性质……398
第五节 正态分布……400
第六节 随机变量函数的分布……403
§15.6.1 离散型随机变量函数的分布……403
§15.6.2 连续型随机变量函数的分布……404
习题……408
第十六章 多维随机向量及其分布……413
第一节 多维随机向量的概念……413
第二节 二维随机向量的概率分布……414
§16.2.1 二维离散型随机向量的概率分布……414
§16.2.2 二维连续型随机向量的概率密度……415
第三节 二维随机向量的分布函数……418
§16.3.1 分布函数概念……418
§16.3.2 分布函数的基本性质……419
第四节 边缘分布……421
第五节 条件分布……425

§16.5.1 离散型随机变量的条件分布……425
§16.5.2 连续型随机变量的条件分布……426
第六节 相互独立的随机变量……429
第七节 二维随机向量函数的分布……432
§16.7.1 二维离散型随机向量函数的分布……432
§16.7.2 二维连续型随机向量函数的分布……433
习题……439
第十七章 随机变量的数字特征……445
第一节 数学期望……445
§17.1.1 数学期望的概念……445
§17.1.2 随机变量函数的数学期望……449
§17.1.3 数学期望的性质……450
第二节 方差……452
§17.2.1 方差的概念……452
§17.2.2 方差的性质……456
第三节 二维随机向量的协方差 相关系数……458
§17.3.1 二维随机向量的协方差……459
§17.3.2 相关系数……459
第四节 矩 协方差矩阵……463
§17.4.1 随机变量的原点矩与中心矩……463
§17.4.2 二维随机向量的混合矩 协方差矩阵……464
习题……465
第十八章 极限定理……469
第一节 大数定律……469
第二节 中心极限定理……474
习题……479
习题答案……481
附表1 泊松分布表……507
附表2 标准正态分布表……509

第一篇 线性代数

第一章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具. 同时它在数学的其他分支及物理、力学等许多科学领域中也有广泛的应用. 读者熟悉的二、三阶行列式为我们学习 n 阶行列式的知识做了一定的准备, 因此我们把学习 n 阶行列式的定义、性质及计算方法作为本章的首要内容.

第一节 n 阶行列式的定义

§1.1.1 二、三阶行列式的定义

为了把二、三阶行列式推广到 n 阶行列式, 我们先看看二、三阶行列式的一些共同特点, 以便给 n 阶行列式的定义提供某些依据. 为了叙述的方便, 我们将二、三阶行列式写成下面的规范形状, 并利用"对角线法则"将其展开.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{2}$$

这里我们用a_{ij}($i,j=1,2$ 或 $1,2,3$)表示位于第 i 行，第 j 列处的数，我们称 a_{ij} 为行列式的元，它的第一个足标 i 称为行标，第二个足标 j 称为列标. 从(2)易知三阶行列式有下列几个特点：

第一，三阶行列式是 $3!$ 个项的代数和.

第二，它的每项都是行列式中三个元的乘积，这三个元恰好是每行每列各一个.

第三，每项都带有确定的符号.

我们把(2)中每项的三个因子按它们在行列式中行的顺序排列成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{3}$$

即每项三个元的行标恰好按自然数顺序排列成123，而三个元的列标排列成 $j_1j_2j_3$，构成自然数 1,2,3 的一个排列. 例如，按此方法写出(2)式中六个项的列标排列

123; 231; 312 和 321; 213; 132. 这恰好是 1,2,3 所能构成的一切排列，共 $3!=6$ 个. 其中前面三个排列对应的项带正号，后面三个排列对应的项带负号. 为了说明各项的符号与其列标排列的关系，我们引入下面的术语.

定义 1 对 n 个不同自然数(可以不必是前 n 个自然数)的一个排列，若某个数字的右边有 r 个比它小的数字，则说该数字在此排列中有 r 个反序. 一个排列中所有数字的反序之和称为该排列的反序数. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

例如

$$\tau(31254)=2+0+0+1+0=3,$$

$$\tau(12345)=0,$$

$$\tau(315)=1+0+0=1,$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

显然，对任何一个排列，最右边一个数的反序都是零．由 n 个不同自然数组成的一切排列(共$n!$个)中，唯一一个反序数等于零的排列是按自然数由小到大的排列．这个排列称为**标准排列**．例如 1234；2347 分别是两个标准排列．

定义 2　反序数等于奇数的排列称为**奇排列**．反序数等于偶数的排列称为**偶排列**．

标准排列是偶排列．

要确定一个排列的奇偶性，除直接计算该排列的反序数外还可用下列的方法：把一个排列中某两个不同数字的位置互换，其余的数字不动，就得到另一个排列．这一过程称为一次互换．例如，把排列 1324 中的 3，4 两个数字的位置互换得到排列 1423．这时我们看到经一次互换奇排列 1324 变成了偶排列 1423．同样地，偶排列 1423 经一次互换变成了奇排列 1324．一般地，有下面的结论

引理　排列经一次互换改变其奇偶性．

此引理容易理解，证明从略．由数学归纳法和引理不难证明

定理　$n(n\geqslant 2)$ 个不同自然数的任一排列必可经若干次互换变成标准排列，并且互换次数的奇偶性与该排列的奇偶性一致．

即奇(偶)排列必须经奇(偶)数次互换才能变成标准排列．反过来，标准排列经奇(偶)数次互换得到的排列必为奇(偶)排列．

例如排列$32154\xrightarrow{1,3}12354\xrightarrow{5,4}12345$，因此排列 32154 是偶排列(互换的方法与次数不唯一)．

还可证明 $n\geqslant 2$ 时，n 个不同自然数的一切排列中奇排列、偶排列各占一半．(见习题)

现在来看(2)中带正号的三项，其列标排列的反序数

$$\tau(123)=0;\tau(231)=2;\tau(312)=2$$

都是偶数．三个带负号的项其列标排列的反序数

$$\tau(321)=3;\tau(213)=1;\tau(132)=1$$

都是奇数．这样我们就完全清楚了展开式(2)的构成规律．现叙述如下：三阶行列式是一切这种项(3！项)的代数和，每项都是行列式中不同行不同列的三个元的乘积．若把每项写成式(3)的形状，则当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时该项带正号，为奇排列时带负号，记为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$．显然，二阶行列式(1)也有上述的特点．

有了上面的说明与记号，就可以把二阶行列式、三阶行列式的展开式(1)和(2)改写为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2}$，表示对 1、2 的一切排列取和．$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1、2、3 的一切排列取和．

有了以上讨论，读者不难理解 n 阶行列式的定义．

§1.1.2 n 阶行列式的定义

定义 1 由 n^2 个数(实数或复数)排成一个 n 行 n 列的表，并在两边各画一条竖线的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(a_{ij} 表示位于第 i 行、第 j 列处的数，称为 n 阶行列式的元．)所表

示的数称为 n 阶行列式. 这个数（即 n 阶行列式）是所有这种项($n!$项)的代数和: 每项都是 n 阶行列式中 n 个元的乘积, 这 n 个元恰为每行每列各取一个元; 每项所带的符号这样来确定, 当每项中的 n 个元按行的自然数顺序排列成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 时, 相应的列标为偶排列时带正号, 为奇排列时带负号, 即每项应带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 用式子表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \quad (4)$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列取和.

我们称(4)式为 n 阶行列式的展开式.

由定义 1 推知, n 阶行列式是$n!$个项的代数和, 当 $n\geqslant 2$ 时其中一半项带正号, 另一半项带负号. 二阶行列式、三阶行列式用定义 1 与用对角线法则计算的结果是一致的. 一阶行列式由一个数(元)构成, 它的值就等于这个数本身. 今后我们用符号 $\det(a_{ij})$ 表示以 a_{ij} 为元的 n 阶行列式, 在不混淆时也常用 $|A|$, $|B|$ 等记号表示 n 阶行列式.

n 较大($n>3$)时, 由于$n!$是一个很大的数(例如 $4!=26$, $5!=120,\cdots$), 此时用定义求行列式的值, 在一般情况下是十分困难的. 下面举两个特殊形状的行列式, 并用定义 1 计算它们的值.

例 1 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

这个行列式的特点是在元 a_{11} 到 a_{nn} 所成的对角线(称为行列式的主对角线)以下的元全为 0,即当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$.

解 由于这个行列式中有众多的元为 0, 为了减少计算过程,只需找出它的一切非零的项及其所带符号即可. 按行列式的定义,非零项的 n 个元在第一列中只能取 a_{11}(否则该项为 0),第二列中只能取 a_{22},第三列只能取 a_{33},……,第 n 列必取 a_{nn} 为因子. 于是,此行列式除乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ 外, 其余一切项均为零. 又因为它的列标排列的反序数 $\tau(123\cdots n)=0$, 故它带正号. 所以行列式的值为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

这个行列式称为右上三角形行列式, 或简称为上三角形行列式. 以上说明: 上三角形行列式的值等于其主对角线上各元之积.

例 2 求右下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值. 这个行列式的特点是,当 $i+j\leqslant n$ 时,$a_{ij}=0$.

解 同例 1 的讨论类似,除第一行取 a_{1n}, 第二行取 a_{2n-1}, 第三行取 a_{3n-2},…,第 n 行取 a_{n1} 为因子的项

$$a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1}$$

外,其余一切项均为零,又它带的符号为

$$(-1)^{\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 1]}=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

因此有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

当 $n=4$ 时，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{4\cdot 3}{2}}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

$$=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

这说明了计算二阶行列式、三阶行列式的对角线法则，对四阶以上的行列式不适用.

在举下面的例子之前，我们提醒读者注意，行列式的元的行标与列标不一定用前 n 个自然数表示.

例如

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

$|B|$ 的元由 $|A|=\det(a_{ij})$ 中取出位于第二、三、五行与第一、二、四列相交处的元构成. $|B|$ 中每个元的足标分别表示它们在 $|A|$ 中的位置.

由行列式的定义有

$$|B|=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{2j_1}a_{3j_2}a_{5j_3}.$$