

# 能量与物质的转移理论

A. B. 雷柯夫 Ю. A. 米哈依洛夫

科学出版社

# 能量与物质的转移理论

A. B. 雷 柯 夫 著  
Ю. А. 米哈依洛夫

夏 彦 儒 等譯  
徐 益 謙

夏 彦 儒 校訂

科学出版社

1962.6.26

А. В. ЛЫКОВ, Ю. А. МИХАЙЛОВ  
ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ВЕЩЕСТВА

Издательство Академии наук БССР

Минск 1959

內 容 簡 介

本书专論热轉移和物质轉移現象的理論。在不可逆过程热力学的基础上导出了热与物质轉移的微分方程組。用有限积分变换的方法得出对简单物体(平板、圓柱和球体)在第二类和第三类边界条件下的解。所得的解可以用来計算气体混合物及分子溶体中的热扩散、干燥、气化、燃烧等过程。

本书对从事热工方面的工程技术及研究人員有参考价值,亦可作为高等学校热能专业学生的参考书。

能量与物质的转移理论

А. В. 雷 柯 夫 著  
Ю. А. 米哈依洛夫

夏彦儒 徐益謙 等譯

夏 彦 儒 校訂

\*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

\*

1962 年 4 月第 一 版

书号: 2501 字数: 243,000

1962 年 4 月第一次印刷

开本: 850×1168 1/32

(京) 0001—7,250

印张: 9 5/16

定价: 1.35 元

## 序 言

很多热工和电工过程之研究都牵涉到能量、物质和电的分子转移问题之求解。在固体中的能量、热量和物质的分子式交换都遵守简单的线性规律。例如导热式的热转移可以用傅里叶的线性规律来描写：单位热流与温度梯度成正比。金属内的电转移遵守欧姆线性规律：单位电流与电位梯度成正比。物质的分子转移可用扩散定律来描写：单位质流与浓度梯度成正比，等等。

在这些线性规律的基础上导出了对应的微分方程（导热、导电、扩散）。在一定的初始条件和边界条件下对这些方程式求解是相当困难的。所谓初始条件就是表征着物体最初状态那些条件；所谓边界条件就是表征着物体表面与周围介质之间的相互作用那些条件。因此从十八世纪末年起一直到现在这个期间内发展了解导热、导电和扩散微分方程的各种方法。

由于实验方法的发展，人们发现各种转移现象是相互联系着的。举例来说，由于浓度而在气体混合物内发生的等温扩散会引起热转移而形成温度梯度（杜佛效应）。反过来，气体混合物中的导热式热转移会引起物质转移（热扩散或梭列效应）。热转移与电转移之间也有这种相互性。因此导出对应微分方程时的出发定理现在将利用不可逆过程热力学的方法来重新考虑。

作为出发点的转移方程式，采用翁沙格线性方程组来代替孤立的，互不联系的热转移、电转移和物质转移线性方程式。在翁沙格线性方程组中每一种转移都决定于直接效应和附加转移现象的作用。这些翁沙格线性方程式导致关于热、电和物质的分子转移的，相互联系的微分方程组。因此就发生了找出如何解这个微分方程组的这个重要问题。与建立导热或扩散的数学理论这个问题比较起来，前者更为困难。

这本书致力于建立能量、热量和物质轉移的解析理論，就是說，創造不可逆过程热力学的解析理論中最重要部門之一。

大家知道，在参考文献中沒有这一类的著作。这本书是根据作者們的著作写成的。

本书的第一部份致力于說明轉移的热力学現象和导出毛細管多孔物体中的热質交換微分方程組。

本书第二部分致力于在各种边界条件下求解热質交換微分方程組。这些解可以运用来选择过程的最佳情况；利用它們可以求給定形状的物体內轉移位的分布，同时計入各現象的相互影响（不稳定的温度分布和結合物質的轉移位的分布）。伴随着这些問題的解，也作了分析来闡明过程的物理本質并尽可能地用图和表來說明。书中广泛地运用了相似原理这个工具，因此各热質交換方程式的解，大多数写成准数形式。书中給出各相似准数之間的相互关系。

大家都知道工程師們运用数学物理方法来解决工程上的問題时发生多么大的困难。因此在这一部分中主要地着重于解具体問題的技术和方法而略去这些問題的严格数学研究。为了这个目的，书中詳細地分析了用詳細的交換方法求解某些簡單的热質轉移理論問題的过程，以便工程師們掌握計算技术。

在最后一部分中給出許多問題的解；在这些問題中物质轉移在某些热力学动力的影响下进行，其中包括总压力梯度的影响。这些关于結合物質的分子-莫尔轉移的混合問題对在对毛細管多孔物体以強烈的工艺过程来作热处理时是有实际用处的。

书中有关于主要解和参数系数的大量原始表格。因此这本书不只是对物理学家和力能工作者有用，更广泛的讀者亦可感到兴趣。由于叙述之詳尽而有系統，工程師——研究工作者們可以接受此书并可成功地将解析的研究方法利用于現代技术中重要問題的求解。

在不可逆过程热力学的基础上进一步发展轉移現象理論并将它广泛地运用于生产过程中对社会主义生产的現代技术將是有

利的。

作者知道,正如每一个这种初次尝试一样,这本书具有許多缺点。因此讀者为进一步改善此书而提出的宝贵意見,作者将預先表示感謝。

# 目 录

|         |   |
|---------|---|
| 序言..... | v |
|---------|---|

## 第 一 章

### 分子轉移的基本定律和微分方程

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| § 1. 轉移位 .....                    | 2  |
| § 2. 能量、焓和物質質量轉移的微分方程.....        | 4  |
| § 3. 松散系內有相变化时热量轉移和物質轉移的方程式 ..... | 6  |
| § 4. 不可逆过程热力学的基本关系式 .....         | 10 |
| § 5. 翁沙格的綫性方程系 .....              | 11 |
| § 6. 焓轉移的微分方程 .....               | 13 |
| § 7. 热与物質在毛細管多孔物体內轉移的微分方程 .....   | 17 |

## 第 二 章

### 第三类边界条件下热与物質轉移位的不稳定場

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| § 1. 恆溫介質中热与物質轉移位的不稳定場 .....             | 29  |
| § 2. 热与物質轉移位的不稳定場。介質溫度是時間的綫性函数 .....     | 91  |
| § 3. 热与物質轉移位的不稳定場。介質溫度是時間的指数函数 .....     | 112 |
| § 4. 热与質轉移方程組的綜合解 .....                  | 119 |
| § 5. 热与質轉移的某些特例。热与質轉移方程組中极限变换的某些問題 ..... | 124 |
| § 6. 热交换与質交换相似准数对热与質轉移过程的影响 .....        | 142 |
| § 7. 湿料层中的热質交换 .....                     | 154 |

## 第 三 章

### 在第一类边界条件下热与物质转移位的不稳定场

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| § 1. 物体的质含量不变时,热与物质转移位的不稳定场 | 158 |
| § 2. 当物体的质含量不变而无相变时的热与物质转移  | 174 |
| § 3. 测定热与物质转移系数的方法          | 185 |

## 第 四 章

### 在第二类边界条件下热与物质转移位的不稳定场

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| § 1. 无限平板 ( $\delta = 0$ )       | 191 |
| § 2. 无限长的圆柱体 ( $\delta = 0$ )    | 196 |
| § 3. 圆球 ( $\delta = 0$ )         | 200 |
| § 4. 解的分析                        | 204 |
| § 5. 无限长的圆柱体 ( $\delta \neq 0$ ) | 205 |
| § 6. 圆球 ( $\delta \neq 0$ )      | 208 |
| § 7. 无限平板, 广义的第二类边界条件            | 209 |

## 第 五 章

### 二维热质转移位场

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 1. 有限平板, 第二类边界条件     | 217 |
| § 2. 二维平板, 第一类和第三类边界条件 | 221 |

## 第 六 章

### 具有能量和物质的分子转移及莫尔转移时的热质交换

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| § 1. 在第三类边界条件下能量与物质转移位的不稳定场 | 242 |
| § 2. 在第二类边界条件下能量与物质转移位的不稳定场 | 273 |
| § 3. 各相似准数对高强度的热质交换的影响      | 279 |
| 符号                          | 286 |
| 参考文献                        | 288 |

## 第一章

### 分子轉移的基本定律和微分方程

在作者們过去的著作中曾指出凡是热量、物質和流体的有秩序运动能量的分子轉移現象都可用能量传导的規律来解析地描述:就是說,表征着对应量的轉移那些单位能流<sup>1)</sup>都与能量浓度(每单位容积)的梯度成正比。并且比例系数(导能系数)等于分子扩散系数。在这些規律的基础上曾导出对应的轉移微分方程(导热方程,扩散方程,粘性流体运动方程)。

但是那些原始的綫性規律只是当轉移过程不强烈时才正确。如果轉移过程很強烈,就必须考虑到相互性。这就是說:質的轉移和有秩序运动能的轉移也影响到热的轉移。因此导出上述各微分方程时所根据的对应原理現在必須重新考虑。为了在分子轉移过程的解析描述上,作这样原則的改变,必須用严格的科学方法来考虑轉移現象的相互性。

荷兰和比利时的物理学家[翁沙格(Onsager),卜利戈新(Prigogine),得顧魯特(de Groot)]发展了这样一个方法,称为不可逆过程的热力学。它的特点是在熵轉移的基础上来描述任何量的轉移过程;熵的轉移单值地表征着复杂的,相互关联的分子轉移。

熵轉移的微分方程与能量轉移的微分方程不同——它含着在不可逆过程中生产熵的熵源。熵源是坐标和時間的函数。因此求解具有变值源汇的导热,这种微分方程对不可逆过程热力学理論的发展有重要的意义。

此外,关于轉移的热力学理論的主要关系式(绝对温度与单位

---

1) 每单位面积,每单位時間——譯者注。

体积中熵的变化速度之乘积等于流量与轉移的推动力的乘积之总和)就是确定热轉移位,物质轉移位和有秩序运动能的轉移位的原始关系式.

## § 1. 轉 移 位

首先談談轉移位.

位的基本公理式理論就是:在热力平衡状态时,各物体的位或物体各部分的位相等:

$$\Pi_1 = \Pi_2. \quad (1.1)$$

对应的位(热、电、物质)都是由較高的位向較低的位轉移:  
 $\Pi_1 > \Pi_2$ .

位的梯度称为热力推动力;例如电位梯度等于电場的強度.

能量轉移的量  $dE$  等于位与广义坐标变化  $dK$  的乘积,即轉移位必須滿足下列关系式:

$$dE = \Pi dK. \quad (1.2)$$

現在举几个例來說. 气体膨胀而增加体积  $dV$  时,克服外界压强  $p$  而作的膨胀功等于

$$dW = p dV. \quad (1.3)$$

因此,作机械功时的广义坐标是体积( $K = V$ ),而位是压强( $\Pi = p$ ).

导体在靜电場中以电位  $\varphi$  ( $\Pi = \varphi$ ) 加荷的功  $dW$  等于电位  $\varphi$  与电荷增量  $dq$  的乘积:

$$dW = \varphi dq. \quad (1.4)$$

在这里,广义的坐标是电荷量( $K = q$ ). 在热交换过程中,轉移的热量  $dQ$  等于温度  $T$  (导热式热轉移的能量轉移位)与熵增量  $dS$  (熵是广义坐标)的乘积:

$$dQ = T dS. \quad (1.5)$$

能量借质交换而轉移时,物质的质量  $\nu$  (以莫尔为单位)是广义坐标而对应的化学位  $\mu$  就是轉移位. 化学位确定于所研究的系与环境介质之間的热力联系情况.

对这一点詳細說明如下：

关于开系(有物质交换的热力系)的热力学第一定律方程是吉布斯方程：

$$dQ = TdS = dE + pdV - \sum_k \mu_k dv_k, \quad (1.6)$$

式中指数  $k$  代表参加质交换的第几种物质。

对于与环境介质能够有力的联系和热的联系的系，可能有下列四种联系情况<sup>1)</sup>：

а) 定容定熵关系,  $V = \text{常数}, S = \text{常数} (dV = 0, dS = 0)$ , 此处质的转移位为

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)_{v, s}; \quad (1.7)$$

б) 定压定熵关系,  $p = \text{常数}, S = \text{常数} (pdV = dpV; dS = 0)$ , 用  $H (H = E + pV)$  来代表焓, 则(1.6)式变为

$$\mu = \left( \frac{\partial H}{\partial v} \right)_{p, s}; \quad (1.8)$$

в) 定容定温关系,  $V = \text{常数}, T = \text{常数} (dV = 0, TdS = dTS)$ . 在这个条件之下,

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v, T}, \quad (1.9)$$

此处  $F$  是自由能,  $F = E - TS$ ;

г) 定压定温关系,  $p = \text{常数}, T = \text{常数} [pdV = d(pV), TdS = d(TS)]$ .

用  $\Phi$  来代表自由焓, 即

$$\Phi = H - TS = E + pV - TS,$$

则由(1.6)式得

$$\mu = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{p, T}. \quad (1.10)$$

因此质转移位确定于热力系与环境介质之间的热力关系；它等于

1) 假定除了1个之外,所有的  $v_k$  都是常数。

对应特性函数  $\psi$  对物质质量的导数

$$\mu = \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad (1.11)$$

在第一个情况中,特性函数是内能 ( $\psi = E$ ); 在第二种情况中,特性函数是焓 ( $\psi = H$ ); 以此类推.

## § 2. 能量、焓和物质质量转移的微分方程

如果对于总质量为  $M$  的系,按每单位质量来计,内能  $E$  和容积  $V$  (比能与比容),则对应的第一定律关系式对于封闭系和开系都相同:

$$dq = de + p dv, \quad (2.1)$$

式中  $v = \frac{V}{M}$  是比容,  $e = \frac{E}{M}$  是比能. 用总量  $Q, E, V$  来表示,则开系的关系式为

$$dQ = dE + p dV - h dM, \quad (2.2)$$

式中  $h$  是比焓,

$$h = e + p v, \quad (2.3)$$

$dQ$  是向热力系传入的总热量 ( $dQ = M dq$ ).

用  $j_q, j_m, j_e, j_h$  等来表示热量、物质、能量、焓等的单位流量,即

$$j_q = \frac{dQ}{A d\tau}; j_m = \frac{dM}{A d\tau}; j_e = \frac{dE}{A d\tau}; j_h = \frac{dH}{A d\tau}, \quad (2.4)$$

式中  $A$  是等位面 (即转移位相同的面) 的面积. 现在,根据 (2.2) 式,对定容 ( $V = \text{常数}$ ) 热质交换过程,可写

$$j_e = j_q + h j_m. \quad (2.5)$$

对定压过程 ( $p = \text{常数}$ ),根据 (2.2) 式,得

$$j_h = j_q + h j_m. \quad (2.6)$$

在定容条件下的能量转移微分方程就是烏莫夫 ( $V_{\text{МОБ}}$ ) 的能量运动方程. 根据能量守恒定律,可知能量在某被面积  $A$  所包围的容积内的增减是由于通过包围面的能量转移,即

$$\int_{(V)} \frac{\partial E_v}{\partial \tau} dV = - \oint_{(A)} (j_e)_n dA, \quad (2.7)$$

式中  $E_v$  是单位容积内的能量,  $\tau$  是时间, 指数  $n$  表示等位面的垂直线。

利用阿斯特罗格拉德-高斯变换 (Остроградский-Gauss), 由 (2.7) 式得能量转移的微分方程

$$\frac{\partial E_v}{\partial \tau} = -\nabla j_e \quad (2.8)$$

式中  $\nabla$  是散度符号, 即  $\nabla \equiv \text{div}$ 。由此, 能量的容积浓度的局部变化速度  $\frac{\partial E_v}{\partial \tau}$  与单位能流  $j_e$  矢量的散度成正比。

单位能流  $j_e$  等于能的容积密度  $E_v$  与分子转移的线速度  $w'$  的乘积, 即

$$j_e = E_v w' \quad (2.9)$$

对运动着的介质来说, (2.8) 式可写成下列形式:

$$\frac{dE_v}{d\tau} = -\nabla E_v w' \quad (2.10)$$

式中  $\frac{d}{d\tau}$  是全微分,

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + w \text{ grad} = \frac{\partial}{\partial \tau} + w \nabla,$$

式中  $w$  是介质的莫尔运动 (宏观运动) 速度。对于定压过程, 用焓转移的微分方程来代替能量转移的微分方程:

$$\frac{\partial H_v}{\partial \tau} = -\nabla j_h; \quad (2.11)$$

式中  $H_v$  是焓的容积浓度 ( $H_v = \frac{H}{V}$ )。

对于第  $k$  组分的物质转移, 它的微分方程可以由以下的分析而写出。在某面积所包围的容积内, 第  $k$  组分的容积浓度之变化 ( $\omega_k$ ) 是由于转移和第  $k$  组分物质的源或汇的作用而发生的。根据质量守恒定律并利用阿斯特罗格拉德-高斯变换, 得物质转移的微分方程

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \tau} = -\nabla j_{mk} - \sum_r W_{kr}, \quad (2.12)$$

式中  $j_{mk}$  是第  $k$  組分物质的单位流量;  $W_{kr}$  是物质汇的强度, 它表征着第  $k$  組分之轉变为第  $r$  組分(相变和化学变化)。

并且根据物质守恒, 有下列各等式:

$$W_{kr} + W_{rk} = 0; W_{kr} = -W_{rk} \quad (2.13)$$

将 (2.12) 方程系按  $k$  取总和至  $k = N$ , 得总质量的轉移微分方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = - \nabla \sum_{k=1}^N j_{mk}, \quad (2.14)$$

式中  $\omega$  是系内物质的容积浓度

$$\omega = \sum_{k=1}^N \omega_k. \quad (2.15)$$

容积内的相变化或化学变化并不改变热力系的总质量, 即

$$\sum_k \sum_r W_{kr} = 0 \quad (2.16)$$

由此, 系内总物质含量的变化只是由于物质的轉移。

### § 3. 松散系内有相变化时热量轉移和物质轉移的方程式

现在考虑松散系内有相变化时的热量轉移和物质轉移。

松散介质或毛细管-多孔物系含有物质的蒸汽(指数 1), 液体(指数 2)和固体(指数 3)状态(结合物质的三相系)。指数 0 代表除去结合物质后的松散介质(躯壳)。

结合物质的容积浓度  $\omega$  等于单位质含量与介质密度  $\gamma_0$  的乘积, 即

$$\omega = u \gamma_0; u = \sum_{k=1}^3 u_k \quad (3.1)$$

结合物质每一相的当地增量可以由于相变  $du_{kr}$  和轉移的结果  $du_{kf}$  而发生:

$$du_k = \sum_r du_{kr} + du_{kf}. \quad (3.2)$$

同时, 当物质由一个相  $k$  变到另一相  $r$  或有反向的相变时, 物质守

恆定律表现为

$$du_{kr} = - du_{rk}. \quad (3.3)$$

利用物質轉移的微分方程(2.12)和(2.14),得

$$\gamma_0 \frac{\partial u_k}{\partial \tau} = - \nabla j_{mk} + \sum_r W_{rk}, \quad (3.4)$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = - \nabla \sum_{k=1}^3 j_{mk} \quad (3.5)$$

式中  $W_{rk}$  是結合物質第  $k$  相的源的单位強度 (由第  $r$  相变为第  $k$  相):

$$W_{rk} = \gamma_0 \frac{\partial u_{rk}}{\partial \tau} \quad (3.6)$$

热力系与环境介质之間有定压关系时的热轉移微分方程可以由焓轉移的方程式(2.11)得出. 在松散介质和以三相状态与它結合的物質所形成的热力系中焓的容积浓度  $\gamma h$  的局部变化速度等于单位焓流的散度. 根据(2.6)式,单位焓流等于单位热流加比焓与单位质流的乘积:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \gamma_0 h_0 + \sum_{k=1}^3 \gamma_0 h_k u_k \right) = - \nabla \left( j_q + \sum_{k=1}^3 h_k j_{mk} \right). \quad (3.7)$$

令  $c_k$  代表定压比热,即

$$c_k = \frac{dh_k}{dt}, \quad c_0 = \frac{dh_0}{dt}, \quad (3.8)$$

式中  $t = T - 273$  是摄氏温度;又令  $c$  代表折合比热:

$$c = c_0 + \sum_{k=1}^3 c_k u_k; \quad (3.9)$$

则由焓轉移方程得到热轉移方程

$$c \gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \nabla j_q + \sum_{k=1}^3 \sum_{r=1}^3 h_k W_{kr}. \quad (3.10)$$

考虑一下当結合物質只有两相 (液相和气相) 这种特殊情况 ( $k = 1, 2$ ) 是意思的——这对应着摄氏温度为正值范围. 在这种情况下之下,热轉移方程变为

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\nabla j_q + \rho W \quad (3.11)$$

式中  $\rho$  是汽化潜热 ( $\rho = \rho_{21} = \rho_{12}$ ), 等于焓差 ( $\rho_{12} = h_1 - h_2$ ).

$W$  是液体的源或汇 ( $W = W_{12} = -W_{21}$ ).

如液体和蒸汽的转移是在毛细管作用和流体动力的作用下发生的 (物质按线性速度  $w_k$  作莫尔转移), 则(3.11)式的右边必须再添一项:

$$- \sum_{k=1}^2 c_k \gamma_k w_k \nabla t.$$

导出(3.11)式时, 曾利用了下列的关系式:

$$h_1 W_{12} + h_2 W_{21} = (h_1 - h_2) W_{12} = \rho W. \quad (3.12)$$

当蒸汽与液体在毛细管和多孔松散介质中有热力平衡时, 这个关系式就是正确的. 这种情况就是当液体和蒸汽运动得很慢时的实际情况.

物质转移的微分方程可写成:

$$\gamma_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\nabla j_1 + W_{21} \quad (3.13)$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\nabla j_2 + W_{12}$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla(j_1 + j_2); \quad (3.14)$$

为了简便起见, 略去了指数  $m$ .

同时应当看到在一般情况之下 (蒸汽和气体的压力近于大气压力), 蒸汽在多孔物体中的含量  $u_1$  与液体的含量  $u_2$  比较起来很小 ( $u_1 \ll u_2$ ). 因此当  $u_2$  不等于零 ( $u > 0$ ) 时, 可以近似地把多孔物体中结合物质的总含量  $u$  当作等于液体的含量  $u_2$  ( $u \approx u_2$ ).

对于毛细管多孔物体的干燥过程, 可以用物体含湿量的局部变化速度与一个相变准数  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ ) 来表示液体的源或汇如下:

$$W = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} \gamma_0 \quad (3.15)$$

这是因为蒸汽和液体并不由外源进入多孔性物体, 而湿物体内部蒸

汽之形成只是由于其中所含液体之汽化。此外,当湿物体被干燥时,假定  $u \doteq u_2$  并不引起多么大的误差。结合物质由第  $k$  相变到第  $r$  相时的相变准数  $\epsilon_{kr}$  可用以下的关系式来下定义:

$$\epsilon_{kr} = \frac{du_{kr}}{du_k}. \quad (3.16)$$

如蒸汽流和液体流的矢量  $j_1$  和  $j_2$  同向(平行),则相变准数

$$\epsilon = \frac{j_1}{j_1 + j_2}. \quad (3.17)$$

因此,相变准数确定多孔湿物体中蒸汽流量对蒸汽与液体的总流量之比值。如  $\epsilon = 1$ , 则物质的转移只是由于蒸汽的转移 ( $j_2 = 0$ )。在这种情况下,可用 (3.14) 式为物质转移的微分方程。如  $\epsilon = 0$ , 则物质转移只是由于液体的转移 ( $j_1 = 0$ )。在这种情况下,质源不存在 ( $W = 0$ ) 而 (3.13), (3.14) 两式变为物质转移的唯一方程式。如  $\epsilon$  在  $0 < \epsilon < 1$  范围内,则这两个方程式都可利用。对于正在化冻和正在冻结的地土,相变准数只能用于固相 ( $k = 3$ ), 因为冰并不能由外源进入地土,而只是靠液体之冻结成冰(转化 23)或是靠反升华(转化 13)来形成。

常采用一个冻结系数,它等于冰的质量与结合物质的总质量之比。我们用下述的符号来代表冻结系数:

$$b = \frac{u_3}{u} \approx \frac{u_3}{u_2 + u_3}, \quad (3.18)$$

因为蒸汽含量远小于总含量。

如地土内没有冰 ( $u_3 = 0$ ), 则系数  $b = 0$ 。如水全变成冰, ( $u_2 = 0$ ), 则  $b$  等于 1。在大多数的情况下,系数  $b$  常小于 1 ( $0 < b < 1$ )。对固相来说 ( $k = 3$ ), 转移微分方程 (3.4) 可以简化, 因为冰不能进出 ( $j_3 = 0$ ):

$$\gamma_0 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} = W_{13} + W_{23}. \quad (3.19)$$

利用 (3.18) 式并使  $u_1 = 0$ , 则液体的转移微分方程可写成:

$$\frac{\gamma_0}{1-b} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\nabla(j_1 + j_2). \quad (3.20)$$