热传导及其数值分析

俞昌铭　　编著

清华大学出版社

内 容 简 介

全书分六章，介绍了导热问题的数学描述；薄壁物体温度响应；一维、二维稳定导热与不稳定导热，以及它们的数值分析。对于辐射条件下强烈非线性问题、物体几何形状复杂及变物性等问题作了较深入的分析。在例题中给出了用 BASIC 语言与 FORTRAN 语言编写的程序，便于自学。

本书可供从事动力、机械、航空、冷冻、能源等领域工程科技人员参考，也可作为大学有关专业师生的教学参考书。

热传导及其数值分析

俞昌铭　编著

王补宣　审订

☆

清华大学出版社出版

北京　海淀　清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 • 各地新华书店经售

☆

开本：850×1168 1/32　印张：15.5　字数：415 千字

1981 年 12 月第一版　1982 年 4 月第一次印刷

印数 1～10000

统一书号：15235·24　定价：2.00 元

序

传热是普遍的自然现象。只要有温度差存在，热量的传递就是不可避免的。或者有热量输入或输出时，总会引起温度响应，造成温度的不均匀分布。在密实的固体内部，热量的传递只能依靠热传导（通常简称“导热”）的方式，但在边界表面上还可以有对流传热、辐射传热或者两者兼而有之。

工程上往往涉及到诸如加热、冷却、融化、凝固、隔热保温等工艺过程和对材料的热加工处理，需要控制固体壁的表面温度、以防止过热和出现过度的温度变异所造成的热应力，或者需要预测固体内部温度分布、以正确拟订材料热处理的工艺条件。

《热传导及其数值分析》，是作者俞昌铭同志根据教学与科研实践的心得，在 1979 年为清华大学研究生开课时自编讲义的基础上经过改写，又在 1980 年继续作为研究生和进修班的教材试用后，再次修订而成。内容精炼，注意思维逻辑，突出分析问题的基本思路。本书不同于高等学校现有本科《传热学》课程的教材，而是专门针对热传导部分从理论上加深，由浅入深、深入浅出地介绍求解各类热传导问题的数学方法，引进现代计算技术，着重阐明利用电子计算机的数值解法，讨论数值计算的精度问题。还详举实例，示范地启发读者如何从复杂的实际情况中作出容许的简化、得到合理的工程计算解。在篇幅有限的前提下，本书注意利用数值解法，处理边界条件有热辐射参与作用的热传导问题。这不仅在宇航中、在大地融冻的自然变化中常遇到日照的影响，而且对各种工业炉内工件和材料热处理的过程中，也同样会遇到热辐射参与作用的边界条件，由于数学模型的强烈非线性化而使定解复杂化。利用计

算机作为计算工具，本书对复杂形状的物体、材料热性随温度变化等情况下的热传导问题也分别作出了讨论。所有这些，不但对有关专业的研究生培养是适用的，对于为本科高年级学生开设选修课也将是有用的，还可供高等学校教师为丰富本科《传热学》课程有关教学内容作参考和感兴趣的工程技术人员作为工作参考书。愿提出来作为本书的简单介绍。

任何一种新的尝试，总难免会有某些局限。本书自然不可能例外，也要在实际使用中经受考验和改进，以便在不断提高的过程中发挥应有的作用。

王 补 宣

1981 年 5 月

前　　言

热传导也称导热，是传热学的重要分支。它主要研究固体内部的热量传输，分析固体表面与环境进行热交换时，其内部的温度变化规律。

研究各种导热现象的规律与发展国民经济有着直接的联系。例如，研究大地的温度变化；食品的冷冻过程；金属材料在铸造、焊接、锻压等热加工过程中内部温度分布；材料结构热应力计算；各种工程材料热物理性能的实验测定，以及各种接触式温度传感器数学模型的分析等问题的解决，紧密依靠导热理论的指导。学习与研究导热的重要意义还在于：它是深入学习与研究各种传热现象乃至工程热物理各专门学科的重要基础之一。鉴于以上认识，近年来我们在常规的传热学课程基础上，又单独开设了热传导课程。此书是作者 1978 年以来为研究生和进修生讲课时所用讲义改编而成的。此书可作为各有关专业大学生、研究生学习传热学或其它与导热有关课程的教学参考书，也可作为具有大学文化程度的工程科技人员自学用书。

在编写过程中，注意了以下几点：着力讲清解决问题的基本思路；注意物理概念与数学推导的结合；遵循由浅入深的认识规律；推广计算技术的应用；以及密切理论与实际的联系。它们体现在全书各章节的安排：

第一章从基本物理概念出发，说明如何将一个实际的导热问题表示为一个恰当的数学问题，一般是微分方程的定解问题。

以后各章围绕着不同实际背景介绍定解问题的简化与求解。

第二章讨论薄壁物体温度响应。这里忽略了物体内部温度分布而只研究物体在一定外界条件下如何随时间而变化。与此相应，在数学上讨论常微分方程的初值问题，介绍这类问题的数值分析方法。

第三章讨论一维稳定导热，温度只是一个空间坐标的函数，相应的数学问题为常微分方程两点边值问题，介绍了求解这类问题的数值分析方法。

第四章讨论二维稳定导热，温度是两个空间坐标的函数。相应的数学问题为偏微分方程边值问题。以此为背景详细介绍了有限差分的各种方法及简要介绍有限元素法，这一章中还介绍了求解线性代数方程组的迭代法与直接法。

第五、六章讨论不稳定导热，温度既是空间坐标又是时间坐标的函数。相应的数学问题为偏微分方程的混合问题。第五章采用分析求解的方法，着重阐述常用的分离变量法；结合半无限大物体简要介绍热源函数法与 Laplace 变换的方法。第六章采用数值求解的方法，介绍了各种差分格式，并讨论了它们的计算精度与稳定性条件。

由于把计算机技术引入传热学教学过程，不仅使导热问题的求解增添了新的方法，而且使课程内容发生了一些新的变化，其中把导热问题与辐射问题更好地联系起来就是一例。本书在可能的范围内，比较详细地介绍了在辐射边界条件下(强烈的非线性)各类导热问题的求解。另外，对复杂形状物体、材料热物性随温度而变化等问题也都作了讨论。为了普及计算机技术，便于读者自学，在讲到数值解的有关章节中，给出了计算例题。从问题的数学模型到离散化处理，从计算方法选择到程序设计，都作了较详细说明，最后给出用 BASIC 语言与 FORTRAN 语言编写的程序清单及计算结果。因此，对于在数值计算方面尚缺乏足够基础的读者，阅读此书也不会有很大困难。

由于编写过程中注意了物理与数学的结合，而不是单纯地套用现成的数学结论，因此，对一般只具备微积分知识的读者，通过自学即能掌握本书的主要内容。另外，作者根据自己教学实践的体会，运用线性代数的有关知识讨论了各向异性材料中的导热规律与二维稳定导热问题的正确提法等问题。这些把线性代数知识与物理内容结合起来的作法，只是一种尝试，目的是向已经具备线性代数知识的学生们提供把基础理论应用于分析实际问题的例子。

在本书的编写与出版过程中，得到了王补宣教授的热情指导与帮助，并为全书作了认真审定。清华大学工程热物理教研组的同志们给予支持与关心。赵士怀、魏敦崧同志为本书部分章节作了审阅。德强同志协助作者用 FORTRAN 语言编写了四个程序。在此向他们表示衷心感谢。

由于作者水平所限，时间又仓促，书中错误在所难免，欢迎读者批评指正。

作　者

1981 年4月

目　　录

第一章　导热问题概述

本章将围绕着如何把一个导热问题表示成一个恰当的数学问题而展开。从温度场、热流向量等基本概念出发，介绍了支配导热现象的基本定律——Fourier 定律；在能量守恒原则基础上，建立了联系空间各点温度、包括随时间改变时的导热方程；阐述了导热问题的各种边界条件，它们的作用是使导热现象在特定条件下能唯一地被确定下来。本章还扼要地指出了，一个数学上的导热方程边值问题与实际存在的导热问题之间还有多大差距，以及如何处理这种差距。最后，简要说明解决导热问题的一般方法。

§ 1.1　温度场与热流场

（一）温度场

温度是表示物体冷热程度的物理量，如指一块烧红的钢为1100℃，冷冻的食物为 -10℃ 等等，这些已为我们所熟知。然而，在实际中遇到的问题往往不是用一个温度值就能表示物体的冷热状态，而必须说明物体内部各处的温度。为此，引入了“温度场”的概念。

温度场是以某一时刻在一定空间内所有点上的温度值来描述的。它可表示为空间坐标与时间坐标的函数。常用的空间坐标有三种，如图 1.1 所示，直角坐标系中用 x，y，z；柱坐标系中用 r，φ，z；球坐标系中用 r，φ，ψ。时间坐标常用 τ。因此，一定空间内的温度场可表示成函数形式：

$$T=f(x,\ y,\ z,\ \tau)$$

或
$$T=f(r,\ \varphi,\ z,\ \tau)$$

或
$$T=f(r,\ \varphi,\ \psi,\ \tau)$$

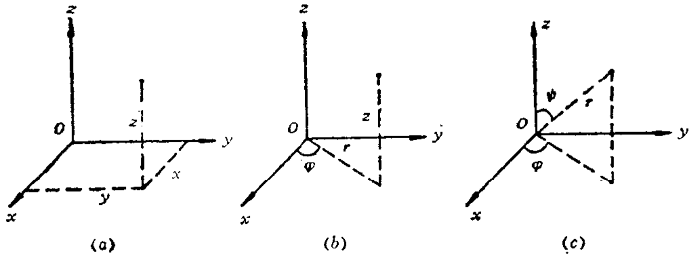

图 1.1 各种坐标系

(a) 直角坐标系；(b) 柱坐标系；(c) 球坐标系。

温度是标量，温度场也就是标量场。

在温度场所处的范围内，任何地点的温度值和该地点几何位置相对应。温度场内任一点 P，它的周围有若干个点（理论上无穷多个点）P_i，$i=1$，2，…。P_i 点与 P 点可以对应着不同的温度值。如果移动 P_i，使它们逐渐接近 P 点，即 $\overline{P_iP}$ 都趋于零，若 P_i 与 P 的温度差也都趋于零，则称温度场在 P 点连续。如果有一个温差值不趋于零，则称温度场在 P 点不连续。将以上分析推广到一个区域，若区域内所有点上的温度均连续，则称温度场在此区域内连续。

一般而言，均匀物体内部的温度场都是连续的温度场。在以后讨论中，若不特别说明，就认为物体内的温度场是连续的。但是，如果物体内部有缝隙，或物体是由材料不同的两部分组合而成，则在缝隙处，或两部分的交界面处，温度可能发生突变，温度场在此处不再是连续的了。

关于温度场的概念还有一点需要强调。如前所述，温度是对空

间的点来定义的，一个点对应一个温度值。但从热力学的观点出发，温度却是对一个由大量物质组成的体系来定义的，一个点的温度毫无意义。这样，从场的角度与从热力学体系的角度对温度的认识产生了矛盾。为了调和这种矛盾，对温度场中的点应作这样的理解：从物体的整体来看，这个点是足够的小，小到它所占据的体积对于物体的体积来说，可忽略不计；而从物体内部分子运动角度来看，这个点又是足够的大，大到它所包含的大量分子足以克服温度值的涨落现象，这个由大量分子组成的点是一个平衡的热力学体系。总之，从整体而言，各处温度是不同的，热是不平衡的。而从局部而言，由足够多分子构成的一个点可用一个温度来表示，热是平衡的。我们称由这样的点所组成的温度场为处于局部的热平衡。

在传热学范围内研究导热现象，就是研究这种局部处于热平衡而整体不平衡的温度场的性质。

若温度场各点的温度值均不随时间而变化，则称该温度场为“稳定”温度场，否则，为“不稳定”温度场。

若温度场只是一个空间坐标的函数，则称一维温度场。例如，

$$T=f(x)\ ,\qquad T=f(r)$$

或

$$T=f(x,\ \tau)\ ,\quad T=f(r,\ \tau)。$$

若温度场是两个空间坐标或三个空间坐标的函数，则称二维温度场或三维温度场。

在实际计算中，常用的有四种温度单位：Kelven 温度（K）；摄氏温度（℃）；华氏温度（°F）；Rankine 温度（°R）。它们之间有着确定的关系，如图 1.2 所示。如果读者希望得到它们之间的准确换算关系，可查看文献［1］。

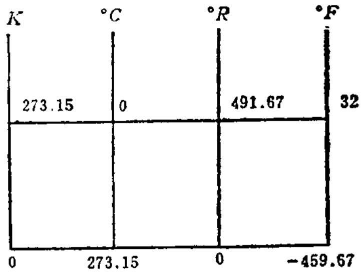

图 1.2　四种温度对应关系

为了更具体地描述温度场的特性，下面介绍等温面与温度梯度。

（二）等温面与温度梯度

1. 等温面

物体内温度相同各点的集合所构成的面称为等温面。图 1.3 为一温度场的截面，在此截面上，等温面被切割为等温线，分别对应于 T，$T+\triangle T$，$T-\triangle T$ 等等。由于物体内一个点上只能有一个温度值，它不可能同时属于两个等温面，所以，不同等温面不可能相交。另外，等温面也不可能在场内终止，它或者是伸展到物体的边界，或者自身形成封闭曲面。

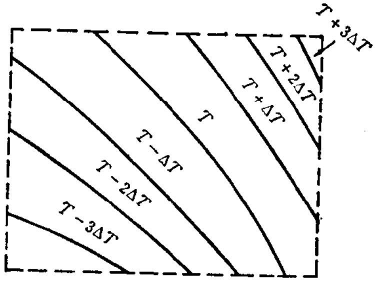

图 1.3　等温面

2. 温度梯度

若物体内温度场在某点 P 处是连续的，它从属于某一个等温面，则从 P 点出发除了沿等温面之外，在其它方向上温度都是变化的。既然如此，在 P 点应该存在这样一个方向，在这个方向上的温度变化率（单位距离上的温度变化量）比其它方向的温度变化率都大。这样，我们可以在 P 点定义一个向量，此向量的方向朝着温度最大增长率的方向（符号取正），其大小为单位距离上温度的变化量，该向量称作温度场在 P 点的“梯度”，简称温度梯度，用 gradT 表示。它在直角坐标系（x，y，z）三个坐标轴上的投影为 $\frac{\partial T}{\partial x}$、$\frac{\partial T}{\partial y}$、$\frac{\partial T}{\partial z}$。且

$$\mathrm{grad}T=\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

其中 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 为 x，y，z 坐标轴上的单位向量。过 P 点沿着

其它任意方向 l，若 l 与温度梯度方向夹角为 θ，则此方向上的温度变化率为：

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \mathrm{grad}T \cdot \vec{l} = |\mathrm{grad}T| \cos\theta \tag{1.1.1}$$

其中 $\vec{l}$ 是 l 方向上单位向量。

在连续温度场内的每一点上都可以定义温度梯度向量，这些温度梯度向量的全体构成温度梯度向量场。

（三）热流向量

由于过 P 点沿非等温面方向的温度是变化的，因此，在这些方向上有热量传递。若把单位时间单位面积上传递的热量定义为热流，并记作 q*，则在不同方向上，有不同的热流。与定义温度梯度的方法一样，可以在 P 点定义热流向量。此向量的方向是热流最大的方向，其大小等于沿着这方向单位时间单位面积流过的热量。热流向量记作 $\vec{q}$。

在连续温度场内每一点上都可以建立热流向量，这些热流向量的全体构成热流向量场，简称热流场。关于热量与热流的常用单位及其相互换算关系可查阅附录 D—2，D—3。

§ 1.2 Fourier 定律及导热系数

（一）Fourier 定律

Fourier 定律是在实验基础上建立起来的。实验是对均匀的各向同性材料，在热稳定条件下进行的[2]。Biot(1804 年)及 Fourier (1822 年) 等人根据大量实验结果，经过科学抽象，把物体内部温

* 在有的传热学教科书中称 q 为热流密度，而把单位时间内流过的热量定义为热流。请读者注意区别。

度场与热流场的联系，用数学形式表示出来：

$$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}T \tag{1.2.1}$$

式（1.2.1）被称为 Fourier 定律，其中 k 是导热系数。

掌握 Fourier 定律应领会如下几个要点：

(i) 式(1.2.1)适用于连续温度场内任一点 P，任一瞬时 τ。

(ii) 过 P 点的温度梯度向量与热流向量是共线的，但方向相反，都垂直于等温面。这一结论与坐标系（x，y，z）如何取向无关。见图 1.4，

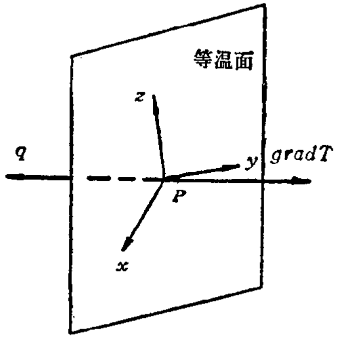

图 1.4 温度梯度与热流向量共线

$$\begin{cases} q_x = -k\dfrac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -k\dfrac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -k\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

过 P 点沿任意方向 l 的热流 q_l 为：

$$q_l = -k\frac{\partial T}{\partial l} = -k\,\mathrm{grad}T\cdot\vec{l} \tag{1.2.3}$$

其中 $\vec{l}$ 是 l 方向的单位向量。

(iv) 温度梯度向量与热流向量在各点的定量联系是由系数 k 来实现的。在给定点上，沿各个方向，这个系数 k 都是一个恒定的值，常称导热系数，也称导热率。

(v) 从式（1.2.1）可得到这样的启发，当物体内的温度场确

定之后，热流场就唯一地被确定下来了。因为，当温度为空间的确定的函数时，这个函数对空间坐标的偏导数也是确定的，例如，求通过 P 点、在 τ 时间内流过面积 A 的热量 Q 可写为：

$$Q=\int_0^\tau d\tau\int_A k|\mathrm{gradT}|dA \tag{1.2.4}$$

相反，在已知热流场的情况下，温度场还不能唯一地被确定下来。因此，在实际问题中，尽管人们最关心的往往是热流的计算（如从节能目的出发，要减少某设备的热损失），但计算热流的前提是计算温度场。正是这样的缘故，在导热问题的研究中，人们总是把注意力更集中在分析物体内部的温度场。

(vi) 根据热力学第二定律，由几个物体组成的热力学体系，若它们的温度不同，则自发的趋向是，热量只能从高温物体传给低温物体。Fourier 定律的本质也正是说，在有温度梯度的物体内部，热流总是朝着温度降低的方向。

（二）导热系数

为了加深理解 Fourier 定律，便于温度场的计算，我们对导热系数作进一步介绍。如前所述，导热系数 k 是物体内部每个点上把温度梯度与热流向量定量地联系起来的一个量，它是由该点材料的性质所决定。即导热系数是材料固有的属性。人们称这种由材料性质所确定的物理量为物性量，或物理性能参数（区别于温度、速度之类状态量）。导热系数是物质重要的热物性量，由于它是对物体内每一点来定义的，就可以引进热物性场的概念，以表征固体材料各处传导热量能力的强弱。它的定义可以从 Fourier 定律式（1.2.3）中得到

$$k=\frac{|q|}{\dfrac{\partial T}{\partial l}} \tag{1.2.5}$$

其物理意义为：过 P 点有一任意平面 A，在垂直于 A 平面方向上，当每单位长度温度差别为一个单位时，单位时间内通过每单位面积的热量。l 是 A 平面的法线。

导热系数常用单位及其相互换算关系可查阅附录 D—4。

下表列出一些典型材料在温度为 $280K$ 时导热系数的数值：

材料名称	银	铜	软钢	不锈钢	木料	石棉	水	空气
W/mK	415.0	380.0	45.0	19.0	0.17	0.17	0.60	0.026

看完这个简要的表，对各种材料的导热系数的大小就有了一个粗糙的印象：固体材料大于液体材料，更大于气体材料；在固体材料中，金属大于非金属；金属材料中，纯金属材料又大于合金材料。但这也不是绝对的，据目前所知，导热系数最大的固体材料是非金属的金刚石，它的导热系数比良导热体的纯金属材料还大好几倍[3]。

各种材料所以呈现不同的导热能力，是由于材料所处的状态与材料的内部结构不同而造成的。如果能通过对物质结构及其内部运动规律的研究，直接计算出导热系数的大小那就好了，但遗憾的是，只有少数材料可以通过计算的途径得到导热系数。如低温气体，由于其热量的传递是由分子的碰撞来实现的，这个过程比较简单，应用气体动力论的分析方法计算得到的导热系数与实验数据相符合。对于液体与固体材料，只在一些特定条件下，可以计算导热系数，绝大部分材料目前还不能计算。针对这种情况，实际中应用的各种材料，它们的导热系数主要通过实验的方法来获得。目前已有一系列实验方法用来测定各种材料在不同温度范围内的导热系数[3]。把实验测得的导热系数数据汇编成图册或曲线供人们计算时采用。在