

中国计量出版社



著

3-44

误差与不确定度题解

误差与不确定度题解

肖明耀 著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差与不确定度题解/肖明耀著. —北京:中国计量出版社, 1999.

ISBN 7-5026-1181-9

I. 误… II. 肖… III. ①测量误差-解题②不确定度-测量方法-解题 IV. TG8-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 06562 号

内 容 提 要

1993 年,国际标准化组织(ISO)等 7 个国际组织共同发布了《测量不确定度表达指南(GUM)》,其后各界应用逐渐增多并形成了全球性的统一趋势。

本书以《指南》为指导,将误差和不确定度常用的 11 个方面的问题和实例,用一百多个题解的形式给出,并尽力作到篇幅少,题解多,目标清,解答明,阅时少,便于和国际接轨。

本书可供从事测量、计量、业务技术考核的科技人员及理工院校师生参考。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm × 1092 mm 32 开本 印张 5 字数 104 千字

1999 年 6 月第 1 版 1999 年 6 月第 1 次印刷

*

印数 1—2500 定价:7.00 元

前 言

误差理论是测量不确定度表达的基础,而测量不确定度表达则是误差理论的一项重要的应用。

以国际计量局(BIPM)不确定度工作组提交并通过的《试验不确定度的表达》建议书 INC-1(1980)为基础,国际标准化组织(ISO)制定了与其一致的,更为详尽的《测量不确定度表达指南(GUM)》⁽¹⁾。该指南的宗旨在很宽的范围内均适用,包括那些为下述目的而进行的测量:

- 在生产中坚持质量管理与质量保证;
- 遵从和实施法律与法规;
- 在科学与工程方面指导基础研究,应用研究与开发;
- 检定标准与仪器,在国家计量系统内进行试验,以溯源到国家基准;
- 开发、维护、比对国际和国家实物参考基准,包括标准参考物质。

美国国家标准与技术研究院(NIST)在 ISO 指南的基础上,制定了《NIST 评定与表示测量结果不确定度指南》⁽²⁾,以指导 NIST 的工作。它适用于 NIST 测量结果的大部分工作,包括如下:

- 测量标准的国际比对;
- 基础研究;
- 工程与应用研究;

——校准或检定用户的测量标准；

——认证标准参考物质；

——给出标准参考数据。

作者所著《误差理论与应用》⁽⁵⁾一书中的不确定度表达内容,完全符合建议书 INC—1(1980)原则,故而也符合 ISO 指南原则。该书于 1988 年获全国优秀科技图书二等奖,印量也较大,在国内特别在计量界有一定的影响(国际上对该书也曾有过评论),只是后来的《指南(GUM)》中某些定义和名称有些变化。我们在叙述时,略作对比,或以它为准。

本书的读者对象为具有高中文化程度的广大计量检定员、测量人员,即使对于文化程度较高的大学生、教师和科研人员,也可提供一份简明的参考。

辽宁省技术监督局局长梁春裕同志,曾为培训全省计量检定与管理人员举办若干培训班,也铅印过本书的部分内容。其后作者应邀去过广州、北京、郑州、合肥、芜湖、南京、济南、呼和浩特、武汉、天津等地,主讲“误差与不确定度”。1997 年接受中国计量出版社之约而撰写这本小册子。虽尽力欲使本书篇幅少,题解多,目标清,解答明,阅时少,便于和国际接轨,但由于作者了解情况可能不细,错漏和不尽如人意之处,恳盼读者多多指正,将不胜感激。

作 者

1998 年 12 月于北京

中国计量科学研究院(NIM)

目 录

一、误差与不确定度概念

1. 何谓误差、修正值与偏差? (1)
2. 含有误差的某一量值修正后能否得到真值? (3)
3. 误差分几类? (3)
4. 如何理解测量结果? (4)
5. 测量不确定度是什么? (6)
6. 测量不确定度分几类? (6)
7. 覆盖因子与扩展不确定度之间有什么关系? (7)
8. 测量不确定度与测量误差有何关系? (8)
9. 误差或不确定度来源于哪几个方面? (8)
10. 不确定度表达的国际发展概况如何? (9)
11. 准确度与测量不确定度有什么关系? (15)

二、实用中常见的各种误差

12. 分贝误差是什么? (19)
13. 电压变化与衰减变化间有何关系? (19)
14. 引用误差是什么? (20)
15. 仪表测量时的误差界限是多少? (22)
16. 如何减小仪表零点邻近测量时的相对误差限? ... (22)
17. 系统误差如何消除? (23)

18. 何谓系统误差随机化?	(24)
19. 什么叫(末)?	(24)
20. 数据修约规则指什么?	(24)
21. 数值如何表达?	(25)

三、分散性的表征

22. 为什么说用方差或标准偏差可描述测量的 分散性?	(26)
23. 贝塞尔公式指什么?	(27)
24. 对某量只测一次,标准偏差是多少?	(29)
25. 残差平方和的变形公式如何导得?	(29)
26. s 的物理含义是什么?	(30)
27. 平均值的标准偏差是多少?	(30)
28. 什么叫权?	(30)
29. 如何计算单位权标准偏差?	(31)
30. 加权平均值及其标准偏差如何计算?	(31)

四、概 率 分 布

31. 什么叫随机变量和概率分布?	(33)
32. 用实验方法如何求概率分布密度函数?	(33)
33. 期望、方差与分布有何关系?	(35)
34. 方差的变形公式如何导得?	(37)
35. 何谓正态分布?	(38)
36. 何谓 t 分布或学生分布?	(39)
37. 如何导出反正弦分布?	(40)
38. 如何求出均匀分布?	(41)
39. 满足什么条件才可能是分布密度函数?	(43)
40. 如何求得均匀分布和反正弦分布误差的方差? ...	(44)

41. 正态分布的常用值是什么? (45)
42. 正态分布的置信因子与概率的关系如何? (47)
43. t 分布的常用值是什么? (47)
44. t 分布置信因子与概率和自由度的关系如何? (48)
45. 正态分布与均匀分布的概率如何计算? (48)
46. 正态、均匀、反正弦分布误差落在 $(-\sigma, \sigma)$ 中的
概率分别是多少? (50)

五、A 类标准不确定度

47. 重复测量时,如何计算 A 类标准不确定度? (51)
48. 何谓自由度? (52)
49. 重复测量时,如何计算 A 类标准不确定度的
自由度? (53)
50. 重复测量时,标准偏差的相对标准不确定度是
多少? (53)
51. 直线拟合的 A 类标准不确定度与自由度如何
计算? (53)
52. 最小二乘法的 A 类标准不确定度与自由度如何
计算? (54)

六、B 类标准不确定度

53. 利用什么信息可计算 B 类标准不确定度? (56)
54. 已知扩展不确定度和覆盖因子,如何计算 B 类
标准不确定度? (56)
55. 已知置信区间和置信水平,如何计算 B 类标准
不确定度? (57)
56. 已知误差分散区间,如何计算 B 类标准
不确定度? (58)

57. 已知仪器基本误差限,如何计算 B 类标准
不确定度? (59)
58. 如何用分辨力计算 B 类标准不确定度? (59)
59. 如何用滞后计算 B 类标准不确定度? (60)
60. 已知舍入误差,如何计算 B 类标准不确定度? (60)
61. 如何用仪器最小变化计算 B 类标准不确定度? ... (60)
62. 已知最大允许误差,如何计算 B 类标准
不确定度? (60)
63. 已知准确度等级,如何计算 B 类标准不确定度? ...
..... (60)
64. 不同分布的区间半宽,如何变换为 B 类标准
不确定度? (61)
65. B 类标准不确定度的自由度如何计算? (62)

七、方差传递

66. 方差传递公式指什么? (63)
67. 如何求得算术平均值的方差? (64)
68. 量块密合后的标准偏差是多少? (65)
69. 圆柱体积标准偏差是多少? (65)
70. 如何保证重力加速度达到要求? (66)
71. 正弦尺测量锥角何时最佳? (66)
72. 丈量距离之和的标准偏差是多少? (67)
73. 如何选择对称测量方案? (68)
74. m 个三角形中任一角的方差是多少? (71)
75. 组合测量中砝码的标准偏差是多少? (72)
76. 如何用实验方法获得协方差与相关系数? (75)
77. 如何使各测量值之间无关? (76)
78. 什么情况下可认为协方差或相关系数为 0? (77)

八、合成标准不确定度

79. 各变量不相关时,如何计算合成标准不确定度? ... (79)
80. 如何用数值方法计算灵敏度系数? (80)
81. 如何用偏导数方法求解灵敏度系数? (80)
82. 如何用实验方法求解灵敏度系数? (81)
83. 在合成标准不确定度的计算中,灵敏度系数
起何作用? (81)
84. 启停秒表确定时间,其标准不确定度是多少? (81)
85. 两个量之和的标准不确定度是多少? (82)
86. 三角形中未测角的标准不确定度是多少? (82)
87. 如何计算合成标准不确定度的自由度? (82)
88. 变量相关时,如何计算合成标准不确定度? (83)
89. 独立量函数间的协方差或相关系数如何计算? ... (84)
90. 试证明同组中单次测得值与平均值相关。 (84)
91. 残差的方差是多少? (85)
92. 试证明残差与平均值无关。 (85)
93. 三角形某一角与其闭合差之间的相关系数
是多少? (87)
94. 如何计算经修正后角度的标准不确定度? (87)
95. 相关量函数间的协方差矩阵如何算得? (89)
96. 标准砝码和天平如何影响被测砝码之和? (90)
97. 标准电阻如何影响被检电阻之和? (91)
98. 标准电阻和电桥如何影响被检电阻之和? (92)
99. 如何考虑实物标准多级检定中的相关问题? (93)

九、最小二乘法与其它

100. 如何用最小二乘法求谐振回路参数及其
A 类标准不确定度? (95)
101. 组合比对中的 A 类标准不确定度与自由度
如何计算? (101)
102. 直线拟合中的若干公式导出。..... (103)
103. 二次曲线拟合的 A 类标准不确定度与自由度
如何计算? (107)
104. 如何列出正弦函数的残差方程? (110)
105. 用最小二乘法求解空间点坐标的步骤是什么? ...
..... (111)
106. 向量线性函数的方差与协方差矩阵。..... (114)
107. 如何利用已知协方差阵求相关系数? (115)
108. 如何利用已知方差、相关系数求其它量的
相关系数? (116)
109. 附条件的最小二乘法中,如何求协方差阵? (117)
110. 求正弦波过程的相关函数与方差。..... (118)
111. n 根光纤宽度的方差。..... (119)
112. 试述阿伦方差的含义。..... (119)

十、扩展不确定度

113. 如何计算扩展不确定度? (121)
114. 覆盖因子 k 的值可以规定吗? (122)
115. 用正态分布如何确定覆盖因子 k ? (122)
116. 用 t 分布如何确定覆盖因子 k ? (122)
117. 何时可用偏峰因子确定覆盖因子 k ? (123)
118. 如何应用偏峰因子 γ 确定覆盖因子 k ? (124)

119. 覆盖因子 k 的理论求法是什么?	(125)
-------------------------------	-------

十一、报告不确定度与实例

120. 如何报告不确定度?	(127)
121. 用比较法确定被检实际值,其不确定度 如何计算?	(129)
122. 比对一次,如何确定被检值的不确定度?	(131)
123. 如何确定被检仪表示值的误差区间?	(131)
124. 分辨力如何影响被检仪表示值误差?	(134)
125. 连续刻度仪表示值的实际值与不确定度 如何求解?	(135)
126. 试将不确定度表达步骤作一小结。	(137)
127. 三等量块实际值的误差分析。	(137)
参考资料	(143)

一、误差与不确定度概念

1. 何谓误差、修正值与偏差？

解 何谓误差？测得的值或测量结果和它的客观真值并不一致，这种矛盾在数值上的表现即为误差。

测量结果的误差为测量结果与其真值之差，由于误差和测量结果同量纲，故称为绝对误差。但误差更为广义的定义如下：

(绝对)误差 = 给出值 - 真值

相对误差 = 误差 ÷ 真值

≈ 误差 ÷ 给出值

给出值——取决于给出方式的值。它包括测得值、测量结果、实验值、标称值、示值、计算近似值以及猜测的值等。给出值具有广义性。

如果定义中的给出值是用测量方式获得的被测量的测量结果，则得到测量误差定义为

测量误差 = 测量结果 - 真值

如果给出值是指计量仪表的示值，则得到计量仪表示值误差定义为

示值误差 = 示值 - 真值

真值——在某一时刻和某一位置或状态下，某量的效应

体现出的客观值,真值具有唯一性。GUM 中定义为:与给定的特定量的定义完全一致的量值。

量是客观存在的,没有给出值无从谈及误差。

被测的量通常指被测量的真值,常常未知,但真值可知的情况:

(1)理论真值;

(2)计量学约定真值;

(3)标准器相对真值——实际值,即用于代替真值使用的量值。如:标准表给出的值,经修正后的值,等等。

修正值 = - 误差

= 真值 - 给出值

所以

真值 = 给出值 + 修正值

= 给出值 - 误差

含有误差的给出值扣去误差就不再含有误差,说明误差定义具有逻辑性。本书误差定义有三个优点:唯一性,广义性,逻辑性。

例 1 标称值 $f_0 = 100$ kHz 的被检频率振荡器,标准频率计测得为 $f_s = 99.8$ kHz,则标称值 f_0 的误差为 $100 - 99.8 = +0.2$ (kHz),其修正值为 -0.2 ,故 $100 - 0.2 = 99.8$ 就和客观一致了。

例 2 已知标准振荡器的输出频率实际值为 99.8 kHz。它在被检频率计上测得为 99.7 kHz,则被检频率计在 100 kHz 邻近的示值误差为 $99.7 - 99.8 = -0.1$ (kHz),修正值为 0.1, $99.7 + 0.1 = 99.8$ 就和客观一致了。

误差 -0.1 的绝对值 $|-0.1| = 0.1$,可见,绝对误差和误差的绝对值是不同的。

偏差 = 实际值 - 标称值(量具上标注的量值)

误差和修正值是对给出值而言的,偏差是对实际值而言的。

思考

(1)测量值为 1 999,真值为 1 996,则测量误差和修正值分别是多少? (3, -3)

(2)测量值为 2 133,修正值为 3,则真值及测量误差分别是多少? (2 136, -3)

(3)误差与修正值的关系是:什么相同? 什么相反? (绝对值,符号)

(4)误差的两个基本表达形式是什么? (绝对误差,相对误差)

(5)绝对误差与误差的绝对值相同否?

2. 含有误差的某一量值修正后能否得到真值?

解 误差 = 给出值 - 真值

修正值 = - 误差 = 真值 - 给出值

真值 = 给出值 + 修正值

修正后能否得到真值,取决于修正值是否为真。当知道真值的条件下,是能对含有误差的量值修正而获得真值的。一般情况下真值是比较难以得出的,但相对真值却可以得到。所以一般来说,含有误差的量值经过修正后,能得到相对真值。

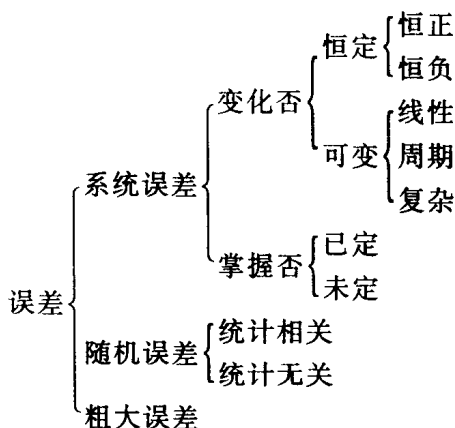
故在真值未知时,根据误差公理,修正值本身也有误差,所以,经过修正后的给出值并不是真值,而是更接近真值的给出值罢了。

3. 误差分几类?

解 根据误差的不同特性,也为便于今后研究和处理误差

方便起见,常将误差划分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

- (1)系统误差——有确定规律的误差
 - (2)随机误差——不能预(先确)定的误差
 - (3)粗大误差——超出规定条件下预期的误差
- 细分如下:



未定系统误差与随机误差的大小或方向是尚未确定的误差,都可称为未定误差。

若某一误差落入区间 $[a, b]$ 中,则可分解为 $(b + a)/2$ 及 $\pm(b - a)/2$ 两部分。 $(b + a)/2$ 为误差的已定部分,视为系统误差,可反号修正量值; $(b - a)/2$ 为误差的未定部分,是误差变化或分散的区间半宽。

4. 如何理解测量结果?

解 众所周知:匀速直线运动的物体,若在 t 秒移动了 d 米,则其速度 $v = d/t$ 。

在此问题中,如果 d 的起点和终点是确定的,且实验又可以重复进行,则当 d 已知时,只需测量出时间就行了。假

设测量 n 次(n 也可以是 1), 可得到 n 个时间测量值, 取其平均就得到了时间的测量结果。这个测量结果是直接测量得到的。

类似, 对距离进行多次测量, 可以获得距离的平均结果。也可能距离 d 是由其他人预先测量求得的, 而我们在后来的测量中, 无需再测, 只需利用前次测量结果就行了。显然, 此时 d 就是前次的测量结果, 而不是我们此次实验得到的测量结果。

在匀速直线运动的测量中, 我们测量 t 和 d (或查取 d) 的目的是求速度 v , 该 v 值就是我们的测量结果。这个测量结果是通过已知函数 $v = d/t$ 计算得到的。

广义说来, 被测量 Y 是通过其它 N 个可测的量 $X_1, \dots, X_N$ 建立了关系, 即

$$Y = f(X_1, \dots, X_N)$$

式中 $X_i (i = 1, \dots, N)$ 称为第 i 个自变量, Y 称为因变量或函数, 它们都是真值。 f 表示它们之间的函数关系。用估计值 x_i 代替 X_i , 则得到 Y 的估计值 y , 即

$$y = f(x_1, \dots, x_N)$$

式中 y 称为被测量 Y 的测量结果。

以上关系也可用系统表达如图 1 所示:

图 1 中, $X_i (i = 1, \dots, N)$ 称为系统 f 的第 i 个输入量,

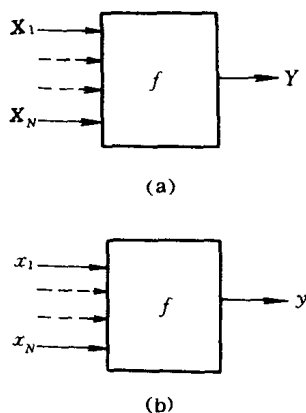


图 1