高等工程数学

下　　册

[美] C. RAY WYLIE　著

西安交通大学数学系《工程数学》翻译组　译

人民教育出版社

高等工程数学

下册

[美] C. RAY WYLIE 著

西安交通大学数学系《工程数学》翻译组 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.25 字数 430,000

1981年9月第1版 1982年6月第1次印刷

印数 00,001—13,500

书号 13012·0649 定价 1.60 元

目　录

第十章　行列式与矩阵

10.1　行列式

至少在一种有限制的意义上说来，行列式的概念是在初等代数中早就周知的. 在那里求解由两个及三个联立线性方程所构成的方程组时，我们已感到引进所谓二阶及三阶行列式是方便的. 在本书中我们将有必要把这些想法推广到由三个以上线性方程所构成的方程组的求解并推广到跟求解方程并不立即相关联的其他应用. 因此之故，我们将把此章及下一章用于复习及推展我们先前的行列式研究并且讨论以矩阵著称的有关数学对象的一些基本性质.

我们所说的一个**n阶行列式**是指 n^2 个量的某一函数，这在我们已引进必要记法及初始定义之后便将更确切地加以描述. 一个行列式的惯用符号是由夹在两条竖线之间的 n^2 个量的正方阵列所组成：

$$(1)\qquad |A|^{①}=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了简便起见，我们将往往用行列式一词既指称此符号也指

① 在行列式的记法中及在一个量的绝对值的记法中都用竖线，尽管也许是不合适的，却是久已通行的. 在任何特定场合究竟指哪一种意义根据上下文应当总是清楚的.

称其展开式.① 这种双重的用法虽然在逻辑上不可取，却是很普通的，并且不致引起混淆.

在(1)中出现的量 a_{ij} 叫做行列式的**元素**. 元素的各水平线叫做**行**；元素的各竖直线叫做**列**. 在(1)中所例示便于使用的**双下标记法**中，跟一个元素相关联的第一个下标指明该元素所在的行，而第二个下标指明所在的列. 当然，没有理由认为在 i 行与 j 列的元素跟在 j 行与 i 列的元素相同，所以一般说来 $a_{ij}\neq a_{ji}$. 从 a_{11} 延伸到 a_{nn} 的各元素的倾斜线叫做行列式的**主对角线**. 取 m^2 个跟一个 n 阶行列式 $|A|$ 的任何 m 行与任何 m 列共同的元素所形成的行列式 $|M|$，就被说成是行列式 $|A|$ 的一个 **m 阶子式**. 当从行列式 $|A|$ 删去含有一个 m 阶子式的 m 行与 m 列后，剩下各元素的方阵所形成的 $n-m$ 阶行列式，叫做 $|M|$ 的**余子式**. 如果在 $|A|$ 中含有一个 m 阶子式 $|M|$ 的各行与各列分别有号数

$$i_1, i_2, \cdots, i_m \quad 与 \quad j_1, j_2, \cdots, j_m$$

那末 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m}$ 乘以 $|M|$ 的余子式叫做 $|M|$ 的**代数余子式**. $|A|$ 的各一阶子式当然就是 $|A|$ 的元素. 一阶子式的余子式习惯上就简称为**子式**，而其代数余子式几乎普遍地称为**余因子**. 我们将以符号 M_{ij} 表示元素 a_{ij} 的子式并以符号 A_{ij} 表示其余因子；这样

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

同样，我们将用符号 $M_{ij,kl}$ 及 $A_{ij,kl}$ 分别表示一个行列式 $|A|$ 的第 i 与 j 行及 k 与 l 列所含二阶子式的余子式及代数余子式；这样

$$A_{ij,kl}=(-1)^{i+j+k+l}M_{ij,kl}$$

这种记法的推广是显而易见的.

---

① 见本节定义 1.

例 1　在五阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{43} 的子式就是从 $|A|$ 删去第四行与第三列后剩下各元素所形成的四阶行列式，即

$$M_{43}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{43} 的余因子等于这个子式乘以 $(-1)^{4+3}$，即

$$A_{43}=-M_{43}$$

同样，$|A|$ 的第三与第五行及第一与第四列所含二阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

的余子式就是从 $|A|$ 删去这些行及列后剩下各元素所形成的三阶行列式：

$$M_{35,14}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

该给定二阶子式的代数余子式 $A_{35,14}$ 等于余子式 $M_{35,14}$ 乘以

$$(-1)^{3+5+1+4};$$

即

$$A_{35,14}=-M_{35,14}$$

对于一个二阶行列式我们有定义

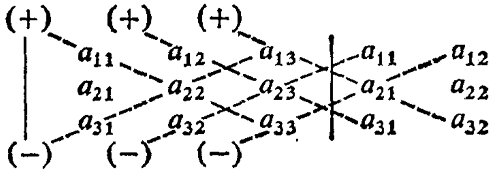
(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

即一个二阶行列式等于主对角线上元素的乘积与另一条对角线上元素的乘积之差．对于一个三阶行列式我们有定义

(3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

这个展开式也可以由对角线乘法得到，就是把行列式的前两列重新写在右边然后在由此产生的阵列中把有正负号的不同对角线上的元素的乘积加起来:



可是，把行列式写出的对角线法只对二阶与三阶行列式是正确的，而一般说来如果应用于高阶行列式将给出错误的结果.

现在我们就能够给出行列式的一般定义了. 这可以用直接的方式做到，但由于其结果不适宜于行列式的实际计值，我们决定给出一个归纳的定义.

定义 1 行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于任何一行或一列的各元素及其各自余因子的乘积之和，即

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad \text{行定义}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad \text{列定义}$$

显然，这个定义使 n 阶行列式依赖于 n 个 $n-1$ 阶行列式，其中每一个又依赖于 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式，以此类推，直到展开式最后只含有可用对角线法写出的二阶或三阶行列式为止. 然而，在定义 1 能被接受并使用之前，必须证明不管选取哪一行或哪一

列总得到相同的展开式．情况确是这样由下述定理得到保证．

定理 1　如果一个行列式的任何一行或一列的各元素乘以它们的对应余因子然后相加，那末所得到的和是对一切行与一切列是相同的．

证　我们将首先证明不管选取哪一行总得到相同的展开式．为此，我们归纳地来进行．显然，定理在 $n=2$ 时成立；因为把行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

依据第一行各元素及其余因子来展开，我们得到

$$a_{11}(a_{22})+a_{12}(-a_{21})$$

及依据第二行各元素及其余因子来展开，我们得到

$$a_{21}(-a_{12})+a_{22}(a_{11})$$

而这两个表达式是恒等的．于是，让我们假定定理的论断对于 $n-1$ 阶行列式正确，而让我们设法证明对于 n 阶行列式正确．明确地说来，让我们把 n 阶行列式

$$|A|=|a_{ij}|$$

依据任意两行，比如说第 i 行与第 j 行，的每一行展开，并且比较两个展开式．为此，假定 $i<j$，当然这并不特殊化．

$$(4a)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\qquad k<l$$

$$
(4b)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad k > l
$$

现在，把$|A|$按第 i 行各元素展开，就有典型项

$$
(5)\qquad a_{ik}A_{ik}=(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}
$$

而在整个展开式中这是有 a_{ik} 出现的唯一项. 此外，M_{ik} 的第$(j-1)$行含有$|A|$的第 j 行的 $n-1$ 个元素，并且 M_{ik} 可合法地按这些元素来展开，因为我们归纳推理的假设是上述定理对 $n-1$ 阶行列式是正确的. 所以把 M_{ik} 按来自$|A|$的第 j 行各元素展开我们有典型项

$$
(6)\qquad a_{jl}(M_{ik}\text{ 中 }a_{jl}\text{ 的余因子})\qquad l\neq k
$$

而这是在 M_{ik} 的展开式中有 a_{jl} 出现的唯一项. 因此，以表达式(6)代入(5)式，我们看到在$|A|$按第 i 行各元素的展开式中表达式

$$
(7)\qquad (-1)^{i+k}a_{ik}[a_{jl}(M_{ik}\text{ 中 }a_{jl}\text{ 的余因子})]\qquad l\neq k
$$

是有乘积 $a_{ik}a_{jl}$ 出现的唯一项. 以完全相同的方式，如果我们先把$|A|$按第 j 行各元素展开，然后把 M_{jl} 按来自$|A|$的第 i 行而且 M_{jl} 所含有的 $n-1$ 个元素展开，我们断定在$|A|$按第 j 行各元素的展开式中有乘积 $a_{ik}a_{jl}$ 出现的唯一项是表达式

$$
(8)\qquad (-1)^{j+l}a_{jl}[a_{ik}(M_{jl}\text{ 中 }a_{ik}\text{ 的余因子})]\qquad k\neq l
$$

如果我们能证明(7)与(8)恒等，我们就将完成我们的证明，就是在归纳推理的假设下，所有$|A|$的行展开式都相同，因为 $a_{ik}a_{jl}(k\neq$

l)是来自 i 行的一个元素与来自 j 行的一个元素的典型乘积，而在$|A|$按第 i 行或 j 行的展开式中每一项必须含有一个，而且只有一个这样的乘积.

现在，M_{ik} 中 a_{jl} 的余因子与 M_{jl} 中 a_{ik} 的余因子，除了(-1)的适当乘幂外，两者都等于从$|A|$中删去第 i 行与第 j 行及第 k 列与第 l 列后剩下各元素所形成的 $n-2$ 阶行列式，比如说，$M_{ij,kl}$. 在检验这些余因子的正负号时，按照 $k<l$[见阵列(4a)]或 $k>l$[见阵列(4b)]，即按照在行列式$|A|$中第 k 列在 l 列之前或后有两种可能性要考虑. 可是，充分地注意到删去各行与各列的相对位置，适当的符号是通过观察就容易确定的，且在各别不同的场合我们有

$$\left.\begin{aligned}&M_{ik}\text{ 中 }a_{jl}\text{ 的余因子}=(-1)^{(j-1)+(l-1)}M_{ij,kl}\\&M_{jl}\text{ 中 }a_{ik}\text{ 的余因子}=(-1)^{i+k}M_{ij,kl}\end{aligned}\right\}\quad k<l$$

$$\left.\begin{aligned}&M_{ik}\text{ 中 }a_{jl}\text{ 的余因子}=(-1)^{(j-1)+l}M_{ij,kl}\\&M_{jl}\text{ 中 }a_{ik}\text{ 的余因子}=(-1)^{i+(k-1)}M_{ij,kl}\end{aligned}\right\}\quad k>l$$

最后，把这些表达式代入(7)与(8)，我们看到，由任何一种展开法所确定的乘积 $a_{ik}a_{jl}$ 的系数是

$$(9a)\qquad (-1)^{i+j+k+l}M_{ij,kl}\qquad\qquad k<l$$

$$(9b)\qquad (-1)^{i+j+k+l-1}M_{ij,kl}=-(-1)^{i+j+k+l}M_{ij,kl}\qquad k>l$$

用完全相同的方式，如果我们按任意两列，比如说第 k 列与第 l 列把$|A|$展开，我们看到一般乘积 $a_{ik}a_{jl}$ 的系数仍然由(9a)与(9b)给出. 这就证明了在归纳推理的假设下，不仅$|A|$的所有列展开式相等，而且它们的公共值就是$|A|$的所有行展开式的公共值. 这样我们已完成了我们的证明，即如果定理对 $n-1$ 阶行列式成立，那末对 n 阶行列式也成立. 因为我们已经证明对二阶行列式的行展开式成立，并且可类似地证明对列展开式也成立，所以我们的归纳推理已告完成；定理 1 已告确立；而且定义 1 是清楚的.

由于不论按任意一行或任意一列的各元素展开一个行列式总得到相同的表达式,我们便有定理 1 的下述明显推断.

定理 2 如果$|A|$是任何行列式,而$|B|$是这样的行列式,其行就是$|A|$的列,那末$|A|=|B|$.

定理 1 的证明也为我们提供了下列重要结果的证明.

定理 3 设从行列式$|A|$中选出任何两行①(或列). 于是$|A|$等于所有包含在选定两行(或列)中的各二阶子式与其代数余子式的乘积之和.

证 设选定的行是第 p 行与 q 行,并且为了明确起见,假设 $p<q$. 现在从这些行取出一个典型二阶子式

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix} = a_{pr}a_{qs} - a_{ps}a_{qr} \qquad r<s$$

而为了证明定理的断言,只要指明在$|A|$的展开式中此二项式的系数是

$$A_{pq,rs} = (-1)^{p+q+r+s} M_{pq,rs}$$

就足够了. 为此,我们注意,当把第一个乘积中的因子按它们的第一个下标的大小即按 $a_{pr}a_{qs}$ 排列时,第一个因子的列指标 r 小于第二个因子的列指标 s. 因此,可以应用(9a)式,其中

$$i=p \qquad j=q \qquad k=r \quad 及 \quad l=s$$

从而得出 $a_{pr}a_{qs}$ 的系数就是量

$$(-1)^{p+q+r+s} M_{pq,rs}$$

同样,当把第二个乘积中的因子按它们的第一个下标的大小即按 $a_{ps}a_{qr}$ 排列时,第一个因子的列指标 s 大于第二个因子的列指标

---

① 在叙述中含有放在括号里的单词或词组的定理(如这一条),实际上是在一条定理中有两条. 自始至终把括号里的单词或词组(在此是单词列)省去,就得到一条;自始至终保留括号里的词而把它们所要替换的词(在此是单词行)省去,就得到另一条.

r. 因此，可以应用(9b)式，其中

$$i=p \qquad j=q \qquad k=s \qquad 及 \qquad l=r$$

从而得出 $a_{ps}a_{qr}$ 的系数就是量

$$-(-1)^{p+q+s+r}M_{pq,rs}$$

因此，$|A|$的展开式含有项

$$a_{pr}a_{qs}[(-1)^{p+q+r+s}M_{pq,rs}]+a_{ps}a_{qr}[-(-1)^{p+q+r+s}M_{pq,rs}]$$

而这些是有乘积 $a_{pr}a_{qs}$ 与 $a_{ps}a_{qr}$ 出现的唯一项. 最后，由这些项通过因式分解，我们得到

$$(a_{pr}a_{qs}-a_{ps}a_{qr})(-1)^{p+q+r+s}M_{pq,rs}=(a_{pr}a_{qs}-a_{ps}a_{qr})A_{pq,rs}$$

这就完成了本定理在用两行展开的情况下的证明. 以实质上完全相同的论证便可确立本定理在使用两列时的断言.

用略微更复杂些的论证可以确立下述定理 3 的推广.

定理 4 设从一个行列式$|A|$中选出任何m行(或列). 于是$|A|$就等于所有包含在选定诸行(或列)中的各m阶子式与其代数余子式的乘积之和.

定理 4 中所含的一般结果以及定理 3 中所含的特殊情形 $m=2$ 两者通常都被指称为$|A|$的 **Laplace 展开式**.

例 2 展开行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

为例示起见，我们将使用定义 1 并同时也使用定理 3 来得出此行列式的值. 按照定义 1，使用有零元素存在的第三行，并且考虑到相继各余因子的交替的正负号，我们有

$$|A|=(0)\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & -2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

$$-(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

或用对角线法展开各三阶行列式

$$|A|=0+75+180-105=150$$

等价地，根据头两行应用定理 3，我们有

$$\begin{aligned}|A|=&\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\left(-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\\ &\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\left(-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)\\ &+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\\ =&(-5)(-16)+(-10)(16)+(-15)(-16)+(-5)(-3)\\ &+(-10)(2)+(-5)(1)\\ =&150\end{aligned}$$

结果如前.

用定理 1 与 3 可以容易地证明其他几条定理. 特别是我们有下述有用的结果.

定理 5 如果一个行列式的任何一行中(或任何一列中)的所有元素是零，那末行列式的值为零.

证 如果我们依照定义 1 按零元素的行(或列)展开给定的行列式，那末展开式中的每一项含有零因子. 因此整个展开式为零，如所断言.

定理 6 如果一个行列式某一行中(或某一列中)的每一个元素乘上 c，那末行列式的值乘上 c.

证 如果我们按各元素已乘上 c 的行(或列)展开给定的行列式，那末展开式中的每一项含有因子 c. 如果把 c 从展开式中提出，结果恰巧是原来行列式的展开式乘 c，如所断言.

定理 7 如果 $|A|$ 是任何行列式，而 $|B|$ 是由交换 $|A|$ 的任何两行(或任何两列)从 $|A|$ 所得到的行列式，那末 $|B|=-|A|$.

证 设$|A|$是任何行列式，并设$|B|$是由交换$|A|$的任何两行(或任何两列)从$|A|$所得到的行列式. 现在,显然可知，如果把任何二阶行列式的行(或列)互换,所得到的行列式是原来的负值. 因此,如果把$|B|$按已交换的两行(或列)展开，结果是作为此展开式中某一项的因子出现的每一个二阶子式是从$|A|$中对应两行(或列)得出的对应二阶子式的负值. 所以，$|B|$的展开式中的每一项是在$|A|$根据相同两行(或列)的展开式中对应项的负值. 这样$|B|=-|A|$,如所断言.

定理 8 如果任何行列式的两行的(或两列的)对应各元素成比例,那末行列式的值为零.

证 显然，各行(或各列)成比例的任何二阶行列式是零. 因此如果我们把给定行列式依照定理 3，按成比例的两行(或两列)展开，结果是每一项含有一个因子是等于零的二阶子式. 所以整个展开式为零,如所断言.

定理 9 一个行列式某一行(或列)的各元素以另一行(或列)的对应各元素的余因子相乘所得各乘积之和为零.

证 设$|A|=|a_{ik}|$为所给行列式,并设$|A|$的某一行,比如说,第 i 行的各元素以另一行,比如说,第 j 行的对应各元素的余因子相乘,就得出和式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

显然，根据定义 1，可以把此式看作是这样一个行列式的展开式，它的第 j 行由元素

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}$$

组成，而它的其它各行跟$|A|$的对应各行全同. 所以在此新行列式中，第 i 行与第 j 行相同，从而由定理 8 这行列式为零. 如果$|A|$的某一列各元素以$|A|$的另外一列的对应各元素的余因子相

乘，类似的论证导致相同的结论．这样定理得证．

把定义 1 与定理 9 合并起来，我们有下述有用的结果．

推论 1　如果 A_{ik} 是行列式 $|A|=|a_{ik}|$ 中元素 a_{ik} 的余因子，那末

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ |A| & i=j \end{cases} \quad \text{及} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il}=\begin{cases} 0 & k\neq l \\ |A| & k=l \end{cases}$$

例 3　如果行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的第一行中各元素，比如说以第三行中对应各元素的余因子相乘，我们得行列式

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

而这显然就是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

按照第三行的展开式．这行列式由于有两行全同，所以就等于零．

象推论 1 那样的结果使用以Kronecker δ①著称的记号来叙述就往往更为简洁，这记号通常写做 δ_{ij}，有时也写做 δ_j^i，且被定义为 0 或 1，视 $i\neq j$ 或 $i=j$ 而定．推论 1 的断语如果用 Kronecker δ 就可写成更简单的形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij} \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il}=|A|\delta_{kl} \tag{12}$$

---

① 因德国数学家 Leopold Kronecker (1823—1891)得名．