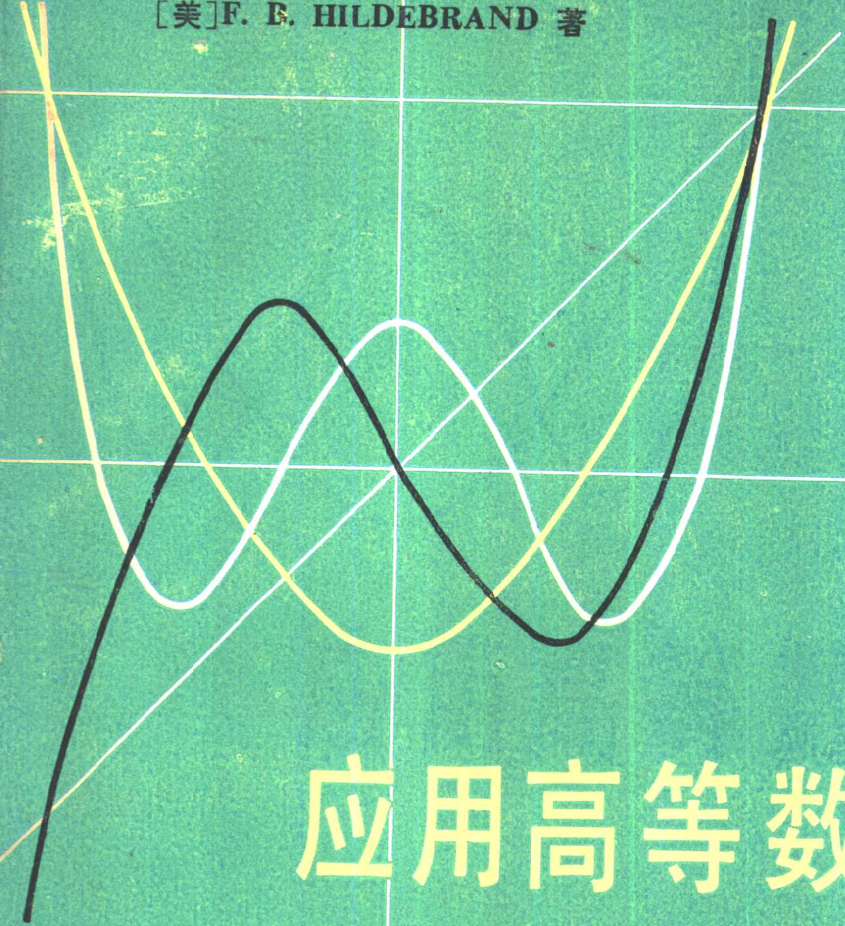
[美]F. B. HILDEBRAND 著



应用高等数学

下 册

陈绶章 张志强译
刘 文校

人民教育出版社

应用高等数学

下　册

[美] F. B. Hildebrand 著
陈绶章　张志强译　刘　文校

人民教育出版社

本书曾多次作为美国麻省理工学院教科书。全书共有十一章，中译本分上、中、下三册出版。本书为下册（10—11章），内容以复变函数为主，包括复变函数的基础内容以及解析函数理论的应用。书中有大量的例题和习题，书末附有习题答案及索引。

本书可供工科院校有关专业及有关工程技术人员作参考用书。

本书根据原书1976年版译出。

应用高等数学

下　册

［美］F. B. Hildebrand 著

陈绶章　张志强译　刘　文校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

咸宁地区印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 6.75　字数 158,000

1980年10月第1版　1981年8月第1次印刷

印数 00,001—21,500

书号 13012·0531　定价 0.61元

目　录

第十章　复变函数

10.1　引言　复变量

一个复数 α 是一个形如 $\alpha=a+ib$ 的表达式，其中 a 和 b 为实数，i 为满足方程

$$i^2=-1 \tag{1}$$

的虚数单位．按惯例，我们称 a 是 α 的实部，b 是 α 的虚部，并写为

$$\alpha=a+ib:\quad a=\mathrm{Re}(\alpha),\quad b=\mathrm{Im}(\alpha) \tag{2}$$

应注意，复数的“虚部”实际上是实数．当 $b=0$ 时，复数 $a+ib$ 称为实数，而当 $b\neq0$ 时，称为虚数．特别是当 $b\neq0$ 而 $a=0$ 时，此数称为纯虚数．类似地，可定义一复变量 $z=x+iy$，其中 x 和 y 均为实变量．

几何上可方便地用在所谓复平面的直角坐标系中的点 (x,y) 来表示一复变量 $x+iy$（参看图 10.1）．于是，表示实数的点均位于此平面的 x 轴上，而表示纯虚数的那些点均位于 y 轴上．同样，可方便地认为复变量 z 由复平面中的从原点 $(x=y=0)$ 到点 (x,y) 的向量来表示．我们称此向量的大小为 z 的绝对值或模，并用 $|z|$ 来表示它，即

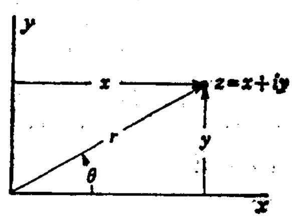


图　10.1

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{3}$$

数 $x-iy$ 称为数 $z=x+iy$ 的共轭，并用符号 $\bar{z}$ 来表示，即

$$\bar{z}=x-iy \tag{4}$$

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时，我们称它们相等；这就是说，

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \text{ 意味着 } x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

特别是一个复数，当且仅当其实部和虚部均为零时，它才为零.

复数的加、减、乘和除，均按实数的运算法则进行，其中若出现 i^2，则由方程(1)有 $i^2=-1$(尚可参看习题 1). 于是，若

$$z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2$$

则有

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{5a}$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{5b}$$

和

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \end{aligned} \tag{6}$$

特别值得注意的是

$$\begin{aligned} z\bar{z}&=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2 \\ &=|z|^2=|\bar{z}|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

这就是说，一个复数与其共轭复数之积是一非负实数，它等于这一复数的绝对值的平方. 利用这一事实，当 $z_1\neq 0$ 时，可推出

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1}&=\frac{x_2+iy_2}{x_1+iy_1}=\frac{(x_2+iy_2)(x_1-iy_1)}{(x_1^2+y_1^2)} \\ &=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}\right)+i\left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

若引入极坐标 (r,θ)，使†

† 限制条件 $r>0$ (本书将始终这样设定)在这里具有特殊意义.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \geqslant 0)$$

则复数 z 可写成极形式

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{9}$$

其中 r 为 z 的模. 应该注意,对一给定的复数,角 θ 可有无穷多的方式来取. 按惯例,模 r 为非负的,当 $z \neq 0$ 时, θ 的各个不同值相差一个 2π 的整数倍,在 $z=0$ 时,θ 值为任意的. 这些角中的任一个, 称为 z 的辐角,其简写符号为

$$\theta = \arg z = \operatorname{amp} z = \measuredangle z$$

若注意到复数的加法或减法遵循向量组合的平行四边形法则, 则下列有用的不等式

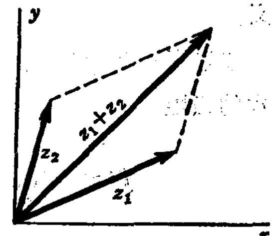


图 10.2

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{10}$$

的正确性可直接由初等几何概念得证(图 10.2). 习题 4 给出它的解析证明.

10.2 初等复变函数

现在我们来定义如 e^z、$\sin z$、$\log z$ 等这样的函数,注意这些定义当 z 变为实数 x 时,将化为通常的定义†.

这种函数中最简单的一种是整数幂函数

$$f(z) = z^n \tag{11}$$

其中 n 为正整数或为零. 自然,此函数是按公式 $z^{k+1} = z^k z$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ 及 $z^0 = 1$,用重复乘法来递推地定义的,由此有

---

† 应该注意,在 z 为复数时,要象对实变函数那样,在几何上"设想出"这些函数的图形是不可能的,因为如设 $w=\sin z$,要联系 w 的实部、虚部(如 u 和 v)和 z 的实部和虚部(如 x 和 y),就需要四维图象. 利用两个平面提供所需的四维,以在几何上表示这些关系的方法,将在第十一章中讨论(§ 11.4).

$$z^n=(x+iy)^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{12}$$

z 的多项式则用有限个这样的函数的线性组合来定义，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}A_n z^n \tag{13}$$

其中组合的常数可能是虚数. z 的有理函数由两个多项式的比来定义.

通过考虑如表达式(13)在 $N\to\infty$ 时的极限，或更一般地考虑下式的极限

$$f(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}A_n(z-a)^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n \tag{14}$$

其中 a 可以是实数或虚数，我们用幂级数来引出复变函数的定义. 这种级数的收敛性，如同实数项级数那样，可用比值判别法来识别(参看 § 4.1). 于是，若在下面的极限存在时，令

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \tag{15}$$

则此级数在

$$|z-a|<\frac{1}{L} \tag{16}$$

时收敛. 可以看出，在几何上，这一限制条件要求 z 位于复平面上的以半径为 $R=1/L$、圆心在点 $z=a$ 处的圆内.

在此收敛圆内，此级数可逐项积分或求导，而所得的级数将分别为原级数所表示的函数的积分或导数†. 这一事实对今后将是相当重要的.

指数函数 e^z 由幂级数

† 这是如下事实的推论，若级数(14)在 $|z-a|<R$ 时收敛，则对 $0<\rho<R$ 的任一个 ρ，当 $|z-a|\leqslant\rho$ 时，该级数均匀收敛，且同样结论对逐项积分或求导后所得级数也成立.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \tag{17}$$

来定义．这一定义是容许的，因为此级数收敛，因此对 z 的所有的实数值或虚数值来说，此级数定义一个 z 的可微函数，同时还因为此级数当 z 为实数时化为通常的级数．若将定义 e^{z_1} 和 e^{z_2} 的级数逐项相乘(对收敛的幂级数来说，这是允许的)，则发现所得的级数就是定义 $e^{z_1+z_2}$ 的级数(参看习题 11)；这就是说，关系式

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \tag{18}$$

对 z_1 和 z_2 为复值时是正确的．因此，若 n 为正整数，则对 z 的所有复值，尚有关系式

$$(e^z)^n=e^{nz}\quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{19}$$

三角函数由已定义的指数函数按下列关系式

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{20a}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{20b}$$

以及 $\tan z=\sin z/\cos z$ 等等来定义．因此，由方程(20)和(17)，我们有相应的级数的定义

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{21a}$$

和

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!} \tag{21b}$$

当 z 为实数时，它们化为通常的形式．从这些级数，或从定义(20 a,b)，可以证明，对 z 为虚值时与实值时一样，满足相同的恒等式．

方程(20a,b)蕴涵重要的关系式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{22}$$

上式称为欧拉公式.

用此关系式，方程(9)可写为

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \tag{23}$$

根据(23)和(19)，我们有

$$z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^ne^{in\theta} \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{24}$$

但由于方程(22)也蕴涵关系式

$$e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

因此我们导出棣美弗(DeMoivre)定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \tag{25}$$

并可将(24)改写为

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{26}$$

在几何上，方程(26)表明，若 z 具有绝对值 r 和辐角 θ，则当 n 为正整数时，z^n 具有绝对值 r^n 和辐角 $n\theta$.

类似地，若 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ 和 $z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则有

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{27a}$$

和

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}, \quad (z_1\neq 0) \tag{27b}$$

这就是说，若 z_1 和 z_2 分别具有绝对值为 r_1 和 r_2，辐角为 θ_1 和 θ_2，则 z_1z_2 具有绝对值 r_1r_2 和辐角 $\theta_1+\theta_2$，而 z_2/z_1 具有绝对值 r_2/r_1 和辐角 $\theta_2-\theta_1$.

特别是注意到，由于

$$|e^{i\alpha}|=1 \quad (\alpha\text{ 为实值}) \tag{28}$$

任一复数 z 与形如 $e^{i\alpha}$(其中 α 为实值)的数相乘，相当于表示复数 z 的向量在复平面上转过一个角度 α.

双曲函数如同实变函数一样，由方程

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \tag{29a}$$

$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \tag{29b}$$

和 $\tanh z=\sinh z/\cosh z$ 等等来定义. 因此,还有

$$\sinh z=z+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{30a}$$

和

$$\cosh z=1+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{30b}$$

按定义可以证明,复变量的双曲函数,满足与实变量的双曲函数相同的恒等式. 特别是比较方程(20)和(29),得关系式

$$\begin{aligned}\sinh iz=i\sin z,\quad \cosh iz=\cos z\\ \sin iz=i\sinh z,\quad \cos iz=\cosh z\end{aligned} \tag{31}$$

它们将三角函数与双曲函数联系起来.

至此,根据以上所得出的结果,可用函数的实部和虚部得出下列各函数的表达式:

$$\begin{aligned}
e^{z}&=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=(e^{x}\cos y)+i(e^{x}\sin y)\\
\sin z&=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy\\
&=(\sin x\cosh y)+i(\cos x\sinh y)\\
\cos z&=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy\\
&=(\cos x\cosh y)-i(\sin x\sinh y)\\
\sinh z&=\sinh(x+iy)=\sinh x\cosh iy+\cosh x\sinh iy\\
&=(\sinh x\cos y)+i(\cosh x\sin y)\\
\cosh z&=\cosh(x+iy)=\cosh x\cosh iy+\sinh x\sinh iy\\
&=(\cosh x\cos y)+i(\sinh x\sin y)
\end{aligned} \tag{32}$$

10.3 其他初等函数

下面我们定义作为指数函数的反函数的复对数函数. 暂以符

号 Log$z$ 表示此函数，我们知道方程

$$w=\mathrm{Log}\,z \tag{33}$$

必须等价于

$$z=e^{w} \tag{34}$$

若以其实部与虚部来表示Log$z$，可写为

$$w=u+iv \tag{35}$$

于是，方程(34)给出

$$z=x+iy=e^{u+iv}=e^{u}e^{iv}=e^{u}\cos v+ie^{u}\sin v$$

因此，令实部与虚部分别相等，得

$$e^{u}\cos v=x,\quad e^{u}\sin v=y \tag{36}$$

由此则有

$$e^{2u}=x^2+y^2=|z|^2=r^2,\quad \cos v=\frac{x}{r}=\cos\theta,$$

$$\sin v=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

且当 $r\neq 0$ 时，有

$$u=\log r=\log|z|,\quad v=\theta \tag{37}$$

其中 r 照例表示 z 的绝对值，$\log r$ 为通常的实对数，而 θ 为与 z 有关的无穷多个辐角(它们之间相差 2π 的整数倍)中任何特定的一个．由此，对 $z\neq 0$ 可得出结果

$$\mathrm{Log}\,z=\log|z|+i\theta \tag{38}$$

为了强调 θ 值仅在 2π 的一整数倍的范围内被确定这一事实，这里可用 θ_p 表示位于区间 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内的特定的 θ 值，并称此值为对于对数的 θ 的主值，

$$0\leqslant\theta_p<2\pi \tag{39}$$

于是，θ 的其他容许值为 $\theta=\theta_p+2k\pi$，其中 k 为整数，而方程(38)化为

$$\mathrm{Log}\,z=\log|z|+i(\theta_p+2k\pi)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{40}$$

由此可知，定义为 e^z 的反函数的 $\mathrm{Log}z$ 是一无穷多个值的函数．例如，设 $z=i$，则有 $|z|=1$ 和 $\theta_p=\pi/2$，因而

$$\mathrm{Log}i=\log 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{4k+1}{2}\pi i \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{41}$$

对应于 $k=0$ 的值称为对数的主值．

在具体的讨论中，若 z 仅限于正的实值，如 $z=x$，则有 $|z|=x$ 和 $\theta_p=0$，于是，由(40)有

$$\mathrm{Log}x=\log x+2k\pi i \ (x \text{ 为正的实值}) \tag{42}$$

因此，正的实数的复对数可与通常的实对数相差 $2\pi i$ 的任一整数倍．为了与通常的习惯相一致，今后在 z 为正的实数时，令(42)中的 $k=0$，使复对数 $\mathrm{Log}z$ 与实对数 $\log z$ 相一致．在更为一般的情况下，按惯例仍可写 $\log z$ 以替代 $\mathrm{Log}z$，这时除 z 仅取正实数值的情况外，$\log z$ 看作是多值的．于是，可写出

$$\log z=\log|z|+i(\theta_p+2k\pi) \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{43}$$

以替代(40)，并免除在(42)情况下当 z 为正的实变量时令式中 $k=0$ 所引起的矛盾．

现设在正实轴上一给定点 z_1 处，对(43)中的 k 选一特定的值，如选 $k=0$，由此确定 $\log z_1$ 的特定值．若点 z 由 z_1 出发，沿一路径连续地运动，则 $\log z$ 的值由初始值 $\log z_1$ 开始并连续地变化．特别是，若 z 沿一围绕原点的简单闭合路径按正方向(反时针方向)移动并返回初始点．可以看出，角 θ 一直增大到 2π，因此，当转了一整圈时，其对数增加 $2\pi i$，而对数的实部回到其初始值．然而，上述讨论仅对包含原点 $z=0$ 在内的路径才是正确的．现若点 z 继续按其原路径移动，则对数由不同的(单值的)函数或同一(多值的)函数的不同的“分枝”给出．这就是说，若写出

$$(\log z)_k=\log|z|+i(\theta_p+2k\pi) \quad (0\leqslant\theta_p<2\pi)$$

且 $\log z$ 在原路径上由$(\log z)_0$ 的一分枝来确定($k=0$),则在 $\log z$ 连续改变时,在第二条路径上,$\log z$应由$(\log z)_1$ 的分枝来确定(对应于 $k=1$). 点 $z=0$ 称为"分枝点". 当需从一分枝移至另一分枝时,它必被路径所包围. 因此我们可以说,函数 $\log z$ 具有无限多个分枝,它在 $z=0$ 处有一单分枝点.

对任一多值函数,当我们阻止由一分枝移至另一分枝,以使讨论仅限于作为单值函数的一个分枝时,我们可以设想,复平面沿着发生一分枝迁移到另一分枝的直线(或曲线)被"切开". 于是,所讨论的分枝,一般说来,沿上述定义的"分枝割线"将是不连续的.

因此,对函数 $\log z$,当 θ_p 武断地规定为 $0\leqslant\theta_p<2\pi$ 时,则$\log z$的各分枝沿正实轴是不连续的. 显然,在处理不希望得到上述情况的问题中,可另行规定 $-\pi<\theta_p\leqslant\pi$,使沿分枝割线的不连续性在沿负实轴处出现,或可使迁移沿任一其他的射线、曲线或由原点伸向无穷远处(不与自身相交)的复合曲线出现.

为确定起见,除以后作明显的不同规定外,我们将采取规定(39).

广义幂函数 $f(z)=z^a$ 用对数按如下方程

$$z^a=e^{a\log z} \tag{44}$$

定义,其中 a 可以是实数或是虚数. 当 z 为正的实变量而 a 为实数时,若正的实数的对数仍为实数,显然,上述定义与通常的定义相一致. 若 a 为正整数,上述定义应与(24)相一致. 为说明这点,令 $a=n$,其中 n 为任意整数,由(44)可得

$$z^n=e^{n[\log r+i(\theta_p+2k\pi)]}=e^{n\log r}e^{in\theta_p}e^{2kn\pi i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

但由于 k 和 n 均为整数,故有

$$e^{2kn\pi i}=\cos 2kn\pi+i\sin 2kn\pi=1$$

因而在此情况下,有

$$z^n=r^n e^{in\theta_p}\quad(n\text{ 为整数}) \tag{45}$$

由于当 n 为整数时，$e^{in\theta}=e^{in(\theta_p+2k\pi)}=e^{in\theta_p}$，故此结果与(24)相一致，若 n 为负整数，如 $n=-p$，则在 $z\neq0$ 时，此结果与递推定义

$$z^0=1,\ z^{-(p+1)}=z^{-p}/z\quad(p=0,1,2,\cdots)$$

的结果相同。

更一般地说，若 a 为有理实数，则可写为

$$a=\frac{m}{n}$$

其中 m 和 n 为无公因子的整数．于是方程有如下形式

$$z^{m/n}=e^{(m/n)\log r}e^{i(m/n)\theta_p}e^{2k(m/n)\pi i}*\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

或

$$z^{m/n}=[r^{m/n}e^{i(m/n)\theta_p}]e^{2k(m/n)\pi i}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

考虑到 m 和 n 均为给定的整数，而 k 为任意整数，不难看出，当 k 取任意 n 个接连的整数值时，如 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，因子 $e^{2k(m/n)\pi i}$ 将取 n 个相应的不同值，而当 k 继续以整数增加时，则所得的 n 个值仅是周期性地重复．由此可知，对 z 的任意非零值，函数 $z^{m/n}$ 恰好具有如下 n 个不同的值†

$$z^{m/n}=r^{m/n}e^{i(m/n)(\theta_p+2k\pi)}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)\tag{46}$$

还可以看到，可将函数 $z^{m/n}$ 看成是具有恰好 n 个分枝，这使得我们若再规定 θ_p 为 $0\leqslant\theta_p<2\pi$，且一个点沿包含原点在内的简单闭合路径移动一周时（θ 变化 2π），则只有通过由一个分枝移至另一个分枝，才能使 $z^{m/n}$ 连续变化．可以进一步证明，若通过一闭合路径恰好为 n 次，它最初由某一分枝开始，则第 n 个分枝将移回最初的那一分枝．点 $z=0$ 仍是一个分枝点．

---

* 此式原书误为 $e^{m/n\log r}e^{i(m/n)\theta_p}e^{2k(m/n)\pi i}$——译者注．

† 符号 $\sqrt[n]{w}$ 有时用来表示多值函数 $w^{\frac{1}{n}}$，其中 w 为复数．但在本书中，完全不采用前一符号，除非 w 为正的实数．这时，根号只表示正的 n 次实根．由此，例如有 $3^{1/2}=\pm\sqrt{3}$．

举一个例，设 $m/n=2/3$，点 z 在单位圆上按正方向（反时针方向）从点 $z=1$ 开始移动．若任意选定从 $k=0$ 的分枝开始，注意到对 $z=1$，有 $r=1$，$\theta_p=0$，则 $z^{2/3}$ 在点 $z=1$ 处的初始值为 1．当趋于回路的终端时，θ_p 趋于 2π，当 $z\to1$ 时，幂 $z^{2/3}$ 的值趋于 $e^{i(2/3)(2\pi+0)}=e^{(4/3)\pi i}$．为了使 $z^{2/3}$ 在通过点 $z=1$ 时的变化为连续的，因而 θ_p 突然降为零，然后再增大，这时我们应从 $k=1$ 的第二个分枝来确定 $z^{2/3}$，因为这一分枝在 $\theta_p=0$ 处取第一分枝当 $\theta_p\to2\pi$ 时所趋向的值．在趋向第二个回路的终端处，仍有 $z\to1$，幂 $z^{2/3}$ 的值趋于 $e^{i(2/3)(2\pi+2\pi)}=e^{(8/3)\pi i}$；当通过 $z=1$ 这一点时，应移至 $k=2$ 的第三个分枝．最后，在趋于第三个回路的终端处，再一次有 $z\to1$，幂 $z^{2/3}$ 的值趋于 $e^{(2/3)(2\pi+4\pi)}=e^{4\pi i}=1$，于是（为了连续性），应移回 $k=0$ 的第一个分枝．$z^{2/3}$ 在点 $z=1$ 处的三个值为 1、$(-1-i\sqrt{3})/2$ 和 $(-1+i\sqrt{3})/2$．

在一般情况下，当 a 为如下形式的一复数时，即

$$a=a_1+ia_2$$

其中 a_1 和 a_2 均为实数，方程(44)化为

$$\begin{aligned}z^a&=e^{(a_1+ia_2)[\log r+i(\theta_p+2k\pi)]}\\&=e^{[a_1\log r-a_2(\theta_p+2k\pi)]}e^{i[a_2\log r+a_1(\theta_p+2k\pi)]}\\&=r^{a_1}e^{-a_2(\theta_p+2k\pi)}\{\cos[a_2\log r+a_1(\theta_p+2k\pi)]\\&\quad+i\sin[a_2\log r+a_1(\theta_p+2k\pi)]\}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{aligned}\tag{47}$$

一般说来，函数 z^a 显然是一个 $z=0$ 为分枝点的具有无限多个值的函数．若 $a_2=0$，且 a_1 为有理数，则只存在有限个分枝；特别是，若 $a_2=0$，且 a_1 为整数，则此函数为单值的，且 $z=0$ 不再是一个分枝点．

广义指数函数 $f(z)=a^z$，其中 a 可为实数，亦可为虚数，但 $a\neq0$、1，它类似地，可由方程

$$a^z=e^{z\log a}\tag{48}$$

来定义．若以 α_p 表示 a 所对应的角的主值，使得 $0\leqslant\alpha_p<2\pi$，则有