场的量子理论

胡　宁

科学出版社

场的量子理论

胡 宁 著

科学出版社
[illegible]

內 容 簡 介

本书介紹理論物理的重要領域——場的量子理論．在前三章詳細討論了場的量子化問題，具体地介紹了自由电磁場、介子場和电子場的量子理論，接着导出由相互作用拉氏函数表示的碰撞矩陣．在第四、第五两章应用这个矩陣来計算和討論各种基本粒子的碰撞和衰变問題．在強相互作用部分着重介紹了塔姆-登可夫型的近似．在最后一章介紹了重正化理論．

本书較詳細地討論了对电磁場的标量場和縱場的各种处理的方式．在处理碰撞矩陣和重正化問題中采用了較新的观点．本书可作綜合性大学基本粒子課程的教材，也可供理論物理研究工作者参考．

场的量子理论

胡 宁著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1964年5月第一版　　书号：2922

1964年5月第一次印刷　　字数：197,000

（京）精裝：1—3,800　　开本：850×1168 1/32

平裝：1—3,500　　印张：7 3/4　插頁：3

定价：［科七］精装本 1.90 元　平装本 1.40 元

前　言

这本书是根据作者 1963 年一月間在广州中山大学講学的講稿加以修訂补充而成. 原講稿曾由王永丰同志整理成为一本名为“量子場論講座”的油印小册子. 作者从广州回到北京后, 又以同样的內容作为北京大学物理系理論班五年級的“基本粒子”这一課程的教材. 在教学的过程中, 內容又有了一些发展. 今年夏天作者又利用差不多整个暑假的时間写成此书. 在写的过程中, 內容又进一步有些发展.

这本书的主要特点是,在自由場的量子理論里,我們沒有急于引入連續場的正則描述. 場的量子化是按照历史的方式引入的, 即把場分析成簡諧振动, 然后再对簡諧振动引入量子化. 物質場的物理观察量是通过它們在洛仑茲变換下的协变性和所滿足的守恆定律来确定的. 我們覚得这样引入自由場的量子理論較易为初学者所接受.

怎样处理电磁場的縱場和标量場一直是量子电动力学里一个有爭論的問題. 在 1947 年以前,人們曾把縱場和标量場用庫伦場替代而只討論橫場的量子現象. 在 1947 年以后,人們傾向于对横場和非橫場同样进行量子化. 这样导致了一些概念上的复杂化, 如縱光子和負几率等, 同时使初学者忘記了在量子現象里还有庫仑相互作用存在. 在这本书里我們較詳細的討論了这方面的問題,并且闡明了新旧理論間的关系.

在第四章中导出的 S 矩陣展开式, 是由相互作用的拉氏函数表述的,而不是象通常所給出的那样由相互作用哈密頓量表述的. 用拉氏函数表述的 S 矩陣的优点是, 它可以很方便地处理相互作用含有对时空坐标的微分的情况. 另一个优点是可以較簡单地处理在第六章中所討論的重正化理論

在強作用一章里我們着重地介紹了非相对論 π 介子和核子散射的理論以及 π-π 相互作用里的共振現象. 在处理中我們还介紹了塔姆-登可夫及貝特-邵皮特尔近似.

在本书里沒有介紹色散关系理論.

因为这本书是在相当短的时間內忽忙写成的，很难免存在着許多錯誤的地方，希望讀者多提宝貴意見，以便于再版时改正.

作者謹識

1963 年 9 月

目　　录

第一章 引 論

§1. 薛定諤量子理論

微观运动的量子理論是从普朗克(Planck)常数 h 的引入开始的. 在 1900 年,普朗克指出由实驗观察到的电磁輻射的能譜不服从經典电磁理論所預示的規律. 为着解释这个实驗上观察到的能譜,必須在理論里唯象地引入一个新参数 $h = 6.5 \times 10^{-27}$ 尔格·秒. 这个参数的引入意味着頻率为 ν 的电磁波的能量必須是 $h\nu$ 的整数倍. 正象原子和分子是实物的最小单位一样，被普朗克称为"能量子"的能量 $h\nu$ 也是頻率为 ν 的电磁波的能量的最小单位. 不久以后，爱因斯坦(Einstein)指出上述的能量的不連續性应該反映着电磁輻射的"粒子"結构，正象質量的不連續性反映着实物的粒子(原子和电子等)結构一样. 这个深刻的观点不久在光电現象的实驗里得到了証实.

上述爱因斯坦的概念在光电現象中被証实以后，量子理論暫时沒有継續沿着普朗克和爱因斯坦理論所指示的方向发展，却轉入对原子的微观运动的探討. 1913 年玻尔(Bohr)根据对原子光譜的分析指出：一个原子系統的能量也象电磁輻射的能量一样具有不連續性. 非相对論的量子力学在 1925 年左右建立. 在微观領域內，它完全代替了牛頓力学. 以后不久，人們发現可以根据作为非相对論量子力学的基础的薛定諤方程导出电磁輻射的能量子 $h\nu$. 这样，电磁場和实物(原子和分子)运动的能量不連續性就可由薛定諤方程統一地加以解释.

非相对論量子力学虽然成功地闡明了微观运动的能量不連續性，但它却沒有触及到上述由爱因斯坦提出而后来由光电現象的实驗所完全証明的观点，这就是：电磁輻射的能量不連續性实际上

是电磁場的粒子性所造成的. 人們在当时已經从实驗中認識到，作为电磁場能量子的所謂“光子”或“光量子”，具有和电子一样的波动性和粒子性，但在非相对論量子理論里，光子和电子的地位則是完全不同的. 为着說明这一点，我們将在下面介紹一下电磁輻射的能量子是怎样由薛定諤方程导出的.

为明确起見，我們考虑在边长为 L 的立方形的、具有完全反射壁的容器內的电磁輻射. 这个电磁場可由矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 来描写，其中 $\boldsymbol{r}$ 是容器內任一点的坐标，t 代表时間变数. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 满足下面波动方程：

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{1.1}$$

除(1.1)外 $\boldsymbol{A}$ 还須满足洛仑兹(Lorentz)輔助条件，在所謂“洛仑兹規范”中这个条件可写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{1.2}$$

我們可取容器的中点为坐标的原点，并取 x, y, z 軸平行于立方体的三边. 因为容器的壁是全反射的，在容器的壁上 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 的值必須为零，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 满足下面边界条件：

$$\boldsymbol{A} = 0, \text{ 当 } x = \pm L/2,\ y = \pm L/2 \text{ 或 } z = \pm L/2. \tag{1.3}$$

这是一个标准的經典电磁場問題，按照在引入普朗克理論以前人們已經习用的办法，我們可把(1.1)，(1.2)，(1.3)的解用下面傅里叶(Fourier)展开式表出：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{1.4}$$

上式右边括弧中引入两个相加的复数共軛項是为了保証 $\boldsymbol{A}$ 值是实数. 满足条件(1.3)的 $\boldsymbol{k}$ 由下式給出：

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x,\ k_y = \frac{2\pi}{L}n_y,\ k_z = \frac{2\pi}{L}n_z, \tag{1.5}$$

n_x, n_y, n_z 为整数；因此(1.4)式中对 $\boldsymbol{k}$ 的求和代表对所有的整数值 n_x, n_y, n_z 的求和. 每一个 $\boldsymbol{k}$ 值代表一个沿 $\boldsymbol{k}$ 方向前进的、頻率为

$\nu_k = c(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}/L$ 的单色波. $\alpha_k(t)$ 满足下面的运动方程:

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha_k(t) + \omega_k^2\alpha_k(t) = 0,$$
$$\omega_k = 2\pi\nu_k = ck, \tag{1.6}$$

$\alpha_k(t)$代表頻率为ν_k、前进矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的单色波的振动. 由(1.6)我們看到这个振动是一个簡諧振动.

变換(1.4) 的作用是把由(1.1) 描写的在容器內电磁輻射的連續运动表达为无穷多个(因为由(1.5)式决定的 $\boldsymbol{k}$ 值有无穷多个)簡諧振动(1.6). 因为簡諧运动是我們所熟悉的运动,所以引入变換(1.4)式可以造成求解的方便. 这个变換把一个偏微分方程变換成无穷多个較易处理的全微分方程. 在力学上这个变換属于正則变換. 一个力学体系的拉氏函数以及它所满足的变分原理和正則运动方程的形式在正則变換下是不变的.

如果我們接受薛定諤方程作为微观区域运动的普遍規律, 那就必須考虑对簡諧振动(1.6)进行量子化的問題. 必須指出, 这样做已經意味着对量子理論的推广, 因为量子力学过去所处理的对象是在普通空間的一个質点的运动, 而(1.6)式所描繪的則是电磁波的振动. 但是人們发現, 当对簡諧振动(1.6)象对运动的質点一样进行量子化以后, 由相应的薛定諤方程立刻可以导出普朗克理論里的能量子. 这說明实物和电磁場的微观运动都遵循着完全相同的規律.

为着写出相应于簡諧运动(1.6)的薛定諤方程, 我們必須首先找到这个运动体系的正則动量 $P_k(t)$ 和正則坐标 $Q_k(t)$. 不难看出 $P_k(t)$, $Q_k(t)$ 和 $\alpha_k(t)$ 都满足(1.6)式,所以在一般情况下, $\alpha_k(t)$ 是 $P_k(t)$ 和 $Q_k(t)$ 的一个綫性的組合. 为着找出 $P_k(t)$ 和 $Q_k(t)$, 我們首先給出电磁輻射的总哈密頓量 H 或总能量 E 的式子. 根据經典的电动力学, 我們立刻写出

$$H = E = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)dV, \tag{1.7}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别代表电場和磁場強度. 积分是对整个容器內的空間的积分. 在这里和以后,我們将都用洛仑兹-亥維賽(Lorentz-Heaviside)单位系統, 因此在通常单位中出現的因子$(4\pi)^{-1}$将不出現. 在"洛仑兹規范"$(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)$中, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1.8}$$

我們可以选取(1.6)的解为

$$\boldsymbol{\alpha}_k(t)=\boldsymbol{\alpha}_k e^{-i\omega_k t},$$

这样选择并沒有丧失解(1.4)的普遍性. 把(1.4)和(1.8)两式代入(1.7),并利用上式得

$$H=2V\sum_{\boldsymbol{k}}k^2\boldsymbol{\alpha}_k^*(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}_k(t), \tag{1.9}$$

式中 $V=L^3$. 引入下面定义:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_k&=\frac{i}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k-ick\boldsymbol{Q}_k),\\ \boldsymbol{\alpha}_k^*&=\frac{-i}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k+ick\boldsymbol{Q}_k).\end{aligned} \tag{1.10}$$

于是(1.9)式变为

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{P}_k^2+\omega_k^2\boldsymbol{Q}_k^2), \tag{1.11}$$

上式給出用正則动量 $\boldsymbol{P}_k$ 和正則坐标 $\boldsymbol{Q}_k$ 表出的无穷多个簡諧振动的总哈密頓量. (1.10)式給出 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{Q}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 間的关系.

得出了正則变数 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{Q}_k$ 以后, 我們可以立刻写出描繪簡諧振动 $\boldsymbol{k}$ 的薛定諤方程:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\nabla_Q^2+\omega_k^2Q^2\right)\psi_k(\boldsymbol{Q})=\varepsilon_n^{(k)}\psi_k(\boldsymbol{Q}), \tag{1.12}$$

式中 $\boldsymbol{Q}\equiv\boldsymbol{Q}_k, \nabla_Q\equiv(\partial/\partial Q_x, \partial/\partial Q_y, \partial/\partial Q_z), \hbar=h/2\pi, \psi_k(\boldsymbol{Q})$ 代表相应于前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的簡諧振动的薛定諤波函数.

由洛仑兹条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$, 我們看到矢量 $\boldsymbol{Q}$ 是与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的, 因此(1.6)式和(1.12)所描繪的簡諧振动只是在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 平面內的

运动. 命 Q_1 和 Q_2 为 $\mathbf{Q}$ 在这个平面內沿着两个垂直方向的分量，于是(1.12)可以分解为两个独立的一維运动：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{d}{dQ_s}\right)^2+\omega_{\boldsymbol{k}}^2 Q_s^2\right]\psi_{\boldsymbol{k}s}(Q_s)=\varepsilon_n^{(\boldsymbol{k}s)}\psi_{\boldsymbol{k}s}(Q_s),$$

$$(s=1,2), \tag{1.13}$$

上式的解是我們所熟知的. (1.13)所給出的本征值 $\varepsilon_n^{(\boldsymbol{k},s)}$ 取不連續的值：

$$\varepsilon_n^{(\boldsymbol{k}i)}=\left(n_{\boldsymbol{k}s}+\frac{1}{2}\right)h\nu_{\boldsymbol{k}}, \tag{1.14}$$

式中 $n_{\boldsymbol{k}s}$ 是零或正整数. 上式所給出的能級間隔正是普朗克所引入的能量子 $h\nu_{\boldsymbol{k}}$.

上面的推导說明，把描繪微观質点运动的薛定諤方程推广应用于电磁运动立卽給出普朗克的能量子. 这个能量子只代表一个量子运动的能級間隔，正象一个氫原子的能級間隔一样. 不过对于氫原子，能級間隔不是一个与能級无关的常量，因此沒有导致能量子的概念.

人們在发現了薛定諤波动方程以后，曾經認为这个方程反映出实物的波动性，因此应和描繪电磁波的麦克斯韦(Maxwell)波动方程相当. 但是不久人們不得不放弃这种看法而接受对于薛定諤波函数的几率幅的解释. 上面的推导也指出，对于电磁輻射，描写它的量子运动的几率波 $\psi_{\boldsymbol{k}}$ 是和描写它的經典的和宏观的波动的麦克斯韦方程的解是截然不同的两件事.

为着更清楚的对照說明在薛定諤量子理論里实物和电磁場的量子現象間的連系，在表 I 中我們給出从宏观到微观各个阶段电子和电磁場理論的对比. 从这个表我們看到，电子沒有相应于麦克斯韦方程的阶段. 实物的粒子性貫穿于所有的阶段，而場的光量子只是在表的最下面的部位作为能級的間隔而出現的. 因此以薛定諤方程为基础的非相对論量子力学沒有反映出爱因斯坦所提出的重要观点，卽光量子是和电子一样的微观粒子.

表 I

場(电磁輻射)	实物(电子)
經典电磁場的麦克斯韦方程 $\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$	
簡諧振动的动量和坐标 $P_{\boldsymbol{k}s}(t),\ Q_{\boldsymbol{k}s}(t)\ (s=1,2)$	經典粒子的动量和坐标 $p_i(t),\ q_i(t)\ (i=1,2,3)$
量子理論的对易关系 $[P_{\boldsymbol{k}i},Q_{\boldsymbol{k}'j}]=-i\hbar\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{ij}$	量子理論的对易关系 $[p_i,q_j]=-i\hbar\delta_{ij}$
容器的薛定諤方程能級 $\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}=\left(n_{\boldsymbol{k}s}+\frac{1}{2}\right)h\nu$	单个电子的薛定諤方程 連續的和不連續的能級.

下面我們将进一步討論描繪电磁輻射的薛定諤方程和薛定諤态矢量(波函数)的物理意义. 按照前面的定义, $\varepsilon_n^{(\boldsymbol{k}s)}$ 代表前进矢量为 $\boldsymbol{k}$, 偏振为 s 的单色波所作的簡諧振动的能量. 容器內輻射的总能量应为相应于所有前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两种不同偏振 $(s=1,2)$ 的簡諧振动的能量之和. 輻射所处的态可由这无穷多个簡諧振动所处的态来确定, 即可由无穷多个簡諧振动的薛定諤态矢量的乘积来表示. 因此, 容器內輻射的总态矢量和总能量可写为

$$\Psi=\prod_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}1}^{n_1}(Q_{\boldsymbol{k}1})\psi_{\boldsymbol{k}2}^{n_2}(Q_{\boldsymbol{k}2}), \tag{1.15}$$

$$E=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{s=1}^{2}\left(n_{\boldsymbol{k}s}+\frac{1}{2}\right)h\nu_{\boldsymbol{k}}. \tag{1.16}$$

在經典理論里沒有輻射存在的情況相当于量子理論里能量最低的情况, 即所有簡諧振动都处于基态的情况. 这时 (1.15) 和 (1.16)变为

$$\Psi_0=\prod_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}1}^{0}(Q_{\boldsymbol{k}_1})\psi_{\boldsymbol{k}2}^{0}(Q_{\boldsymbol{k}_2}), \tag{1.17}$$

$$E_0=\sum_{\boldsymbol{k}}h\nu_{\boldsymbol{k}}. \tag{1.18}$$

因簡諧振动 $\boldsymbol{k}$ 的数目是无限的，当容器中沒有輻射存在时，E_0 的值仍等于无穷大. 这个无穷大的零点能不造成任何观察上的效果，如果我們以眞空的态作为能量为零的态的定义，那么(1.18)即可換为 $E_0=0$. 由(1.17)給出的 Ψ_0 代表沒有輻射存在时的态，所以可以称为眞空的态矢量. 因为不管容器中有沒有輻射，Ψ 都是存在的，所以我們称 Ψ 为容器的态矢量或空間的态矢量. 按照这个观点，空間本身是一个力学体系，而輻射只代表空間被激发时的情况.

使得相应于$(\boldsymbol{k}s)$的簡諧振动增加和减少一个能量子 $h\nu_{\boldsymbol{k}}$ 的算符分别为

$$c_{\boldsymbol{k}s}^{*}=\frac{-i}{\sqrt{2ch k}}(P_{\boldsymbol{k}s}+ickQ_{\boldsymbol{k}s})=\sqrt{\frac{2kV}{ch}}\,\alpha_{\boldsymbol{k}s}^{*}, \tag{1.19}$$

$$c_{\boldsymbol{k}s}=\frac{i}{\sqrt{2ch k}}(P_{\boldsymbol{k}s}-ickQ_{\boldsymbol{k}s})=\sqrt{\frac{2kV}{ch}}\,\alpha_{\boldsymbol{k}s}. \tag{1.20}$$

由 $P_{\boldsymbol{k}s}$ 和 $Q_{\boldsymbol{k}s}$ 所滿足的对易关系:

$$[P_{\boldsymbol{k}s},\,Q_{\boldsymbol{k}'s'}]=-i\hbar\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}, \tag{1.21}$$

我們立刻得到 $c_{\boldsymbol{k}s}$ 和 $c_{\boldsymbol{k}s}^{*}$ 間的对易关系:

$$[c_{\boldsymbol{k}s},\,c_{\boldsymbol{k}'s'}^{*}]=\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}. \tag{1.22}$$

由上式很容易得出 $c_{\boldsymbol{k}s}$ 和 $c_{\boldsymbol{k}s}^{*}$ 在能量表象中的矩陣元:

$$\begin{aligned}\langle n'_{\boldsymbol{k}s}|c_{\boldsymbol{k}s}|n_{\boldsymbol{k}s}\rangle&=\delta_{n'_{\boldsymbol{k}s},n_{\boldsymbol{k}s}-1}\sqrt{n_{\boldsymbol{k}s}},\\ \langle n'_{\boldsymbol{k}s}|c_{\boldsymbol{k}s}^{*}|n_{\boldsymbol{k}s}\rangle&=\delta_{n'_{\boldsymbol{k}s},n_{\boldsymbol{k}s}+1}\sqrt{n_{\boldsymbol{k}s}+1};\end{aligned} \tag{1.23}$$

式中 $|n_{\boldsymbol{k}s}\rangle$ 代表能級为 $n_{\boldsymbol{k}s}$ 的簡諧振动$(\boldsymbol{k}s)$的态. 利用(1.19)和(1.20)，(1.4)可写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\sum_{s=1}^{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{ch}{2kV}}\{\epsilon_{\boldsymbol{k}s}c_{\boldsymbol{k}s}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\epsilon_{\boldsymbol{k}s}c_{\boldsymbol{k}s}^{*}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{1.24}$$

作为薛定諤表象中的算符，上式中的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$c_{\boldsymbol{k}s}$ 和 $c_{\boldsymbol{k}s}^{*}$ 都与时間无关. 式中 $\epsilon_{\boldsymbol{k}s}(s=1,2)$代表在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面內两个互相垂直的单位矢量，它們代表振动 $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}s}$ 的极化方向.

由上面結果我們看到，电磁輻射在量子理論里是由算符 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 来描写，而电子则由态矢量或波函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 来描写。在这一点上显示出量子力学在处理实物和場的运动时所采取的不同方式。

利用(1.19)和(1.20)，我們可以把(1.11)表为

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{s=1}^{2}chk(c_{\boldsymbol{k}s}^{*}c_{\boldsymbol{k}s}+c_{\boldsymbol{k}s}c_{\boldsymbol{k}s}^{*}). \tag{1.25}$$

利用对易关系(1.12)，上式又可写为

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{s=1}^{2}chk\left(c_{\boldsymbol{k}s}^{*}c_{\boldsymbol{k}s}+\frac{1}{2}\right). \tag{1.26}$$

上式括弧中的 1/2 只对零点能 E_0 有貢献，如果我們选取 $E_0=0$，上式可写为

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{s=1}^{2}chk(c_{\boldsymbol{k}s}^{*}c_{\boldsymbol{k}s}). \tag{1.27}$$

比較(1.14)和(1.27)，并注意到 $\nu_{\boldsymbol{k}}=ck$，我們立刻得到

$$c_{\boldsymbol{k}s}^{*}c_{\boldsymbol{k}s}=n_{\boldsymbol{k}s},$$

即 $c_{\boldsymbol{k}s}^{*}c_{\boldsymbol{k}s}$ 是一个对角的算符，它的本征值为能量子的数目 $n_{\boldsymbol{k}s}$。从(1.23)也可得到同样的結果。

§2. 二次量子化的物理內容，玻色子和費米子

自从非相对論量子力学在 1925 年左右完全建立以后，在其后五六年內新的发展有两个重要的方向。一个发展方向是，由于实驗发展的需要，人們要求建立起相对論的量子力学。这就要求把薛定諤方程推广到相对論的領域里去。人們发現有两种可能的推广，一种推广給出描写自旋为零的粒子的克萊因-戈登（Klein-Gordon）波动方程，另一种推广給出描写自旋为 1/2 的粒子的狄拉克(Dirac)方程。这两种推广都导致严重的困难。克萊因-戈登方程具有人們所熟知的負几率困难。狄拉克方程則伴随着著名的負能困难。为了避免負能困难，狄拉克曾提出所謂“空穴”理論。經过試图消除这些困难的各方面尝試以后，人們逐漸認識到，这些困

难是和对波函数的几率解释密切相关的. 因此, 为了克服这些困难,必須对一些基本概念作重要的修改.

量子力学新发展的另一个方向是寻求对于場和实物的量子現象在認識上的进一步統一. 我們从上一节的討論看到, 虽然电磁場和电子的微观运动規律都遵循着同样的量子力学的規律, 但在我們的認識中实物和場的差异仍然是很大的. 量子理論虽然显示出在微观区域中实物的波动性和电磁場的原子性, 但这种波动性和原子性和宏观区域中所理解的是迥然不同的. 微观区域內的所謂波动性只意味着几率分布的一种周期性, 所謂原子性也只代表能量的不連續性. 这样就使得实物和場的对立在微观区域內更形复杂化, 而前面所提到的光量子在光电現象里所显示的和电子一样的粒子性,却絲毫沒有在理論里得到反映. 現在我們都知道,电子也可象光子一样地被放出和被吸收, 而且光子和电子也可以互相轉化;但在 1932 年以前这些現象还未被发現. 尽管这样, 当时人們已感到必須改造以薛定諤方程为基础的量子理論, 使得它更充分地显示出实物和場在波动性和粒子性两方面的对称性. 不久人們就发現,薛定諤方程所显示的上述不对称性并不是实質的,这种不对称性可以通过一个新的描述方式的引入而被消除. 这个新的方式就是所謂“二次量子化”描述方式.

“二次量子化”并不象这个詞的本身所指示那样意味着在客观世界里还存在着更进一步的量子現象. 为着說明什么是二次量子化描述,我們考慮由N个等同粒子所构成的力学体系. 在薛定諤理論里,粒子数N必須事先給定,N决定在波函数ψ中出現的独立变数的数目. 但是在实际观察里,粒子数往往是不确定的,这就要求把量子力学改換成一种新的形式, 使得粒子数也作为象动量和坐标等一样的观察量出現. 为着使粒子数不同的态可以互相跃迁,必須引入增加和減少一个粒子的算符. 我們知道,統計規律对于粒子数的改变有着决定性的作用,比如当粒子滿足費米統計时,在已被占据的态中增加一个粒子是被禁戒的. 因此, 对于不同的

統計規律，这些增加和減少粒子的算符必須服从完全不同的代数关系。再者，为了描述粒子数的改变，还必須引入代表粒子数为零的态或眞空态的波函数。从这些討論，我們立刻看到，上节中处理电磁輻射时所用的方式正是这样的对于粒子数不确定的情况的描述方式。人們可以預料，在这个描述方式里，电子和电磁場的量子現象将显示出更大的对称性。

这个新的描述方式可以形式地由下面步驟得出：首先我們把单粒子的薛定諤方程看成是和麦克斯韦电磁場波动方程一样的描写經典波动的方程，这个方程的解 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 也看成是和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 一样的普通空間的波动；然后对薛定諤方程进行象上节对电磁場波动方程所进行的一样的量子化。

为簡单起見，我們假定 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 代表一个不受外力作用的自由粒子的波函数。引入这个沒有外力作用的假定的目的是为了可以很容易地闡明某些重要的观点。如果不引入这个假定，計算将較为复杂，但基本思想和推算的过程仍旧是一样的。在上述假定下，$\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 所滿足的薛定諤方程可写为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}, t), \tag{2.1}$$

上式描写一个自由粒子的量子运动。如果我們把(2.1)看成相当于麦克斯韦方程(1.1)和(1.2)，那么我們就可考虑(2.1)式在上节所述的容器內的解。和上节一样，我們引入下面傅里叶展开式：

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{2.2}$$

在上式右边不需要加上复数共軛項，因为 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 本身是一个复数。把上式代入(2.1)，得到 $a_{\boldsymbol{k}}(t)$ 所滿足的方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{\boldsymbol{k}}(t) &= -i\varepsilon_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}(t), \\ \varepsilon_{\boldsymbol{k}} &= \frac{\hbar k^2}{2m}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

这表示 $a_{\boldsymbol{k}}(t)$ 所代表的运动也是一个简諧振动。把(2.1)看成相当