网络技术
在系统工程中的应用

华东工程学院 孙东川 编

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

网络技术在系统工程中的应用

华东工程学院孙东川编
责任编辑：周翰宗

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年9月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：6.875　字数：154,000
印数：1—6,800
统一书号：15204·122　　定价：0.90元

目　录

第一章　网络问题与图论初步

§1.1　系统工程中的几个网络问题

所谓网络技术，或者网络分析，就是用一种叫做网络的图形作为数学模型来描述系统，以求解系统中的各种实际问题。实践证明，网络技术能为许多工程问题和管理问题提供确切的数学模型和求解方法。要准确地给“网络”下定义必须用到图论的一些基本概念。网络技术的主要基础是图论，故本章将对图论予以初步介绍。在此之前，让我们首先看几个具体的网络问题，以期对于网络和网络技术有一个初步的理解。

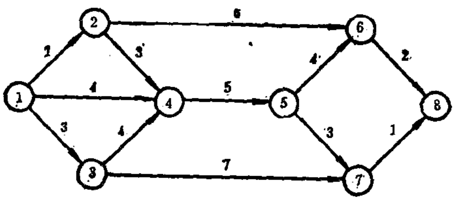

图1·1

图1·1 是一个网络，用它既可以描述一项施工任务，也可以描述一项科研任务或其它问题。图中带箭头的线段称为“弧”，可用以表示任务中的各项作业(或工序)，弧旁的数字表示完成该项作业所需要花费的工时；带编号的圆圈称为“结点”，可用以表示各项作业之间的交接班事项（如①表示任务开工，⑧表示任务完工)。现在要问，该项任务（作业系统）的总工期为多长？或者，在预先规定的总工期下，该项任务可否按期完工？需要在哪些环节上采取措施，以保证任务的按期完成？如何使

用人力、物力、财力才最为合理最为经济？

解决这些问题有一种专门的网络技术——统筹法，即计划协调技术(PERT/CPM)，本书中将作为重点予以介绍。作为这种技术的发展，还有一种随机网络技术(GERT)，也将给以适当介绍。

若用图1·1来表示一个输油管道网，①表示起点站，⑧表示终点站，其它结点表示中转站，线旁的数字表示该段管道的最大通过能力，可称为容量。问：怎样安排各条弧上的流量，才能使从①到⑧的总输送量为最大？

这类问题在网络技术中通常称为“最大流问题”。

若把图1·1看作一个公路网，各个结点表示工厂，线旁的数字表示该段公路的长度。问：要把货物从工厂①送到工厂⑧去，走哪条路最短？

这类问题在网络技术中通常称为“最短路问题”。

在最大流与最短路问题中，可以把各条弧上的箭头去掉，这时的线段称为“边”(如图1·2所示)。在边上允许两个方向的流动或运转，此时的网络称为“无向网络”。而由弧组成的网络称为“有向网络”。既有弧又有边的网络称为“混合网络”。

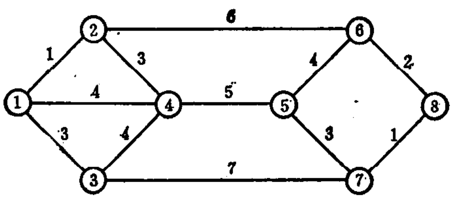

图1·2

如果我们要沿图1·2所示的公路网架设电话线，试问应该怎样架线，才能使各工厂(或城镇)都能通话而所用的电线最少？

这个问题实际上是找该图的“最小树”，所以在网络技术中通常称为“最小树问题”。

若用图1·2表示某城区的街道网，边上的数字表示街道的长度，结点4为邮局，一个邮递员每天从邮局出发，要走遍每条街道投递报纸信件，完成任务后回到（或不回到）邮局。问：他应该选择怎样的路线，可以使走的总路程为最短？

这个问题称为“中国邮路问题”。它是我国数学工作者在六十年代初作出的贡献，获得了世界的公认。

又如要建一个使用期为10年的工厂，估计在此期间，产品销路好的可能性为0.7，销路差的可能性为0.3。有三种方案：一是建大厂，需要投资300万元，产品销路好时年利润100万元，销路差时年利润－20万元；二是建小厂，投资160万元，产品销路好时年利润40万元，销路差时30万元；三是先建小厂，如果销路好，3年后扩建，需要投资180万元，扩建后年利润95万元。试问应如何决策？

这是个“多阶段决策”问题，可用“决策树”来解决。

当然，还可以举出很多可用网络表示的事例和问题，这些都将在本书中加以讨论并介绍解决的方法。总之，网络技术的内容极为丰富。我国水利水电总局葛文辉同志在中国系统工程学会第三次年会上介绍，他们在葛洲坝二期工程、引滦工程（南线）、紧水滩工程等项目上，都使用了网络技术来编制施工计划，获得了非常显著的效益，因而要进一步推广网络技术，以促进各项工程取得最优效果。

图1·1与图1·2均可变换为图1·3的形式（我们可根据讨论的需要而任选其中一种形式）。

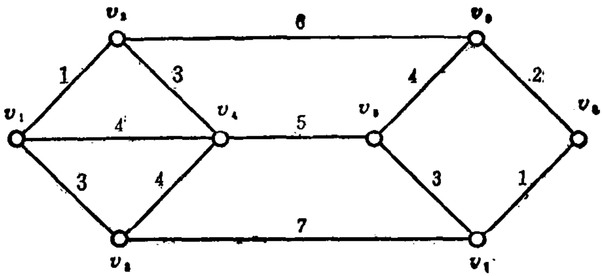

图1·3

§1.2 图论初步(一)

我们要介绍的一些图论的基本概念主要有：图的概念，路的概念，网络的概念。为了易于理解尽可能用形象化的描述，而不用或少用抽象的符号与术语。在§1·3中我们将给出准确的定义与命题。此外我们还采取难点分散的办法，把某些概念(例如树的概念，割集的概念。)放到后续有关章节中介绍。

一、图与子图

1.点与边(弧)的关系　由§1·1可以知道，网络作为一种图，不同于解析几何或者函数论中的图，后者是指具有某种函数性质的点的集合，这些点的坐标满足某些方程，可以选择适当的坐标系，精确地作出它们的图形：直线、圆、抛物线或各种曲面。而图论中所说的图都不具有这种涵义，它指的是由若干个点以及点间连线所组成的集合。对图

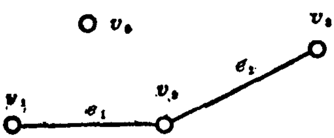

图1·4

论中的图我们只注重其中点线之间的逻辑关系，至于这些点的坐标，线的长短或曲直是不重要的。这些点称为“结点”或“顶点”，点与点之间的连线称为“边”，如果边上带有表示方向的箭头，就称之为“弧”。

结点和边(或弧)之间具有如图1·4所示的三种关系。

(1) 在图1.4中，结点v_1、v_2作为边e_1的端点，我们称：v_1与e_1、v_2与e_1“关联”；同理，v_2与e_2、v_3与e_2关联。这里，v_2同时与e_1、e_2都关联。由此可见，关联是描述两类不同元素(结点与边)之间的关系的；

(2) 结点v_1、v_2由边e_1连接起来了，则我们称v_1与v_2“邻接”；同理，v_2与v_3邻接。这是结点与结点这同一类元素之间的关系；

(3) 边e_1、e_2由结点v_2连接起来了，我们称e_1与e_2邻接；这是边与边这同一类元素之间的关系。

总之，邻接是用来描述同一类元素之间的关系的。

在1.4中还可以看到：结点v_0不同任何边关联，也不同其他结点相邻接，结点v_0就称为“孤立点”。一个孤立点也可以作为一个图而存在。但是，在图论中没有“孤立边”或“孤立弧”的概念，就是说，一条边（弧）总是要有两个端点的，少一个都不行。现以图1.5为例，进一步介绍有关图以及图的结点和边的某些特性。

在图1.5(a) 中，对于边e_1，我们可以记作 (v_1, v_2)，也

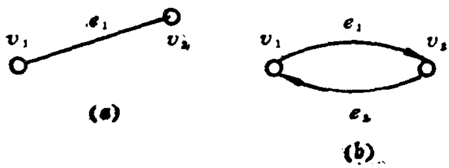

图1·5

可以记作(v_2, v_1)，即

$$e_1=(v_1, v_2)=(v_2, v_1)$$

或简记为：

$$e_1=(1, 2)=(2, 1)$$

就是说，结点v_1与v_2先写哪一个后写哪一个是没有关系的，故称为“无序”，这是无向图的特性。

但是对于有向图就不同了：在图1.5(b) 中，(v_1, v_2) 或(1，2)表示弧e_1，(v_2, v_1) 或(2，1) 表示弧e_2，就是说，v_1与v_2的先后次序是有关系的，故称为“有序”，这是有向图的特性。

用两个端点来写出图1.6中一条边(或弧)的做法是不行的。

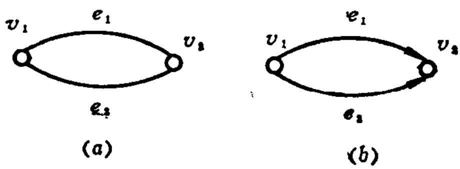

图1·6

因为此时，用(v_1, v_2) 或(1，2) 就分不清是指e_1还是e_2，图1.6中的e_1与e_2称为“并行边”（或“并行弧”)。这要结合端点的符号来表示，可以写为：(v_1, e_1, v_2)，(v_1, e_2, v_2)。

有“并行边”或“并行弧”的图称为“多重图”，没有并行边（或并行弧）的图称为“简单图”。注意，在图1.5(b) 中，e_1与e_2称为一对结点之间的“反向弧”而不是并行弧，所以图1.5(b)是(有向)简单图。

2.图的三要素　要确定一个无向图，必须明确三项要素：(1) 它包含哪些结点？(2) 它包含哪些边？(3) 每条边的端点是什么？即每条边与什么结点相关联？

只要知道了这三项要素，一个无向图就确定了。如果把三要素中的“边”改为“弧”，把第(3)条改为“每条弧的起点与终点是什么?”，即成为有向图的三要素。

图的英文是GRAPH，所以我们把图记为G。并且，我们用V来代表G的所有结点，设有n个结点：v_1，$v_2\cdots$，v_n，记作$V=\{v_1, v_2\cdots, v_n\}$；我们用$E$来代表G的所有边，设有$m$条边：$e_1$，$e_2\cdots$，$e_m$，记作$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，所以，一个图的完整表示用G$(V, E)$。若有两个图，则可记为：$G_1(V_1, E_1)$，$G_2(V_2, E_2)$。

若图G(V, E)包含v_1，v_2，v_3，$v_4$4个结点和e_1，e_2，…，$e_5$5条边；且结点与边的关联性为：

e_1—v_1，v_2　　e_2—v_2，v_3　　e_3—v_3，v_4

e_4—v_4，v_1　　e_5—v_1，v_3

因所给条件满足了无向图的三要素，所以可以画出如图1.7所示的图来。图1·7(a)与(b)这两种画法的三要素是一样的，这两个图称之为等价，又称为“同构”，它们实际上是同一个图的两种画法。

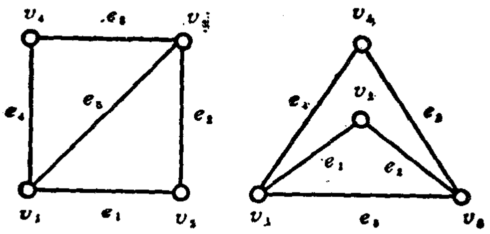

图1·7

3.子图　取出图G的一部份作为另一个图G_1，就称G_1是G的子图。例如图1·8 (a)，(b)，(c) 分别是图1.7的不同取法，它们都是图1·7的子图，

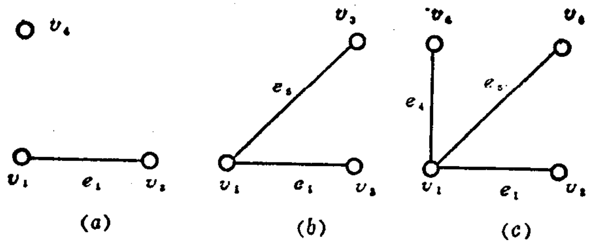

图1·8

注意，在G中取子图G_1时，可以单独取出一个结点而不取出与该结点关联的边；而边则不然，取出一条边时必须连带该边的两个顶点。再者，我们发现，图1·8（c）作为子图，取出了图1·7的全部结点，我们就称前者是后者的“支撑子图”。而图1·8(a)与(b)都不是支撑子图。

二、路与连通

1.通路与回路　图G的通路与回路都是G的特殊子图，就是说，它们都是从G中取出来的一部份，并具有下面的特征。

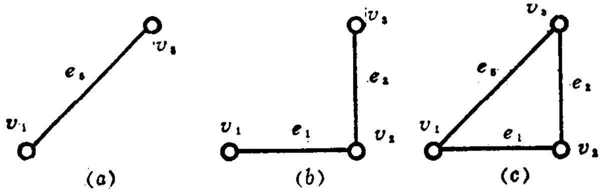

图1·9

图1.9（a），(b)，(c）都是从图1.7取出来的子图。我们称(a)为从结点v_1到v_3的一条通路，记作$P_1=(v_1, e_5, v_3)$；(b)也是从结点v_1到v_3的一条通路。记作$P_2=(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$。在不导致混淆的情况下，可以只用结点序列表示，并且分别简记为$P_1=(1, 3)$，$P_2=(1, 2, 3)$。当然由图1.7

可知，在结点v_1与v_3之间还有另一条通路$P_3=(1, 4, 3)$。

而图1·9（c）则称为结点v_1与v_3之间的一条回路，记作$C_1=(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_1)$或$C_1=(1, 2, 3, 1)$，这就是说，回路的终点与起点重合，形成一个圈。当然，对于图1·9（c），也可以说它是结点v_2与v_3之间的回路或图。简言之，回路就是圈。

一般地说，通路是边的一种序列，或者说是由一些边首尾相接形成的"链条"，其中每一条边及每一个结点均只出现一次。整个通路有一个起点，一个终点。把通路的终点与起点"搭上"，即终点与起点重合为一点，就成了回路；在回路上，没有起点与终点，只能说它包含某几个结点。所以，在无向简单图中，一条通路至少包含两个结点及其间的一条边；而一条回路则至少包含三个结点及其间的三条边。

2.连通性　如果一个图的任意两个结点之间，都可以至少找到一条通路，这个图就称为"连通图"。也就是说，在连通图上，我们从任意一个结点出发，都有通路可以走到其它的结点。否则就是"分离图"。图1·8（a）是分离图，因为从v_1无法走到v_4；而图1·8(b)，(c)以及图1·9均为连通图。

三、网络

有了以上概念，可以知道：§1.1给出的网络图1·1、1·2与1·3都是连通图。这些图的每一条边上都标有一个数字，这种数字既可以用来表示为作业工时$t(i, j)$，也可以表示一段公路的长度$l(i, j)$或一段管道的容量$c(i, j)$，等等，我们把这些工时、长度、容量等统称为"权"，并记作$W(i, j)$，$W(i, j)\geqslant 0$。

边（或弧）上赋予了权的连通图，就是"网络"。网络的英文是Network，如果一个图G(V, E)是一个网络，则可记为

N(V, E)。

四、有向图与无向图的关系

把有向图上的全部箭头去掉以后，所得到的无向图称之为该有向图的“相伴无向图”，图1·2就是图1·1的相伴无向图。

把无向图的每一条边都换成一对反向弧，则得到一个有向图，称为“对称有向图”，如图1.10所示。

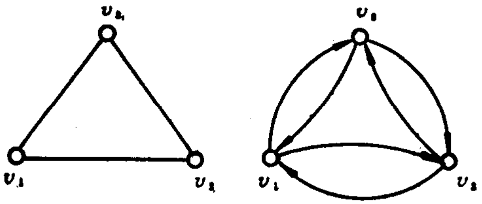

图1·10

用无向图来叙述图论和网络理论的概念比较方便，当要用到有向图上时，就要考虑该有向图的相伴无向图。

图1·11(a) 所示为不对称有向图，它可以约简为既有边又有弧的“混合图”(b)；或者相反，混合图(b)可以改画为不对称有向图(a)。

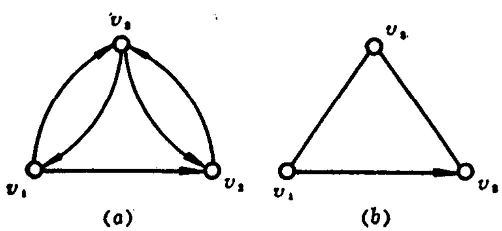

图1·11

五、图的同构与拓扑变换

1.图的同构　设$G_1(V_1, E_1)$与$G_2(V_2, E_2)$为两个无向

图，如果在V_1与V_2，E_1与E_2的元素之间分别建立了一一对应关系，且满足：一个图的每对结点之间的边对应于另一个图对应结点之间的边，则称G_1与G_2为同构。前述图1.7的(a)与(b)是同构的。同理，图1·12中的两个图也是同构的。因为在两图

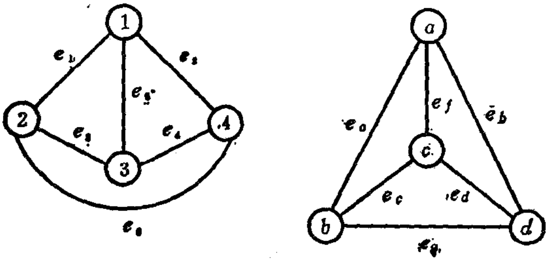

图1·12

之间有以下对应关系：

(1) $v_1 \sim v_a \quad v_2 \sim v_b \quad v_3 \sim v_c \quad v_4 \sim v_d$

(2) $e_1 = (v_1, v_2) \sim e_a = (v_a, v_b)$

$e_2 = (v_1, v_4) \sim e_b = (v_a, v_d)$

$e_3 = (v_2, v_3) \sim e_c = (v_b, v_c)$

$e_4 = (v_3, v_4) \sim e_d = (v_c, v_d)$

$e_5 = (v_1, v_3) \sim e_f = (v_a, v_c)$

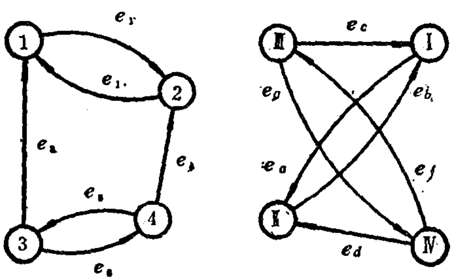

图1·13

$$e_8=(v_2,\ v_4)\sim e_g=(v_b,\ v_d)$$

类似地，我们可以定义两个有向图G_1与G_2之间的同构。例如，图1.13的两个有向图是同构的，读者可自行验证。

2.拓扑变换　保持连通性不变的变换称为拓扑变换(Topological Transformation)。研究拓扑变换的学问，称为拓扑学(Topology)。

图的同构的实质就是拓扑结构相同；或者说，通过拓扑变换，一个图能够变成另一个图。形象地说，若图的结点可以任意挪动位置而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，两个图可以互相转换，那么这两个图即为同构。故此拓扑学又称为橡皮膜上的几何学。

有了拓扑变换与同构的概念，我们就可以把给定的网络图根据方便与需要任意改画，只要它们是拓扑等价的。

§1.3　图论初步(二)

上一节介绍了图论中的一些基本概念，现在再叙述几个基本的定义。如果觉得它们费解，则不妨暂时搁置一旁。

一、元素与集合

集合论是现代数学的基础，用集合论的概念与符号可以准确、简明地叙述定义和命题。

定义1　具有某种共同特征的对象所组成的总体，称为一个“集合”(set)，其中每一个对象称为该集合的一个“元素”(element)。集合又可简称为“集”，一般用大写字母A，B，C，…，X，Y，Z表示；元素一般用小写字母：a，b，c，…，x，y，z表示（或e_i，$i=1$，2，…）。

如果a是集合A的元素，则可记作$a\in A$，读作“a属于A”或“A含有a”；如果b不是集合A的元素，则记作$b\overline{\in} A$，读作

“b不属于A”或“A不含有b”。

如果集合V包含有n个元素v_1，v_2，…，v_n，可记作$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$n$个元素为有限个，则为有限集合。我们所研究的图或网络，其结点元素与边（弧）元素均为有限个，所以是有限集合，故又称为“有限图”或“有限网络”；如果集合中n个元素为无限个，则称为无限集合，例如全体自然数的集合：$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$。

如果某个集合中连一个元素都没有，则称之为“空集”，记作Φ。例如方程$x^2+1=0$的所有实根的集合P就是一个空集，即$P=\Phi$，因为该方程没有实根。

上述几个集合又分别可以记作：

$$V=\{v_i \mid i=1, 2, \cdots, n\},$$

$$N=\{n \mid n\text{为自然数}\},$$

$$P=\{a \mid a\text{是}x^2+1=0\text{的实根}\}=\Phi$$

定义2 设有集合A与B，如果A的元素也都是B的元素，则称A是B的一个子集，记作$A\subset B$，读作“A含于B”或“B含有A”；

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等，记作$A=B$；

简言之，如果A的元素是B的一部份，或者说，取出B的一部份元素组成A，则A是B的子集。如果A与B两个集合的元素完全一样，则它们互为子集，称为相等。

特别地，有$A\subset A$，则A是它本身的子集，同理，$B\subset B$。

如果$A\subset B$，且$A\neq B$，则称A是B的“真子集”。这样至少有一个元素属于B而不属于A，或者说，没有取出B的全部元素来组成A。

二、图与子图

定义3 设$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$是