谢应齐　曹　杰　编著

FXX

FEIXIANXING DONGLIXUE SHUXUE FANGFA

非线性动力学数学方法

气象出版社

国家自然科学基金资助项目

非线性动力学数学方法

谢应齐　曹　杰　编著

气象出版社

内 容 简 介

本书是为学习、研究非线性动力学的读者编写的一本基础性教材。内容涉及微分方程定性理论、稳定性理论及分岔、突变、混沌、分形及奇异摄动方法等数学理论与方法。它既是理工类高等数学内容的深化与延伸，又是学习、研究新的科学领域的必需。

本书内容选择合理，概念清楚，力求深入浅出便于自学。适合于具有高等数学知识的各类理工类高年级本科生、研究生以及从事非线性理论应用工作的科技人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学数学方法/谢应齐，曹杰编著.-北京：气象出版社，2001.10

ISBN 7-5029-3210-0

Ⅰ.非… Ⅱ.①谢… ②曹… Ⅲ.非线性-动力学-高等学校-教材 Ⅳ.0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 048813 号

责任编辑：宋 钢 终审：汪勤模

封面设计：彭小秋 责任技编：刘祥玉 责任校对：李 明

气象出版社出版

（北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮编：100081）

*

北京市白河印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

*

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：234 千字

2001 年 10 月第一版 2001 年 10 月第一次印刷

ISBN 7-5029-3210-0/O・0087

印数：1～1000

定价：25.00 元

前　言

人们已经认识到，自然界大量存在的相互作用是非线性的，线性作用其实只不过是非线性作用在一定条件下的近似。对于线性问题，应该说已经有一套行之有效的处理方法和研究手段。这些方面的方法和手段都已在理工科各专业本科生的基础和专业教学中有了较系统的介绍。但是，对于非线性问题、非线性方程，长期以来则往往束手无策，只能具体问题具体分析，而无统一方法可循，这就制约和影响了包括大气科学在内的自然科学的发展。

20 世纪 60 年代以来，情况已逐渐有了可喜的变化，对非线性系统的研究取得了突破。一方面，对非线性演化方程的求解有了进展，对浅水波方程研究中发现了“孤波”，进而发展起了一套系统的数学方法；另一方面是在对天文学、气象学、生态学等若干自然科学领域一些相对简单的不可积系统的研究中，发现了确定性系统存在着对初值异常敏感的复杂运动形式——混沌。加之计算机技术的广泛应用，使过去用解析手段不可能处理的问题成为了可能，因而使得科学工作者有可能打破原有学科的界限，从共性、普遍性的高度去研究各种非线性系统的行为，从中得出规律性的认识。于是，一个揭示非线性系统共性、探索其复杂性的新科学领域——非线性科学就诞生了。

在对复杂世界的探索过程中，已建立了为数众多的学科。遗憾的是，各学科之间相互沟通、渗透甚少，“隔行如隔山”。而 20 世纪 60 年代后期逐渐建立起的非线性科学，包括耗散结构论、协同论、突变论等已在“大山”之间修桥铺路，把各学科沟通，甚至已在自然科学和人文社会科学之间架起桥梁。显然，非线性科学的发展、非

线性动力学诸多数学方法的出现都标志着人类探索复杂性的一步步深入，记载了人类认识世界和改造世界的一个个历程。

作为21世纪的科学工作者，不掌握非线性研究所最必需的基本知识、理论和数学方法，是难以肩负起时代所赋予的重任的。因而编著一本非线性动力学数学方法的专门书籍无疑是必要的。相信高校理工科专业的高年级本科生及研究生一定能从中收到裨益。

我们知道，函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系，但在大量的实际问题中遇到稍微复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系往往不能直接写出来，却比较容易建立起这些变量和其导数（或微分）间的关系式，这就是已熟知的微分方程。但在大学本科阶段，学习讨论的却只限于线性情形，对非线性微分方程则基本未加介绍。鉴于此，本书首先介绍作为处理非线性微分方程的定性理论和稳定性理论的基本概念。同时在论述非线性系统研究取得突破性进展时，也不可漏掉作为一种特殊相干结构的孤波和孤子。因为英国人罗素在1834年偶然发现了被称为“孤波”的现象，在61年后被两位数学家找出了一个非线性微分方程——浅水波KDV方程，这就具有类似于罗素孤波的解析解。之后，又过70年，人们进一步发现除了KDV方程外，其他一些非线性方程也可有孤波解，并且还发展出了一套系统的方法，找出了一批非线性方程的普通解法。更可喜的是，这些似乎纯数学的发现，不仅为实验证实，而且还找到了实际应用。所以，本书中也选编了以KDV方程为核心的非线性演化方程求解析解方面的内容。以上两部分内容就构成了第一章。

突变现象在自然界中普遍存在，它表现为在短时间内系统状态变化十分剧烈，其特点就是对外界条件的渐变将能导致系统宏观状态的剧变。显然，这只有在非线性系统中才可能出现。因而，不用非线性数学方法是难以解开突变之谜的。本书第二章就避开

突变理论所要涉及的众多高深数学知识，不顾及论证上数学的严密性，仅对七类初等突变加以较系统地介绍。

与非线性作用在无穷多自由度的复杂系统中可以促成规整性的孤波的发现相呼应，值得重视的是非线性科学近20多年来从另一个极端向人们展示了在微观和宏观两个层次上，由确定性方程描述的简单系统可以展现出一种极为复杂的、貌似无规则的运动——混沌。这就使得在概率论与确定性描述之间存在着一条由此及彼的通道。在前一阶段，对混沌的研究主要表现在计算机实验与物理实验上，目的在于借助分岔理论与突变理论等数学方法去揭示非线性系统如何通往混沌道路的。后一阶段则着重于借助多标度分形理论等数学工具去研究混沌的结构。

近20多年来分形几何的研究把人们引入了对现实世界几何体——分形的探索，引导人们去注意那些不能用通常的长度、面积、体积表示的非规则几何物体的性质。自然界的许多现象（包括混沌）从几何上讲都是不规则的，可以用分数维去描述。这一概念至今已在物理、化学、生物、材料和地学等许多领域得到了应用。现在，人们已认识到了分形与分维概念，既反映了与几何相关的一类新的动力学标度类型，又揭示了一些看起来是毫不相关的自然现象中的某种相同构造原则。为了完全揭示出系统产生相应结构的动力学特征，有人提出了重构动力系统问题，从而就使从理论模型上研究混沌的一些概念和方法便于移植到由实际观测资料所确定的系统上，分维、李雅普诺夫指数等描写吸引子性态的特征量就可由实际观测资料的时间序列中得到估计，从而推动了混沌向实际应用的转化。以上这些涉及到分岔、混沌、分形与分维的基本内容就构成了本书的第三、四、五章。

非线性微分方程的精确解一般是难以找到的，因此，不得不借助于寻找渐近解或数值解。而奇异摄动方法正是寻找近似解析解的有效数学方法。应变参数法、匹配渐近展开法、平均法等出现较

早，而多尺度摄动方法则是在20世纪60年代中期出现，各中摄动方法至今已在包括大气科学在内的诸多学科领域中广泛应用。本书第六章就专门在简要介绍了有关基本概念的基础上，叙述了常用的几类奇异摄动方法，特别重点讲述了多尺度摄动方法，并专门对掌握奇异摄动方法的关键——长期项(Secular term)的消除进行了讨论。

最后一章是前面各章所介绍的各类方法的应用举例，当然这只是众多领域中诸多应用事例中的几个。在书中简要介绍的目的在于引起读者的学习兴趣。

本书的内容曾作为研究生的一门学位课程讲授过多次，经过不断的充实和完善，现整理出版。在本书的编写中参考了书后所列的书籍和期刊，在此表示衷心感谢。由于编著者水平有限，缺点错误在所难免，敬请赐教。

谢应齐　曹　杰

2001年6月于云南大学

目　录

第一章　微分方程的定性理论与稳定性理论

在自然科学乃至社会科学的各个领域中，往往会遇到联系自变量、未知函数及其导数（或微分）的关系式，数学上称之为微分方程。定性理论是研究包括奇点和极限环在内的相平面或相空间中轨线的图貌及其性质，而稳定性理论则是研究特殊的或一般的非线性微分方程组解的稳定性态。对于那些难以找出其精确解析解的微分方程以及大量的非线性微分方程来说，它们提供了一种定性的研究方法。这在力学、现代控制理论、空间技术以及大气动力学研究中都有着广泛的应用。

§1.1　等倾线（等斜线）法

对于不易或不能找到其通解的解析方程来说，画出其所谓的等倾线（或等斜线），就能绘出方程的积分曲线的大致分布图形，从而就定性地给出了该微分方程解的一些信息。这种方法虽然是一种定性方法，它只有一定程度的准确性，但它却是重要的。以它为基础，在微分方程中逐步发展成为了一个重要分支——定性理论。

以一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1.1}$$

为例，定义其等倾线为：它是一条曲线，其上每一点的方向都相同，它的方程为：

$$f(x,y)=k$$

式中 k 是角的正切值。可以给 k 以不同的值,相应得出式(1.1)的不同等倾线。画出几条等倾线,就可以看出微分方程(1.1)的积分曲线的大致情形。

[例 1] 对于方程

$$\frac{dy}{dx}=y$$

其等倾线方程为:$y=k$,取 $k=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\cdots$ 可得对应的等倾线(均为平行于 x 轴的直线)。注意到 k 值即为积分曲线上与等倾线相交处切线的斜率(图 1.1)。可以看出与方程的通解 $y=ce^x$ 的图形是一致的。

71

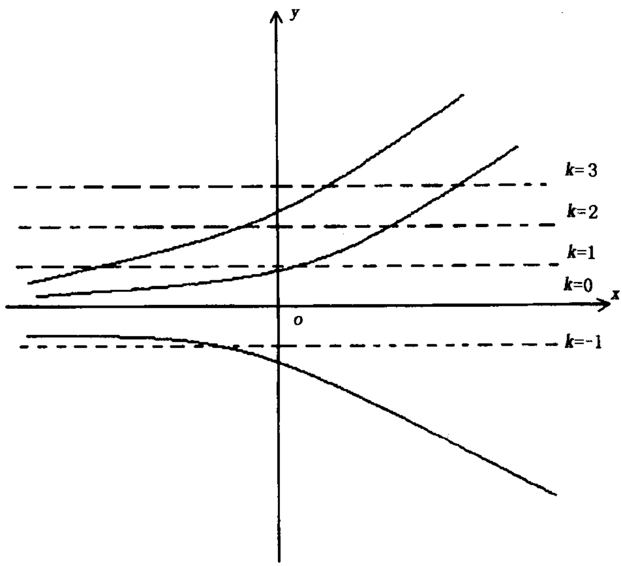


图 1.1

[例 2] 对于方程

$$\frac{dy}{dx}=x$$

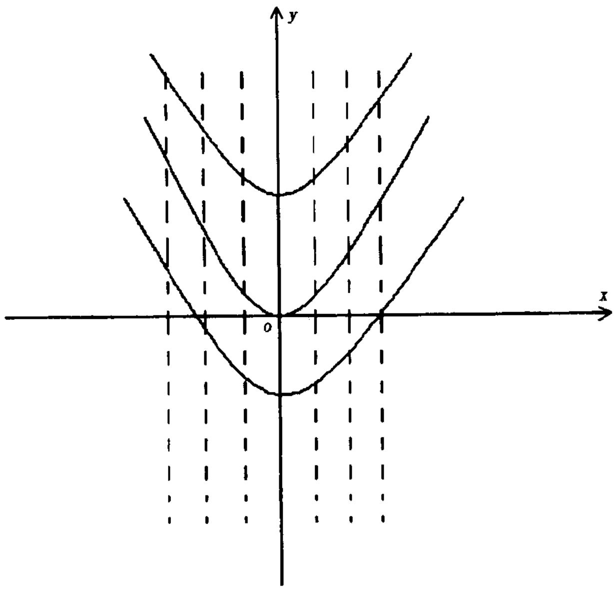
其等倾线为 $x=k$，若

取 $k=0$（方向角为 $0°$），等倾线为 $x=0$；

取 $k=1$（方向角为 $45°$），等倾线为 $x=1$；

取 $k=-1$（方向角为 $135°$），等倾线为 $x=-1$。

给出 k 的这几个值，就可以大致看出整个方向场的大致情况了。于是，从任意点出发，积分曲线的大体分布就可以画出来（图 1.2）。不难看出与所给方程的通解 $y=\dfrac{1}{2}x^2+c$ 的图形是一致的。



72

图 1.2

§1.2 定性理论中的一些基本概念

许多微分方程是不能用初等方法去求解的。如果不求出方程

的准确解，如何去了解方程解的性质呢？这就是定性理论要解决的问题。

我们用两个在质点振动中已为人们熟知的例子来引入定性理论的一些基本概念。

［例 3］ 无阻尼自由振动，其微分方程为：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \tag{1.2}$$

其通解形式为：

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\alpha)$$

式中 A 是振幅，ω_0 是频率，α 是初位相。

由初值条件：初位移 $x(0)=x_0$，初速度 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，即可确定 A,α 之值。

我们知道(1.2)式是描述质点的简谐振动，现在将其改写，用另一种方式对其加以讨论。

在(1.2)式中引入新未知函数，将其化成等价形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\omega_0^2 x\end{cases} \tag{1.3}$$

显然，其物理意义是：t 为时间，x 为位移，而 y 是速度。
方程组(1.3)的解应为：

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} \tag{1.4}$$

现在，我们将时间 t 不明显地直接表现在坐标系上，只着眼于 x-y 平面。从而从(1.4)式消去 t 后，得到的(1.3)式的解的表达式：$\phi(x,y)=0$，是 x-y 平面上的曲线，而(1.4)式正是此曲线的参数方程。

我们将 x-y 平面叫相平面，而点 (x,y) 叫做相点，$\phi(x,y)=0$ 叫做相轨线。显然，当 t 变化时，相点沿着某条轨线运动，其速度的

大小为：

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

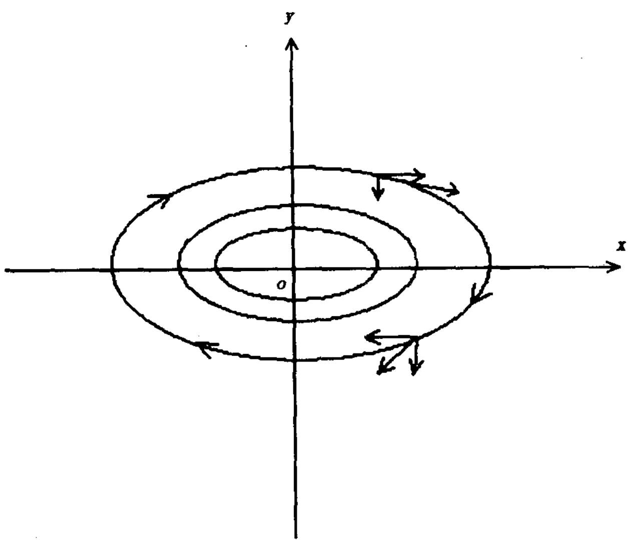
具体地，为求得相轨线$\phi(x,y)=0$，可将(1.3)两式相除得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\omega_0^2\,\frac{x}{y}$$

分离变量积分则得：

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{(c\omega_0)^2}=1$$

这即是(1.3)式的相轨线，它是x-y平面上的同心椭圆族(图1.3)。注意，若相轨线所满足的微分方程不易求得解析解时，就可用上节的等倾线方法画出其积分曲线的大致图形。



F3

图 1.3

由相轨线图 1.3，就提供了我们认识简谐振动的若干有用的性质：

(1) 每一椭圆对应一个周期运动，即经过一段时间后必然要回复到原来位置和原来速度，而且要重复继续下去。

(2) 相平面原点：$x=0,y=0$ 对应于平衡状态。

(3) 除了平衡状态之外，运动都做周期运动，而且相点都沿椭圆相轨道按顺时针方向运动。

事实上，由(1.3)式不难看出：在第一象限，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}<0$，$x$ 是单调增而 y 单调减；而在第二象限时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}>0$，从而 x,y 都是单调增；在第三象限时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}>0$，$x$ 是单调减，而 y 是单调增；在第四象限时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}<0$，$x$、$y$ 都是单调减的，这就表明相点将按顺时针运动。

[例 4] 有阻尼的自由振动，其微分方程为：

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{1.5}$$

当 $\mu^2<\omega_0^2$ 时，它的通解为：$x=Ae^{-\mu t}\sin(\omega_0t+\alpha)$，式中 A,α 等由初值条件确定。

若改在相平面上讨论，先将(1.5)式改写为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\omega_0^2x-2\mu y\end{cases} \tag{1.6}$$

为求出相轨线，两式相除，有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\omega_0^2x+2\mu y}{y} \tag{1.7}$$

此方程不易积分，改用等倾线法来作出(1.7)式的积分曲线的大致图形。

等倾线方程为：$-\dfrac{\omega_0^2x+2\mu y}{y}=k$ 或 $y=-\dfrac{\omega_0^2}{k+2\mu}x$

可见等倾线都是通过原点的直线，给 k 不同值，得等倾线为：

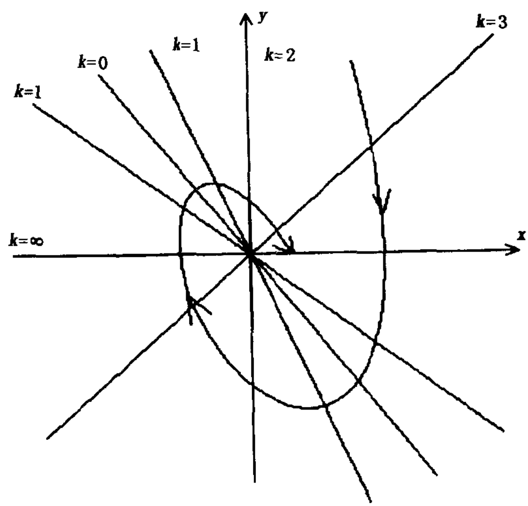
$k=0$ 时，有 $y=-\dfrac{\omega_0^2}{2\mu}x$；

$k=\infty$时，有 $y=0$；

$k=1$ 时，有 $y=-\dfrac{\omega_0^2}{1+2\mu}x$；

$k=-1$ 时，有 $y=\dfrac{\omega_0^2}{1-2\mu}x$；

$k=-2\mu$ 时，有 $x=0$(图 1.4)。



7-15

图 1.4

由此可大概画出相轨线，不同的初值得到不同的相轨线。它们是螺线族。

为了看出相点运动的情况，考察在上半平面，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y>0$，而在下半平面，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y<0$，于是可知相点沿顺时针方向运动而逐渐趋向原点。从图 1.4 显然看出，质点的振动是衰减的，当时间逐渐增长时，它将趋向于平衡位置。

我们来讨论一般的情形，引入相空间（或相平面）、轨线、常点与奇点的一般定义。

设方程
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=F(t,X)>0 \tag{1.8}$$
式中 $X,F(t,X)$ 均为 n 维向量函数。若初值条件为 $X(t_0)=X_0$，则满足初值条件的解为：
$$X=X(t,t_0,X_0) \tag{1.9}$$
且有
$$X(t_0,t_0,X_0)=X_0$$

对此可以从几何与物理上进行解释：

几何解释：若将 (t,X) 看成 $n+1$ 维空间的点，则由方程(1.8)确定此空间的一个方向场，而解(1.9)式表示过点 (t_0,X_0) 的积分曲线。

物理解释：若将 t 视为时间，X 看作 n 维空间的点，则由方程(1.8)表明在某一特定时刻 t 下，在 n 维空间中确定了一个速度场，$f_i(t,X)$ 表示在点 X 处的第 i 个速度分量。而解(1.9)式正是动点在速度场中的运动，并在 $t=t_0$ 时，动点位于 X_0 处。这里有
$$F(t,X)=\begin{Bmatrix} f_1(t,X) \\ f_2(t,X) \\ \cdots\cdots \\ f_n(t,X) \end{Bmatrix}$$

重要的情况是，如果方程(1.8)有常数解，而 $F(t,X_0)=0$，此时 $X=X_0$ 是平衡状态。于是，我们称：方程(1.8)为一个动力学体系或微分动力系统，n 维空间 $\{X\}$ 称为相空间，解 $X=X(t,t_0,X_0)$ 为一个运动。而运动在 n 维空间中所经历的路径称为相轨线或轨线。若方程(1.8)右端 $F(t,X)$ 依赖于 t 时，即表明在不同时刻，方程确定出不同的速度场。这种动力系统叫做非定常系统（或非自治系统、非驻定系统）。若右端不依赖于 t，即(1.8)式成为：
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=F(X) \tag{1.10}$$