

怎样解题

ZEN YANG JIE TI

[美] W.A.威克尔格伦

原子能出版社

37.47
399

怎样解题

〔美〕W.A.威克尔格伦 著

汪贵枫 袁崇义 译

37.47 / 399



内 容 简 介

本书讲述解决各种问题（包括数学及其它科学、工程等方面的问题）的有关理论和主要方法。当我们对某类问题的求解不知从何入手的时候，总是急于找到一种切实可行的方法来迅速求得准确的答案。当我们阅读别人写的习题解答时，往往能理解其演算过程，但不知道是怎样想出来的。所以当自己遇到形式变化了的类似题目却解答不了。那么解题的思路有什么规律性？本书就是为帮助读者解决这个问题而写的，书中所举例题生动有趣，通俗易懂。它将帮你提高思维能力和解题能力。本书适合于青年工人、中学生、大学一、二年级学生，以及具有初中文化程度的广大干部阅读。译者汪贵枫是美籍华人，物理学博士，对解题方法素有研究。

怎 样 解 题

〔美〕W.A.威克尔格伦 著

汪贵枫 袁崇义 译

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

北京岳各庄印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ ·印张 $8\frac{7}{8}$ ·字数195千字

1981年9月第一版·1982年9月第二次印刷

印数 64001—106000·统一书号：7175·376

定价：0.82元

译者的话

作为一个海外华人，我时时都在关注着祖国的进步。能有机会为祖国的现代化建设出点力，我是引为荣幸的。

我很喜欢我们翻译的这本书。现在把它献给祖国年轻的朋友们。一切热爱学习的人，也许都能从中得到一点益处。

我受的教育，从小学到大学毕业，老师们都是强调背笔记，因而缺乏独立思考的训练。甚至在我当研究生攻读学位时，还是缺少足够的勇气自己去钻研新问题。一直到近年来因工作上的需要，解过各种不同类型的问题以后，头脑才灵活起来，才算是突破了做研究工作的一道难关。

近年来国外对人工智能的研究进展很快。人工智能的研究对象，是各种智慧性问题的形式解法，目的是让计算机来解这些需要智慧的问题，如图象识别、定理证明、下棋、作曲等。要把这些问题的解法抽象出来加以形式化，必须先对一般正常人解答这些问题的过程有个透彻的了解。近年来的研究，已经对人脑解题的思维过程有了较深的认识。这本书就是讨论对解题过程的这些认识，用简单的例子，作详细的说明。这些深入浅出的内容，不但可供对人工智能有兴趣的研究者参考，而且一般的在学青年，都可以借此熟悉各种思考方法，学会使用通用的解题法解决数学、科学和工程方面的问题。这本书其实主要是为高中和大学的学生们写的。广大的知识青年，无论是自修或是上学，都可以从这本书学到很多东西。也许现在你解起题来是盲目的和碰运气的，读过这本书以后，你就会发现，你已经学会了一套系统的解题法，

不需要再碰运气了。

汪贵枫 寄自美国科罗拉多州 81.2.25。

原 序

我在上大学的时候，常常由于不会解数学习题和其它科学问题而十分恼火。加起来大约总有几百小时，我脑子里一片空白，眼呆呆地望着那些题目却不知从何下手。那时候我就感到这些时间是白白浪费掉的，对我的学习没有任何帮助。现在我也看不出它的价值。本书介绍的通用解题法将保证你在同样的情况下，绝不会脑子空空，束手无策。这些方法将帮助你更快地解出许多问题。即使在难题面前，你也有许多方法可以试用。一般说来，每道难题都有其关键。出题的人，就是要测验你对这一关键了解到了什么程度。熟悉了各种解题法以后，你往往一看就知道关键所在。不管你能否最终成功地解出某个具体问题，你会觉得解题过程很有趣，而且你也总会从中学到新东西。

二十年来，人工智能和用计算机模拟思维这两门科学都发展很快。本书在理论上和实践上对问题本身及解题方法所做的分析，受到这两门科学很大影响。在这两方面的研究者中，对本书贡献最大的是：艾伦·纽厄尔 (Allen Newell)，赫伯特·西蒙 (Herbert Simon) 和乔治·波利埃 (George Polya)。纽厄尔和西蒙对问题和解题法的分析，是我在这一领域做研究工作的起点。本书中许多最好的概念，就是属于他们的。其它许多好概念则差不多直接来自波利埃。他的几本关于数学问题解法的书，是解题法的丰富源泉，也是对人们不断提高思维能力的一种激励。

1959年，我在哈佛大学读书的时候，第一次了解到纽厄

尔，克立夫·肖 (Cliff Shaw) 和西蒙在计算机模拟思维方面的开创性工作，于是开始努力了解和系统地收集解题法。后来我到伯克来加州大学 (the University of California, Berkeley) 做研究生，就把解题法作为我的主要研究领域。我对于解题法的试验研究虽然没有什么大成就，但我过去和现在都认为我对问题和解题法理论上的（数学上的）理解力大大提高了。这使我能够解各种各样的数学问题。我到麻省理工学院 (MIT) 心理系任教不久，就决定开一门讲授解题技巧的课。学生们很喜爱这门课。更重要的是，几年后学生们告诉我，由于学习了通用解题法，他们解数学、科学和工程中问题的能力大大提高了。三年之内，选课的学生从20人增加到80人。这时我的主要研究兴趣已经转移到人类记忆，就不再开设这门课。几年后我来到俄勒冈大学 (the University of Oregon) 任教，决定花些时间写本书，把我学来的和我自己的有关解题法的所有想法都包括进去。

这本书的目的，是增进你解各种问题（数学、科学、工程、商业或纯消遣性问题如智力测验和游戏等）的能力。它的主要对象是1—2年级学习基础数学、科学和工程的大学生。我希望数学程度稍差的学生不花费太多的力气就能看懂本书，并掌握这些通用解题法；我也希望数学程度较高的学生或其他读者有所收获，而且不觉得索然无味。我相信几乎每个常解数学问题的人读了本书以后都会觉得获益非浅。我写书的时候，考虑到了所有读者的各种需要。书的写法是，首先定义一种解题法，然后把它应用到简单的消遣性数学问题。只要在高中学过一年代数和一年平面几何，任何人都能解这些问题。每种解题法，都是这样介绍的。如果你对一些

新的数学分支（集合、不等式、函数、概率等等）有所了解，那就更好了。本书第10章扼要地介绍这些新分支的某些内容。

在解各种例题时，我采用启发式，一步一步阐明解法，每一步都先让读者有机会自己接着解下去。之所以采用这种方法，是因为我相信：你自己发现的东西会记得最牢。这本书将指导你去发现怎样把通用解题法应用到各种各样的问题上去。如果你在阅读本书时，能把各种方法应用到50至100个你自己的问题上去，那你的解题能力肯定会大大提高，从而你的工作或考试成绩一定会更好。

一九七三年十月
W.A.威克尔格伦

目 录

译者的话

原序

1	引言	1
2	解题理论	7
3	推理法	23
4	行动序列分类	47
5	状态估值与爬山法	69
6	中途点法	97
7	归谬法	115
8	倒推法	146
9	问题之间的关系(类推法)	162
10	信息的数学表示	194
11	数学、科学和工程中的例题	222
	参考文献	273

· 38239

1 引 言

本书的目的是帮助你提高解各种数学、科学和工程问题的能力，请记住这一点：让我先介绍一些关于解题理论的基本概念和原理。自五十年代以来，计算机的问世促进了人工智能和计算机模拟思维这两方面的研究。到现在，我们对解题理论已经了解很多了。我尽量以一种简单而又逻辑性强的方式来安排讨论这些概念，使你能更好地理解、记忆和应用它们。

可是需要提醒你，解题理论目前还很不完善，不要指望它会象食谱一样，你只须照办就行。由于这一原因，也由于示范教学法本身的优点，本书基本采用示范教学法。首先，我将从理论上讨论一个解题法，然后把它应用到各种问题上。这样你可以看到在实践中怎样使用这一方法。

要掌握这些方法，你一定要按照本书的引导，把例题都解一遍。本书花了很大篇幅来分析可以用不同方法解的例题。你必须仔细研究这些例题。如果你不能全部理解理论上的讨论，也不要泄气。解题理论无疑会帮助数学基础较好的学生理解这种理论讨论；基础稍差的学生，只要在例题上多花些时间，也可以逐步弄通其中奥妙。

本书范围

这本书基本上是解同一类问题的指南。我们把这一类问

题称为形式问题或简称问题(后文将说明形式一词的含义)。形式问题包括数学上的求解题和证明题,但不包括只有数学界才感兴趣的如何定义公理系统的问题。由于只在基础数学某些领域才用得着定义公理系统,所以一般选学数学课的学生没有什么机会接触它,因而这些学生很难发觉把公理系统定义问题排除在外的实际含义。

类似地,在任何科学领域中建立新的数学理论也不是我所说的形式问题,所以这本书也不讨论它。除此而外,数学上、科学上和工程上任何其它问题在本书的意义下都是形式问题。

日常生活中的问题,如你早饭该吃什么,是否该和某人结婚,该不该退学,怎样才能使你自己更加用功读书等等,都不是形式问题。目前还不可能把这些问题转化为形式问题,因为这些问题的已知条件,解题的可行步骤都不清楚。我们甚至不能正确地说明解这些问题的目标是什么。你对解形式问题的方法有所了解,无疑会使你思考这些个人问题时思路清晰些,但本书不包括这些问题。即使本书包括了这些问题,也无法把这类问题的答案一步一步、清清楚楚地写下来。

形式问题包括人们可能遇到的大量实际问题,虽然这些问题通常是朋友向你提出来的或刊登在杂志上的游戏题。例如在河上架桥的问题。如果限制你只能使用一定的材料(已知条件),只能采用一定的施工步骤,目标当然是架起这座桥,那么这就是个形式问题。

如果你是真的要实地架桥,你可能先考虑这些限定的条件。如果不能得到解,你可以做出决定,在可能的范围内增

加一些材料。但解形式问题时不允许增加已知条件。在形式问题中经常出现的情况是，某些已知条件是伪装的或隐含的，有些甚至会把你诱入歧途。所以，正确地找出所有已知条件是解形式问题的重要技巧。后文将会讨论这一技巧。

要解数学上、科学上或工程上的问题，你必须对那一学科有相当的了解，并受过一定的解题训练才行。智力游戏一类的问题则不同，它差不多是人人都能了解的。因此这类问题适合于作为例题，使最广泛的读者能理解通过这些例题说明的解题法。由于这一原因，本书除最后一章外，差不多都用这类问题做例题。

原则上似乎最有效的解题法应该只适用于数学、科学或工程的特定领域，不同领域应有不同的方法，其实不然。虽然确实有一些只适用于一定领域的专用方法，但许多解题法都是普遍适用的。

也许这些专用法及使用专用法所需要的基础知识很难学，但你可以在学校的课堂上学到它们。与此相反，尽管通用解题法在数学、科学和工程的每一领域都很有用，课堂上却极少教授这些内容。

通用法和专用法的关系

专门知识和专用法与通用解题法之间的关系叙述如下。如果你很熟悉某些专用法及有关知识，并且已经很有应用它们的经验，那么在遇到类似的新问题时，只要使用这些老方法就行。这时可以把这种专用法看成是适用于你所熟悉的那类问题的通用解题技术。总之，如果你遇到的问题属于你已经解决过的那一类，你根本不必有意识地明确地思考用什么

解题法，照搬旧法就是了。一旦你对有关知识的了解达到了这种程度，通用解题法对你就没有什么价值了。例如数学课、科学课和工程课的大部分习题和考题，都是可以依样画葫芦的。

如果问题较复杂，需要分几步来解，与你已经解过的问题也不大一样，那么通用解题法会给你很大帮助。不过高中生或大学里刚开始学习数学、科学和工程课的学生们很难遇到这种难题。对这些学生来说，更直接更重要的是通用法能帮助他们解他们不那么熟悉又没有经验的习题和考题。在这种情况下，通用解题法可以指导他们找出解题需要的背景知识。例如，如果一个学生懂得通用的中途点法，那么通常他能够找出某个具体问题的中途点。这些中途点往往直接表明，这个问题是要测验（因而也是教授）学生对哪些知识的了解，于是他就知道，需要重读课本的哪些部分才能掌握解这道题的有关知识。

可是，考试一般是不许查书的。这时，通用解题法能有力地帮助你从记忆中找出需要的知识。例如，通用解题法能帮你抓住那些需要用公式计算的量，而且帮你从若干公式中选取合适的公式。通常，一个学生可能知道所有的定义、公式及其它知识，就是不知道怎样通过题目的暗示把知识和问题联系起来。

有了使用某些知识解有关问题的大量经验，人们往往能够在这些知识和与之相关的问题之间建立起很强的直接联想。可是在学习的开始阶段，学生们缺少这种直接联想。他们需要通用解题法的帮助，才能更好地从记忆中或从书本中找出与解题有关的知识。如果这一说法是对的（本书的目的

就是要使你相信它是对的),那么掌握通用解题法就很重要。掌握了通用解题法,你既可以把解题作为学习的工具,又获得了最广泛地应用你已经学到的知识的能力——在考试中用,在工作中用,在任何需要的场合用。

本书的目的就是要把我所知道的通用解题法尽可能地都教会你。如果你花些时间学会这些方法,你就可以更有效地学习其它科目。此外,由于从各门功课学到的解题能力基本上只适用于解该课程范围之内的问题,所以,本书能提高你应用所学知识的能力。

与人工智能的关系

应该强调指出,这本书基本上是教你如何去做的实用书。目前,在本书所涉及的领域中,用精确的(数学化的)形式语言描述问题的水平还很低。将来,也许在不久的将来,肯定会有很大发展。人工智能和用计算机模拟人解题是当前很活跃的研究领域,其中某些结果已给本书很大影响。但是,问题及其解法迅速向着理论化、形式化的方向发展,最终肯定会使本书介绍的形式化过时。不过,尽管本书介绍的方法还很不完善,掌握这些方法总是会给学生们带来好处的。将来有了关于问题及其解法的漂亮的新理论时,就可以写出一本更清楚更有效的新书了。眼前,希望本书能帮助许多人提高解题能力。

怎样把方法应用于问题

前面说过,要掌握本书介绍的解题法,必须学习用来阐明这些方法的例题。从第3章到第10章,每章都讲一种不同

的方法。每章选用的例题和例题的解法都是为说明该章所讲的方法的。第11章讲的是数学课、科学课和工程课的各种习题和考题。当然，你很可能有你自己学习上或工作中的问题要解。你应该尽早开始把所学的方法应用到这些问题上去。仅仅阅读本书，只能为你提供一些掌握通用解题法所必需的初步概念。实际应用这些方法，才能使你学到解题的真本领。

每个解题者都在自觉或不自觉地使用着本书介绍的许多甚至全部解题法。但是，如果你本领不很到家，使用起来就不那么有效，而且很可能是碰巧偶然地使用了某种方法。只要经过训练，就不会这样。初学时，你要相当自觉地、慢慢地对每个问题进行分析，才能把这些方法应用好。如果你一看就知道某个问题应怎样解，那就没有理由再要求你仔细地自觉地分析它，你“自然地”去解就是了。不过，在你解出以后，或最好在你解题的过程中，分析一下每步你在做什么。这会大大加深你对解题法的理解。而且，也许你能发现新方法或老方法的新应用。

由于你在应用这些解题法上有了广泛的经验，你应该能够十分熟练地应用这些方法，应用的时候不再需要那么伤脑筋，而是比较自动地或自然地就知道用了。不管是开车、打球还是解数学题，这都是学习技巧的必然过程。

2 解题理论

四个例题

我们从介绍四个例题着手,说明与解题理论有关的概念。

立即疯

立即疯是在北美洲很流行的一种游戏。它用的器材是四个大小一样的塑料方块。每个方块的每个面都涂上红、蓝、绿、白四色之一,而且每个方块都有四个面恰好是这四种颜色,另两个面则是重复涂上这四色中的一色或两色。

图2-1画出了这些方块各个面的颜色配置。为方便起见,我们已经把这些方块沿着棱剪开摊平。(要从平面图再恢复成方块,只要把每张图沿外轮廓线剪下,上面的一片弯下去是方块的顶面,下面的一片卷起来是方块的底面,左右两边的三片则是方块的两侧和背面。)每个方块的六个面已经在图中注明前后、左右、上下。如果你的脑子好,也许可以想象出每个方块及其各面的颜色,但是你如果自己设法买一套或做一套可能更好。

立即疯游戏的目标是设法把四个方块一个一个地摆起来成一方柱,使方柱的四个侧面都恰好有红、蓝、绿、白四种颜色。(这游戏看起来简单,做起来极难,玩起来往往气得人发疯,故得名立即疯。——译者注)

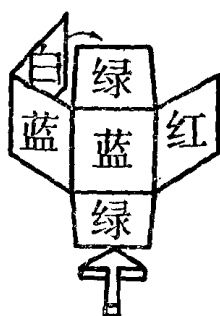
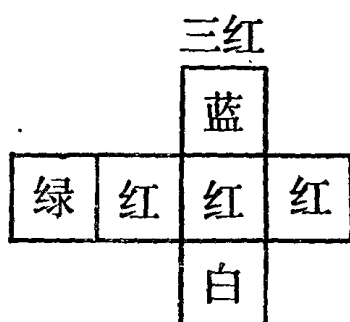
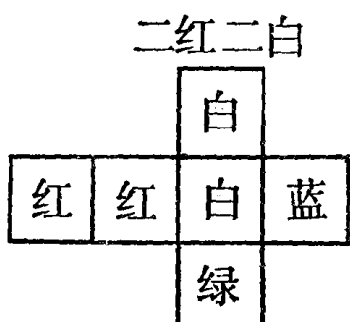
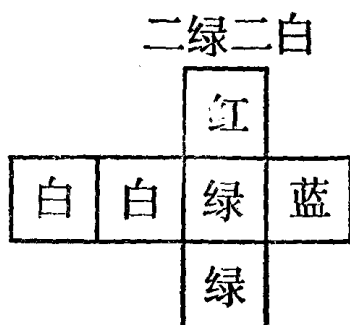
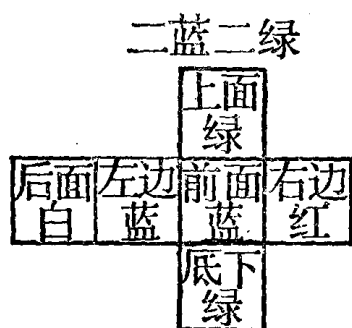


图 2-1 立即疯游戏中四个彩色方块各面的着色。你可以把上面的图一个个剪下来，沿着边摺起来。我们可以用每个方块上的颜色来命名它们：二蓝二绿，二绿二白，二红二白和三红（每个方块上都有四面为红、蓝、绿和白，命名中不包含只有一面着色的颜色）