数理化自学丛书
立 体 几 何
数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
北 京 出 版 社 重 印
北 京 市 新 华 书 店 发 行
北京第二新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 218,000
1978 年 5 月第 1 版 1978 年 12 月第 1 次印刷
书 号: 13119·727 定价: 0.68 元

目　录

第一章 直线与平面

平 面

§1·1 平面以及平面的判定

在平面几何的绪论里已经讲过：体的界限是面．面就是物体的表面，有平的和不平的．现在先讨论物体表面是平的情形．象窗玻璃面、平静的水面、桌子面等等，这些都给我们平面的形象．

木工用角尺检查刨的木板是否平整，水泥工用一根直的木尺在刚铺水泥的面上刮平，这些做法，都与平面的性质有关．木工常常用角尺的一条直边放到刨过的木板表面（图 1·1），看角尺的这条直边是不是处处和木板面密合；如果把角尺随便放到木板表面的任何位置，角尺的直边总是与木板表面密合的，这就说明这块木板已刨平了，也就是这木板表面已被刨成平面了．这里必须注意，在检查时只要发现一次角尺的直边不与木板面处处密合，这就表明木板表面还没有刨平．

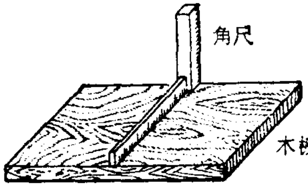


图 1·1

木工用角尺检查板面是否刨平的方法，水泥工利用直的木尺铺平路面的方法，这些都是劳动人民经历了无数次实践的结果．人们用这个总结出来的经验来判定一个平面，把这

个经验写成定理的形式就是

经过面内任意两点的直线，如果这直线全部在这个面内，那末这个面是平面.

我们也可以利用这个性质来判定不平的物体表面. 例如，玻璃瓶、煤气管、茶杯等的表面都不是平面. 如果用直尺去检查一下，很快就会发现它们的表面与直边不可能总是密合的，这就从反面证明了上述各物的表面是不平的.

§1·2 平面的表示法

日常生活中所看到的平面图形，如地板、桌面、匣子表面等，它们的周界都是确定的，而且比较常见的是矩形. 当我们站在适当的位置和距离去观察一个矩形的表面时，看上去都象一个平行四边形. 因此我们常把矩形表面画成平行四边形，这样可使图形有立体感(图 1·2).

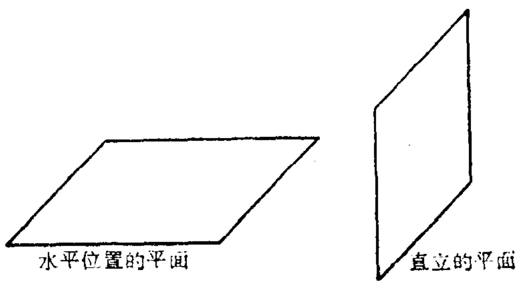


图 1·2

上面的左图是表示水平位置的平面，右图是表示直立的平面. 在平面内画空间图形的时候，通常画一个平行四边形以表示平面. 但必须注意：用平行四边形表示平面仅仅是表示平面的一部分，而整个平面应当想象它是无边且无限延伸

开来的一片平面.

表示一个平面的方法，通常用一个大写的字母写在平行四边形某一顶角的内部，如图1·3中的M，记做“平面M”. 有时也用平行四边形对角的两个大写的字母来标明，如用“平面AC”或“平面BD”等来表示.

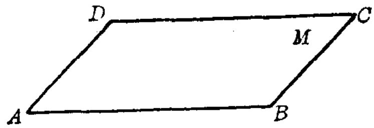


图 1·3

注意 (1) 用一个字母或两个字母表示平面的时候，在字母前面应该写“平面”两个字，以免与点、直线混淆.

(2) 当画一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应该把被遮住部分的线段画成虚线(图1·4左)或者连虚线也不画(图1·4右).

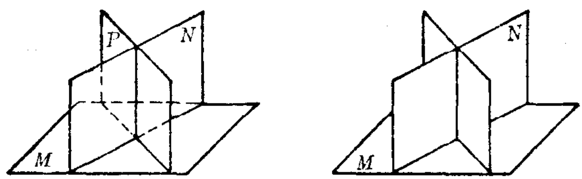


图 1·4

§1·3 在水平位置的平面内画平面图形

在水平位置的平面内画平面图形，一般分下面几个步骤:

(1) 先画出水平位置的平面$\left(\text{一般用 } \alpha=45^\circ,\ k=\dfrac{1}{2}\right)$.

(2) 把平面图形上的一条边画成水平方向，也就是和平行四边形的横边平行，它的长度等于原来的长度，或者按比例尺的长度.

(3) 在平面图形上如果有垂直于该边的线段(看作垂直于水平方向)，就把这些垂直线段画成和平行四边形的纵边平

行(就是和横边成 45° 角)，垂直线段的长度等于原来长度的一半，或按比例尺长度的一半截取.

(4) 对于其他位置的线段，应当先在原来的平面图形上从线段的各个端点画出这水平方向边的垂线，再按(3)画出这些垂直的线段，端点确定后就可以画出这些线段了.

下面用例题来说明如何在水平位置的平面内表示平面图形$\left(\text{在下列各例中，水平位置的平面 } P \text{ 内的作图中取 } \alpha=45^\circ,\ k=\frac{1}{2}\right)$.

例 1. 在水平位置的平面 P 内表示已知的正方形 $ABCD$ (图 1·5).

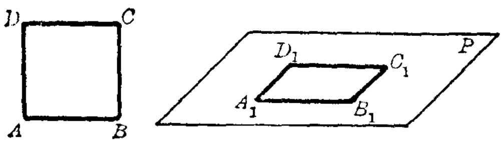


图 1·5

横边 AB 移到水平位置的平面 P 内为 A_1B_1，它的长度不变. 但纵边 AD 和 BC 移到平面 P 内时，须画成与线段 A_1B_1 成 45° 的角，并且它的长度为原来实长的一半. 则 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所要画的正方形.

例 2. 在水平位置的平面 P 内表示已知的 $\triangle ABC$ (图 1·6).

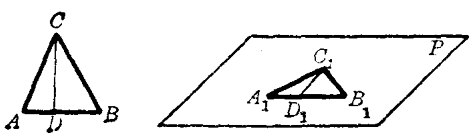


图 1·6

先在$\triangle ABC$内作高CD. 在平面P内作$A_1B_1=AB$, A_1B_1须与表示平面的平行四边形的横边平行. 在A_1B_1上取D_1点, 使$A_1D_1=AD$. 再由点D_1作一直线使它与A_1B_1成45°的角, 并且自点D_1起在这线上截取$C_1D_1=\frac{1}{2}CD$, 从而得出点C_1. 连C_1A_1和C_1B_1, 那么, $\triangle A_1B_1C_1$就是所要画的三角形.

例3. 在水平位置的平面P内表示四边形$ABCD$(图1·7).

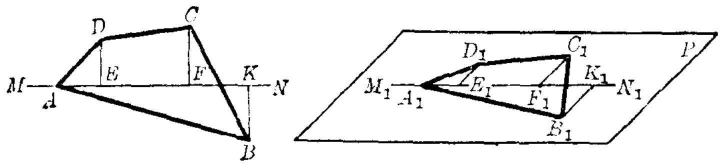


图 1·7

除了上面所说的把一条边画成水平的方法那样, 还可以采取如下的作法. 过四边形的顶点A作一条水平的直线MN. 从B、C和D各顶点分别作BK、CF和DE垂直于MN.

在平面P内, 任作一条和横边平行的直线M_1N_1. 在M_1N_1上任取一点A_1; 再在M_1N_1上顺次截取A_1E_1、E_1F_1和F_1K_1分别等于AE、EF和FK. 过E_1、F_1和K_1分别画出和M_1N_1成45°的直线; 在这些直线上取E_1D_1、F_1C_1和K_1B_1分别等于$\frac{1}{2}ED$、$\frac{1}{2}FC$和$\frac{1}{2}KB$. 分别连结A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1和D_1A_1, 则$A_1B_1C_1D_1$就是所要画的四边形.

例4. 在水平位置的平面内表示一个已知的圆(图1·8).

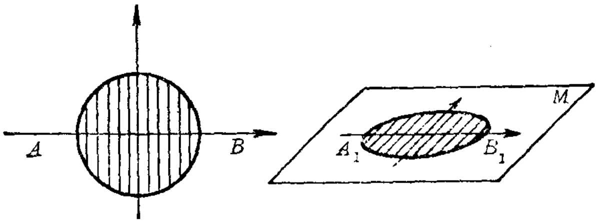


图 1·8

在已知圆内，画一条水平直径 AB. 把这直径 n 等分(图中 $n=12$)，过各个分点作直径 AB 的垂线.

在平面 M 内画一条水平直线，在此直线上截取 $A_1B_1=AB$. 并且，将 A_1B_1 也 n 等分(图中 $n=12$).

过 A_1B_1 的各个分点，画出与 A_1B_1 成 45° 角的直线，再分别在这些直线上截取等于对应原弦长的一半且被 A_1B_1 平分的各线段.

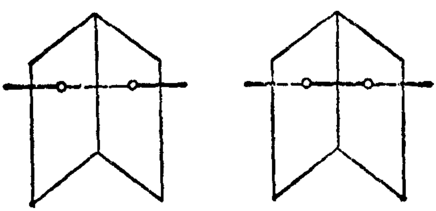
顺次连结上述线段的端点所成的平滑曲线，就是在水平平面 M 内所表示的已知圆.

习 题 1·3

1. 对于一个正方体，试分别用记在角上的两个大写字母来表示出上下前后左右六个平面.

2. 观察一只漱口杯，哪一部分是平面？哪一部分不是平面？

3. 观察下面的两个图形，它们有什么不同？



(第3题)

4. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=45°,\ k=\frac{1}{2}\right)$ 内表示一个已知的矩形.

5. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=45°,\ k=\frac{1}{2}\right)$ 内表示一个已知的直角三角形.

6. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=45°,\ k=\frac{1}{2}\right)$ 内表示一个已知的正六边形.

7. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=45°,\ k=\frac{1}{2}\right)$ 内表示一个已知的直角梯形.

8. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=30°,\ k=\frac{1}{3}\right)$ 内表示一个已知的三角形.

9. 在水平位置的平面 $P\left(\alpha=60°,\ k=\frac{2}{3}\right)$ 内表示一个已知的正方形.

§1·4 平面的基本性质

研究空间图形的性质,同平面几何一样,也是依据几何公理作为基础的. 研究空间图形的性质,又必须充分应用平面图形的性质. 因此,在立体几何里首先要讨论关于平面基本性质的三条公理.

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内,那么这直线上所有的点都在这平面内.

这条公理描述了平面的基本性质,它是用直线与平面的关系来揭露的. 只要直线上的任何两点在一个平面内,这两点可以落在这平面内的任何位置,那么这条直线上的所有点就都落在这个平面内了. 这时,我们称直线在平面内,也可以

说成平面通过这直线．因此，如果要知道一平面是否通过某一直线，只要知道这平面通过这直线上的任何两个点就可以了．§1·1提到的判定平面的那个定理就是根据这条公理推导而得到的．从这条公理可以推知，如果一个多边形的各个顶点都落在同一个平面内，那末就可以断定这个多边形上的所有点全部落在同一个平面内；具有这种性质的多边形称为**平面多边形**．反之，如果一个多边形的各个顶点不能全部落在同一个平面内，这个多边形通常称为**空间多边形**．

公理 2　过不在一直线上的三点可以画一个平面，也只能画一个平面．

这条公理可以简单地说成：不在一直线上的三点确定一个平面．这里所谓"确定"是指"可以而且唯一"地确定一个平面的意思．

这条公理同样来自劳动人民经验的积累．例如，农村中常常用三根竹竿张开来架在地面上做成三脚架，在两只这样的架子之间搁上一根竹竿，就可以用来晒衣服，这样架起来的是很平稳、很牢固的．这主要是运用了上述的公理，张开的三根竹竿和地面接触的一端，就相当于不在同一直线上的三个点，而这样的三个点就可以确定一个平面．

我们还常看到，木工锯木料时用的三脚马，老年人用一手杖后就可以比较平稳地行走，平板仪和照相机所用的三脚架等，这些都是这一公理的实际例子．

公理 3　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于经过这点的一条直线．

在很多地方都可以看到这一公理的实际应用．例如，两堵墙壁的相交处都是一条直线，因为墙壁都砌得很平，所以两堵墙壁和两个平面一样，它们相交处一定是一条直线．又如

把一张纸折起来，并且把纸折平所成的折痕就是一条直线；如果折纸时不把纸折平，那么折痕就不是一条直线了。这里说明了一点，就是两个平面的相交处一定是一直线，而两个面中只要有一个不是平面，那么它们的相交处就不一定是一直线.

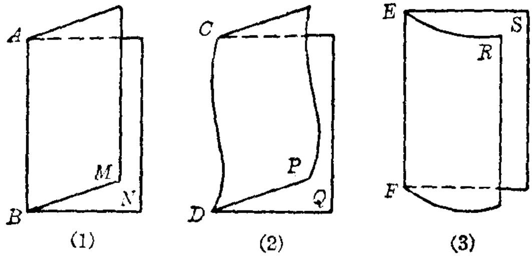


图 1·9

如图 1·9(1) 中，平面 M 和平面 N 相交于直线 AB.

如图 1·9(2) 中，平面 Q 和曲面 P 相交于 CD，显然，CD 是一条曲线. 而在图 1·9(3) 中，平面 S 和曲面 R 相交于 EF，但 EF 却是一条直线.

对于公理 3，也许有人会怀疑：两个平面能不能只相交于一点？正确的回答是不可能的。因为平面实质上是无限伸展的，既然两个平面有了一个交点，那末只要扩展这两个平面，一定有无数多个交点，而且这无数个交点必然在一条直线上（图 1·10）.

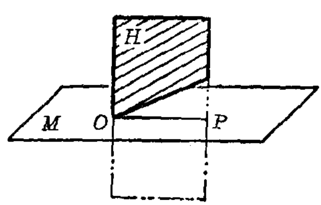


图 1·10

如图 1·10 中，平面 M 和平面 H（如只画成有阴影的部分）相交于点 O，如果把平面 H 画大一些（图上用 ------- 画出的部分），平面 H 就和平面 M 相交于直线 OP 了.

上面叙述的三条平面公理，是讨论空间图形性质的基础．公理1是描述平面的基本性质，公理2是确定一个平面的根据，公理3是描述两平面相交的关系．

学习空间图形的性质，或者计算图形的大小，都要先画出空间图形，而空间图形又只能画在一个平面内，这与平面几何里画平面图形是不相同的．因此，完全依赖于圆规和直尺就不能把空间图形画在平面内，还必须根据平面公理和图形的某些条件来研究画空间图形的方法．因此学会画立体图形就成为学习立体几何的基本训练了．希望读者在学习过程中随时注意这一点．

§1·5 关于确定平面的几个推论

具有哪些条件可以确定一个平面？我们以平面公理2为基础，再应用其他两条平面的性质公理，就可以推导出具有哪些条件即可确定一个平面的几个推论：

1．一条直线和这直线外一点，可以确定一个平面 如图1·11，已知直线 a 和直线 a 外的一点 A，我们来证明直线 a 和点 A 可以确定一个平面．

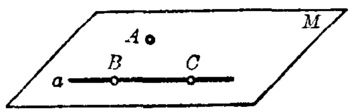


图 1·11

【证】 在直线 a 上可以任意取两点 B 和 C．因为 A、B、C 这三点不在一直线上，所以确定了一个平面 M．又因为直线 a 上有两点 B、C 落在平面 M 内，故知直线 a 上所有的点都在平面 M 内．这就证明了过直线 a 和它外面的一点 A 可以画一个平面 M．

其次，是不是只可以画一个平面呢？过直线 a 和直线 a 外的点 A 如果还可以画出第二个平面 N，这样，点 A、B、C 又

要在平面 N 内，因此，这三点 A, B, O 既在 M 内又在 N 内，即确定两个平面，显然这是与不在一直线上的三点确定一个平面的公理相矛盾的，所以平面 N 必与平面 M 重合．这就证明了过直线 a 和直线 a 外的一点 A 只能画一个平面 M.

注意 本推论的证明过程分两步，第一步证明它的可能性，第二步证明它的唯一性.

本推论在日常生活中的应用是常见的．例如，箱子加锁就可以固定箱盖；门上加一开关就可以关闭，这些都是由于固定了一直线(箱盖和门的一边)和这直线外的一点(箱子的锁和门的开关)，平面(指箱盖和门)的位置必定被固定的直线和它外面的一点所确定，所以这平面也被固定了.

2．两条相交直线可以确定一个平面 如图 1·12，设 a、b 是相交于点 O 的两条直线，我们来证明相交直线 a 和 b 确定一个平面.

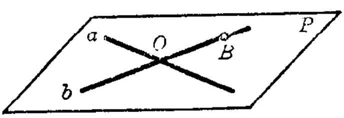


图 1·12

【证】 在直线 b 上任取异于点 O 的一点 B．这样，经过直线 a 和点 B 可以确定一个平面 P．由于直线 b 上有两点 B 和 O 落在平面 P 内，所以直线 b 也落在平面 P 内，就是平面 P 过相交直线 a 和 b.

其次，假定经过相交直线 a 和 b 还可以作一个平面 N，那么直线 a 和点 B 也必在平面 N 内，这与过一直线和这直线外的一点只能确定一个平面的结论相矛盾，因此平面 N 必与平面 P 重合.

综上两方面，这就证明了相交两直线只能确定一个平面.

本推论的实际例子也是很多的．例如，墙壁损坏的地方往往向外凸出来，为了防止倒塌，可用木料撑头抵住墙壁，这

时往往需要先用两块木板交叉紧贴在墙壁的凸出部分把它压平后，再用撑头顶住这两块木板的重迭部分．这样做的目的之一是使损坏的墙壁恢复并保持平面的状态．

3．两条平行直线可以确定一个平面 如图 1·13，设 a 和 b 是平行的两条直线，我们来证明直线 a 和 b 确定一个平面．

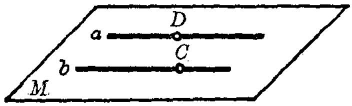


图 1·13

【证】 根据平面几何里关于平行线的定义，两条平行直线必在一个平面内，所以经过两条平行的直线 a 和 b 可以作一个平面 M．

其次，经过平行直线 a、b 能不能作出第二个平面呢？假定经过平行直线 a、b 还可以作一个平面 N，那末这两个平面 M 和 N 都要经过直线 a 和直线 b 上的一点 C（或者经过直线 b 和直线 a 上的一点 D；这里的点 C 或 D 都是该直线上的任意一点），而过一直线和这直线外的一点只能确定一个平面，显然过平行直线 a、b 所作的第二个平面 N 与平面 M 是重合的．因此，经过两平行直线只能作一个平面．

从本推论就容易推知：平行四边形或者梯形一定是平面图形．这是因为，梯形或平行四边形至少有两条对边是平行的，这两条平行直线确定了一个平面，而且其他两条对边都各有两点（图形的顶点）落在已确定的平面内，因此图形上各点全部落在同一个平面内，由此可见梯形或平行四边形都是平面图形．但是连结空间任意四个点，就不一定同在一平面内．例如，对于空间四个点 A、B、C、D（图 1·14），我们可以分几种情况来讨论：

(1) 如果空间四点 A、B、C、D 正好在一条直线上，显然可知这四点同在一平面内．但是必须注意，过一直线的平面

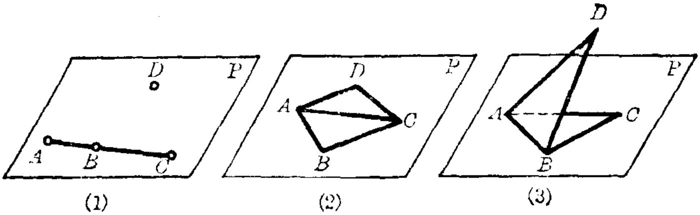


图 1·14

有无数个，也就是说，同在一直线上的四点不确定任何一个平面。所以说，这四点同在一平面内，但不确定一个平面。

(2) 设 A、B、C 三点在一直线上，而点 D 不在这直线上（图 1·14(1)），那末由一直线和这直线外一点确定一个平面 P.

(3) 设 A、B、C、D 中没有任何三点在一直线上，因此其中的任何三点可以确定一个平面。假如取 A、B、C 三点确定一个平面 P. 至此又可分如下两种情形：

（i）如果第四点 D 落在平面 P 内，那末 A、B、C、D 这四点便确定一个平面 P（图 1·14(2)）.

（ii）如果第四点 D 在平面 P 外，那末 A、B、C、D 四点就不同在一平面内（图 1·14(3)）.

所以，空间四点是不一定同在一平面内的.

例 1. AB、CD、EF 是三条直线，其中 $AB \parallel CD$, EF 与 AB 和 CD 都相交，求证 AB、CD、EF 三直线在同一平面内（图 1·15）.

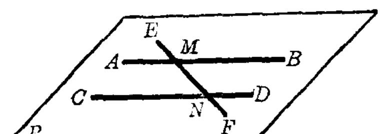


图 1·15

分析 要证明三条直线在同一平面内，可以先由其中两条直线确定一个平面，然后再证明第三条直线也落在这个平面内. 因为 AB 和 CD 是两条平行的直线，所以可先确定一平面 P，再证明直线 EF 也

落在平面 P 内就可以了.

【证】 因为 $AB \parallel CD$，所以 AB 和 CD 可以确定一个平面 P.

设 EF 与 AB、CD 分别相交于点 M、N.

因为 M、N 两点分别是直线 AB 和 CD 上的点，所以点 M 和点 N 都在平面 P 内. 既然直线 EF 上有两点 M、N 在平面 P 内，那么直线 EF 也就落在平面 P 内，故知直线 AB、CD、EF 同在一个平面内.

例 2. 试证明两两相交而不通过同一点的四条直线必在同一平面内.

分析 根据题设条件，这四条直线有两种可能，如图 1·16 所示.

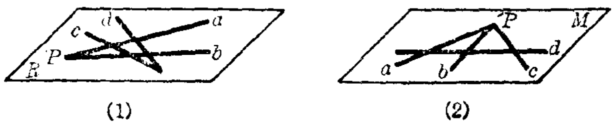


图 1·16

(1) 如图 1·16 的(1)，直线 a、b、c、d 是两两相交的，且没有三直线相交于同一点. 要证明这四条直线在同一平面内，可先取其中的两条直线（设 a、b），由题设，它们是相交的（设交点为 P），所以可确定一平面（设为平面 R），再根据题设证明另两直线（c 和 d）也落在这平面（R）内就可以了.

(2) 如图 1·16 的(2)，直线 a、b、c、d 是两两相交的，其中直线 a、b、c 相交于一点 P. 如取直线 d 和 a、b、c 中任一直线这两相交直线确定一平面 M，要证明这四条直线在同一平面内的步骤完全同(1)的分析.

作为练习，希望读者自己来写出本题的详细证明.

习 题 1·5

1. 三角形一定是平面图形，为什么？