《自修数学》小丛书

数学逻辑与推理

〔英〕D. A. 约翰逊
D. F. 泰 勒 著

向延育 译

张公绪 校

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本. 它从实用角度出发介绍了逻辑学中常用的归纳法及演绎法，并结合生活中的实例讲述了数学的推理论证、逻辑结构和逻辑数学等基本知识，书中穿插了不少富有启发性的练习，书末附有答案. 本书深入浅出、生动有趣，可供中学生课外阅读，亦可供具有中等文化程度的读者参考.

Donovan A. Johnson and D. F. Taylor

LOGIC AND REASONING IN MATHEMATICS

John Murray, London, 1974

数学逻辑与推理

〔英〕D. A. 约翰逊 D. F. 泰勒 著

向延育 译

张公绪 校

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年3月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年3月第一次印刷 印张：3 1/4

印数：0001—34,700 字数：60,000

统一书号：13031・2503

本社书号：3436・13—1

定价： 0.38 元

目　　录

一、思维和推理的作用

1. 当我们思索时发生了什么?

谈到思维,我们听说过有关质朴的哲学家的一些事,他有时:"静坐沉思",有时只是"闲待着". 他把我们头脑中所有时间随时闪过的全部东西几乎都收集在了一起. 在我们"待着"的时候,脑子里并不是空的: 而是充满了各种画面和感觉. 我们凝视着一幅美丽的风景画,听着音乐,或者朗读诗歌时,我们的头脑好象在这过程中不费劲地就被充满了. 但是,如果我们想要找出摩托车发动机点不着火的原因,或者从一张军用地图上标出达特穆尔*这个地方,或者解一道几何题,我们是以另一种不同的方式来思考的. 这就是说,我们正在试着进行推理.

工程师、科学家、医生、经济学家——所有这些人的目标都是要想把握住我们周围的世界. 他们希望怎样来做到这一点呢? 首先,必须了解有关对象的一些事实. 如果你从一架飞机中摔出来,就会朝地面掉下来,而且下落的速度平稳地加快. 什么思维也不能推翻这个事实. 人们不能怀疑引力定律. 但是,如果你事先了解有关气流的一些性质并且运用你

* 达特穆尔 (Dartmoor),英国东部德文郡的一个城市.

自己的推理能力，就有可能想到利用降落伞．这样，你就可能利用自然界的一些规律把你从另外的自然规律的危险威胁下解救出来．第一个使用降落伞的人正是相信了他自己或别人的推理．

不单那些研究物体的科学(如物理学和工程学等)，而且那些涉及到人的科学(如心理学和经济学等)，都有一个共同点，就是它们的发展，倾向于运用越来越多的数学语言来探讨和交流它们所涉及的概念．原因就在于数学与推理或逻辑是密切相关的．在有些(不是全部)数学家看来，数学就是逻辑，逻辑就是数学． 如同伟大的音乐家给我们创造了音乐一样，伟大的数学家肯定也给我们创造了思考和观察世界的方法．我们普通人虽然不是象贝多芬或者巴赫那样的音乐家，也不是牛顿或者高斯*那样的数学家，但正如我们可以为自己作几支小曲子一样，我们每个人自己也都可以创造一点数学．从十七世纪以来，开创性的数学家们创造了一种语言，使得我们如果不怕麻烦掌握了它的运用规律，就可以不费力气地进行一连串的推理，而这对于古希腊最好的学者来讲，也是有困难的．

如果你学过一点代数的话，大概碰到过那些颇为简单的"难题"(在学校课本里叫"问题")，例如，怎样把不同比例的茶

---

* 贝多芬（1770—1827）德国伟大的音乐家．
巴赫（1685—1750）德国音乐家．
牛顿（1642—1727）英国数学家、物理学家．
高斯（1777—1855）德国数学家、天文学家．

混合起来;火车以未知的速度从A点跑到B点;父亲和孩子忘记了他们多大年纪等等. 大多数人会发现，靠直接推理是得不到这些问题的答案的. 然而，如果我们学过代数的基本法则，一旦我们把这些问题从普通的字句转换为代数语言，就好象我们摇动机器的摇把，答案立刻从机器里涌现出来了.

要象希腊人曾经做的那样来研究几何,需要头等的头脑. 法国伟大的数学家和哲学家笛卡尔（1596—1650）告诉我们怎样把几何问题转化为代数的语言. 只要学会了这种语言，对我们来讲就没有什么太难的几何问题了. 有名的英国数学家乔治·布尔(1815—1864)为我们创造了一种逻辑代数,如果我们努力学会它的法则和怎样把普通语言翻译成它的符号,就会发现可以用十分机械的方法来解出复杂的逻辑问题，而用通常直接思维的方法，对我们的头脑来讲是不可能完成的. 至于电子计算机,一旦教会了它们这种语言,它们处理这类问题比我们还快得多.

十七到十九世纪有创造性的数学家们使得思维大众化了. 在那以前,巧妙的逻辑思维是知识贵族的禁苑. 而现在，对于任何一个具有一般知识水平的人，这种思维已经变得容易了. 做到这一点所要求的，只是学习和理解一些这种语言的规则. 这本书的目的就是仔细地研究我们用来推理的方法,说明怎样把普通语言翻译成数学的语言,从而使得复杂的逻辑问题变得容易起来.

2. 语言和逻辑

推理是同使用文字和符号的语言密切关联着的. 人们用语言来表达自己的思想，了解别人的思想. 怎样使语言来做到这一点，以及为什么又常常做不到这一点呢? 研究这类问题的学科叫语义学.

为了交流感情，一个词必须词意丰富，从而就不太准确. 但为了表达思想，用词就要准确，从而词意就要受到约束. 我们用来表达思想的语言，必须使我们能够精确地说出我们要表达的意思，数学的语言就是为此而深思熟虑地建立起来的. 它提供了一些规则，用来把一个命题变换成另一个命题，使得虽然第二个命题使用的是不同的词汇和符号，但它所说的和第一个命题完全是同一件事. 例如，简单的算术规则告诉我们，命题 $4\times8=32$，$4\times(5+3)=32$ 和 $4\times5+4\times3=32$ 说的完全是同一件事. 它们要不就同时成立，要不就同时不成立.

又如，命题 $3\times2=6$、命题 $2\times3=6$、$6\div2=3$ 以及 $6\div3=2$ 是利用数字 2、3、6 和运算"乘"、"除"之间的关系所作出的命题的不同表达方式.

数学家提供了判断一个命题真伪的精确方法. 例如，假设我们怀疑命题: $206\div6=33$，我们就可以把 33×6 乘出来，结果发现这个乘积是 198，从而证明这命题是错误的.

数学家是些"懒人"，他们讨厌废话. 他们不喜欢写出象

$1\times1=1$，$3\times3=9$，$5\times5=25$，$7\times7=49$……$99\times99=9801$这样一长串的表。他们很喜欢省劲，而直接说"在0和100间的一个奇数的平方是一个奇数"。更进一步，他们干脆讲"任何奇数的平方仍是一个奇数"，或者"任何偶数的平方必定不是奇数"。所以他们(还有逻辑学家)特别喜欢象"所有"、"每一个"、"有一个"、"没有一个"、"必定不"等这样一些逻辑词汇。

我们在日常生活中使用这些词儿的时候，往往是故意夸张的。当我们发牢骚说："我安排要去野餐的那天总是下雨"，我们并不是真的指这个意思，而是有些夸张。事实上若有人提醒说，某天某天我们有过一次很愉快的野餐，整天阳光明媚，我们就会感到有点尴尬。所以，当我们真要想表达自己的意思时，我们用象"所有"、"每一个"、"总是"这些词，要十分谨慎。因为只要有一个例外，就会使我们看起来蠢头蠢脑了。这里的教训是，如果我们相信："所有骑墙派全都是见风驶舵的变色龙"，那么，作为诚实正直的数学家和逻辑学家，就必须花点时间来找找看，是否有一个不是变色龙的骑墙派。

有些词可以有好几个意思*。"2乘3的积是6"。乘积的"积"和"积累"的"积"这两个"积"的意思就不大一样。在数学上，这些词都有着非常明确和单纯的意义。而在日常生活中，它们具有较为丰富和广泛的含意，也较为含混。对于药剂师，"素"意味着像四环素、土霉素、青霉素等这些不同的抗菌

---

* 这一段文字是根据汉语中的情况意译的。——译注

素．对于穿衣服，“素”是指颜色不鲜艳、花色单一的衣服．对于数学家，“素”数当然不是一个什么用青霉素做的数，也不是什么不带鲜艳色彩的数，它只是确切地表示一个象 13 那样的数，即它除了 1 和它本身之外，再没有别的整数因子．因此，当数学家告诉我们他所说的“素数”是什么意思时，要对我们给出一系列的运算指令．他说：为了确定 13 是不是素数，写下从 2 到 12 在内的所有的数．依次用其中每一个数来除 13．如果这些被除数中有一个没有余数，那么 13 就不是素数．反之，如果没有一个的余数是零，则 13 是素数．要注意象“有一个”，“没有一个”这样的词在这个数学命题中是怎样出现的．这些是数学家和逻辑学家常用的词，为了节省时间，他们为这些词发明了专门的符号，我们以后会碰到．

由于在搞数学时我们很容易象在日常生活中那样来用词．所以，必须注意防止使用那些没有确切地说出我们的意思的词．数学家欧几里得试图使几何数学化、逻辑化，但他并没有完全获得成功，原因之一就是他用了象“在……之间”这样表面上看来没有害处的词，而又没有确切说明其含意和究竟怎样使用．象数学家路易斯·长罗尔在他的《阿丽丝》一书中所明确的那样，用词必须恰好具有我们选用它们来表达的那个意思，既不能多，也不能少．我们要用词来交流我们的思想，就有责任使它们清楚准确地表达我们的意思．

3. 真实、事实和错觉

如果一个关于日常世界的事物的命题是真实的，我们通

常把这叫做一个事实*. 当然并不是所有关于日常事物的命题都是如此. 对命题进行比较时,有一个好主意,就是仔细研究那些能证明命题不成立的方法.

假如我和朋友两个人坐在外面阳光下. 我说:"我觉得热". 这个命题只有我自己可证明它不真. 我的朋友了解我平常不说谎,就可能不加怀疑,承认它是一个事实. 如果我对他说:"你看起来很热". 他就可能争辩这一点. 然而我们两个人都是通情达理的人,所以都同意找另外一些人也坐到一起,问他们:"我看起来热吗"? 这样来证明我讲的话是否不真. 如果所有这些人(或者至少其中的大多数)回答:"是",他就可能同意我的这个命题是正确的. 但是,在我们烧水沏茶时,我对他说:"如果你把温度计放到水壶里,水银柱就会一直上升到100度. 然后一直停留在这个刻度上到水煮干为止."这样,我就不仅提出了一个命题,而且也指出了推翻这个命题的方法.

如果我说:"黑斯廷斯战役** 发生在1065年",而我的朋友回答说:"这不是事实",我们可以查阅一本大家公认的史学家写的书来解决这个争执.

---

* 在逻辑数学中,习惯上一个正确的命题往往称之为"真",或者说"真实"、"正确". 反之,我们说错误命题是"不真"、或者"假". ——译注

** 黑斯廷斯战役——英国历史上一次有名的王位争夺战役. 十一世纪,诺曼底公爵威廉在他的堂兄英国国王爱德华死后,声称有权继位,1066年,在英国北部黑斯廷斯附近登陆,并且在一个名叫森莱克的地方击溃了爱德华之后继位的哈罗德,成为英国国王,后被人称征服者威廉. 黑斯廷斯濒临英吉利海峡.

设想我们拾到了一个装有一英镑钞票的钱包。如果我说："留下它是违法的。"我们可以去请教律师或者自己查阅议院法令、法律判例来发现这个命题是否成立。但是如果我说："留下拾到的东西是错误的"。这实际上告诉他我的意见和态度。他只能用一段时间来观察我的行为，考察我的言行是否一致，从而判断这个命题是否成立。

这样看来，有些命题可以直接用我们自己的感官，通常是用我们的视觉来证明其不成立。关于水和温度计的命题就是这样。这种命题本身就包括了如何证明其不成立的教训。科学方面的命题常属于这种类型。在检验这类命题时，就必须时刻记住我们的感官也会有错觉。看一下图 1，左边的四边形看起来不像是一个正方形，右边图上的对角线也不互相平行。但是当我们用直尺、三角板或者两脚规来量一下时就会发现是我们的视觉欺骗了自己，我们又用自己的眼睛证实了我们最初的印象是错误的。

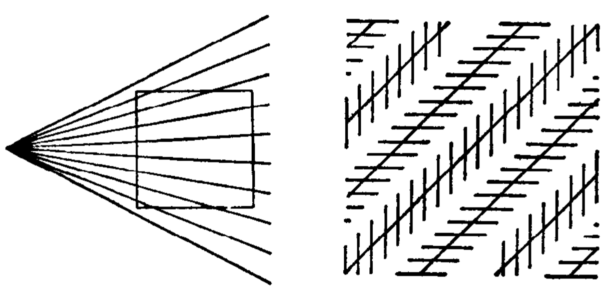

图 1

其它种类的命题，如上述黑斯廷斯战役的日期，可以通过

求教于公认的权威来验证．当我们去请教时，我们是在依赖于别人的感官、技能和诚实．一个历史学家有机会看到各种文件和著作，而我们相信他会如实地报告他所看到的．显然，我们中没有任何人能同一位曾平静地坐在森莱克* 的阵地后面观看这场战斗的人来聊一会儿天．

许多我们认为真实的科学命题是不能用直接经验来证实的．我们大概相信地球大体上是个球形，半径为 6400 公里，显然，我们谁也不能用巨大的皮尺或者卡尺来测量它． 我们相信物质是由原子构成的．但是甚至从理论上我们也不能看到、摸到、听到、嗅到或者尝到单个的原子．

科学家是通过把自己的感官所提供的证据——他们的仪器和仪表的读数——和一系列的推理结合起来做出一些命题的．牛顿掌握了大量关于月球和行星的位置、潮汐涨落深度的测量数据．他的罕见的创造性的想象力使他归纳出了我们称为“万有引力定律”的命题．他的巨大的推理能力使他能够由此进一步指出：如果万有引力定律是正确的，那么，在某某时刻就会发生月蚀；或者在某某位置上，水星离太阳最近．然后，再利用他的感官，他便可以知道实际上这些预言是真还是不真． 万有引力定律的威力就在于它很容易检验事实的真伪．通过万有引力定律可以论证推理得出成千上万个预言．其中每一个都可以用来检验其真伪．但是差不多 300 年来，还没有一个预言经检验出了错．甚至于曾预言：必然存在着一

---

* 森莱克　英国地名，见前注．——译注

个当时还没有被人看到过的行星，后来也证明是正确的。直到今天，天文学测量精确到了天文学家能测出牛顿力学预计的水星的位置每一百年有 43 秒角度(一秒是一度的六十乘六十分之一)的误差，直到这时我们才能说牛顿的万有引力定律给出了一个有错误的预言。只要一个科学命题一直能给出没有错误的预见，我们就说它是"真实"的。从这个意义上讲，在我们日常生活中相对简单的事件上，牛顿定律仍然给出正确的预言，因此，它仍然是正确。

象"说谎是不对的"或者"巴赫比当代的第一流流行音乐家都强."这样的命题是属于另一种不同的类型。它们并没有象表面上看起来那样告诉我们周围具体世界的某件事物，而是告诉我们讲话人的态度、信念或者意见。大多数伦理和艺术方面的命题论断都属于这一类。成功地对它们进行逻辑分析，也就是用逻辑来判断它们的是非与是极为困难的，但是倒也并不排除和忽视这一方面。亚里士多德、爱因斯坦、施韦策、甘地、马克思和圣·保罗*的抽象论断对许许多多人们都是意味深长的，那怕这些论述可能是不合逻辑的。即使你成了一个优秀的逻辑学家时，也还是记住这点为好。

如果你已经思考过上面的例子，你就会看出还有另一种命题可以证明其不成立。"犯法"这个词仅仅是对于议院法令

* 亚里士多德(公元前 384—322)古希腊哲学家。爱因斯坦(1879—1955)伟大的德国理论物理学家。施韦策(1875—1965)法国哲学家，曾获 1952 年诺贝尔和平奖金。甘地(1869—1948)印度政治家。圣·保罗(? —AD67)跟随耶稣的十二使徒之一，基督教神学的创立人。

或者法律判例的字句而言的．所以，一个论断的正确与否，在很大程度上取决于语言的使用和含意． 如果我说：“昨天我画了一个正方形的三角形”你马上就知道我是在胡说八道，因为我没有按公认的方式来使用词汇． “三角形”这个词和“三边形”这个词是可以通用的． 在这句话中“正方形”这个词和“一个角是直角而且四边相等的四边形”是可以通用的． 所以，当我说，我的三角形是一个正方形，就是在瞎说一气．因为我的论断自相矛盾．它和本身不一致．

数学和逻辑的命题当它们表现出这种不一致时就是错误的． $2+3=5$ 从数学上来讲是正确的．因为它和我们赋予“2”、“3”、“5”、“+”和“=”的涵义是一致的．如果我们对这些词赋予不同的涵义，这个命题就很可能是错误的．它并没有告诉我们周围世界的任何事物，但是我们能够赋予它以这样的内容．例如：“2”表示两个苹果，“3”表示三个苹果，而“+”表示把它们一块儿放到一个袋子中去等等．它就给出了一个真实的预计．反之，如果“2”和“3”分别表示水银滴，而“+”表示把它们滴到一个试管中去，那它就并没有给出一个真实的预计．

逻辑学和数学的论断在对真实世界的预卜中起着重要的作用．然而它们自身并不是关于客观世界的论述．预见的真实性首先依赖于原始事实和观察的真实性（这里的真实性是常识意义上的），同时也依赖于推理和数学的真实性或者“有效性”．这里，真实性是指使用语言的一致性，推理的正确性．本书对于一致性和推理的正确性这个概念，还要更深入地考

察.

练习1 事实和错觉

1.什么是检验下列命题的标准?

a. 女孩子比男孩子更聪明,

b. 喷气飞机比螺桨飞机更安全,

c. 饮水中不应含有氟化物,

d. 十五岁的男孩子不应开汽车.

2.我们用来计数的数(1、2、3等)称为自然数. 下面这些命题中,对于用 x、y 代表的任何一对自然数,当 x 和 y 是不同的数时,哪些命题总是正确的?

a. $x+y=y+x$,　e. $x+0=y+0$,

b. $x-y=y-x$,　f. $x\cdot 0=y\cdot 0$,

c. $x\cdot y=y\cdot x$,　g. $x+1=y+1$,

d. $x/y=y/x$,　h. $x\cdot 1=y\cdot 1$.

3.根据 (i) 几乎全部是经验和测量, (ii) 经验测量并结合推理, (iii) 权威 (iv) 几乎全部是推理,来指出下面的命题是否正确?

a. 牛奶比水容易烧开,

b. 如果一个鸡蛋煮不到三分钟,它不会煮老,

c. 地球的直径大约为 8000 英里,

d. 不存在一个分数 p/q 使 $(p/q)\cdot(p/q)=2$,

e. 诺曼底的威廉于 1066 年在黑斯廷斯附近登陆,

f. 1964 年 3 月 24 日英国标准时间 6:45 太阳出来了,

g. 思维是通过流有电流的神经来完成的,

h. 不自私是对的,

i. 偷窃是犯法的.

4.在图 2 的各种情况中, 先用眼睛, 再做测量来确定是否 $AB=CD$.

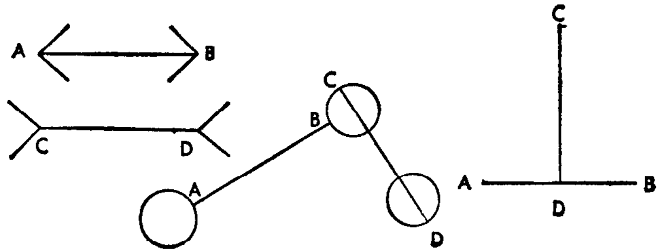

图 2