SHI FEN XI JI CHU

实分析基础

王友方 编译

山东科学技术出版社

实 分 析 基 础

王友方 编译

山东科学技术出版社
一九八五年·济南

实分析基础

王友方　编译

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本　　23印张　　490千字

1985年1月第1版　　1985年1月第1次印刷

印数：1—3,800

书号 13195·124　　定价 4.80 元

内 容 提 要

本书是继初等微积分之后包括大学数学分析内容在内的一本教程，其特点是渗透了现代数学分析的观点和方法．本书阐述了实数和一元微积分的理论，并在此基础上抽象出距离空间及其映象的现代分析的基本概念；以距离空间的观点阐述了多元微积分理论，使数学分析的经典内容与现代分析相衔接；论述了常微分方程解的存在唯一性定理、级数理论、黎曼—斯蒂阶斯积分理论、凸函数的基本性质；给出了现代分析中阿采拉定理、斯梯茵—外尔斯特拉斯定理及R_N中一般的斯托克斯定理.

本书叙述简明并配有较多理论性习题，可作为理工科大学数学分析的教学参考书．也可作为中学教师及需要现代数学分析基础知识的读者进修用书.

前　言

本书主要依据美国加利福尼亚大学教授M•H•protter，C•B•Morrey合著《A First course in Real Analysis》，并结合我国数学分析教学实际编译而成的。这是继初等微积分之后的大学数学分析教程，其特点是以现代分析的观点与方法阐述$\mathbf{R}_N$中微积分理论，使分析的基础与现代分析相衔接。

本书共十五章。第一章以公理法讲述实数理论，为分析的代数运算、极限、连续性概念提供逻辑基础。第二章至第五章，作为初等微积分的总结和分析的基础，包括了$\mathbf{R}_1$中连续、极限和微积分理论。导数是以算子的观点定义的，积分中介绍了约当测度，并将测度与积分联系了起来。

现代分析发展的关键是抽象出距离空间的概念。第六章引入了距离空间，以$\mathbf{R}_N$、$C[a, b]$等为典型讲述了点集拓扑的基础知识。基于紧性集将连续函数的性质一般化，还将逐次逼近法上升为完备空间中的压缩映象不动点定理，据以证明隐函数、常微分方程解的存在唯一性。第七、八章以距离空间的观点为指导，简捷地将R_1的微积分理论发展为$\mathbf{R}_N$的微积分理论。介绍级数理论的第九、十两章中，一致收敛性概念也被推广到距离空间，同时以抽象测度的思想提出无序和的概念，统一处理多重级数的收敛性。第十一、十二章推广黎曼积分。广义积分理论的重点是积分号下求导数。把黎曼

积分推广为黎曼—斯蒂阶斯积分，不仅对学习概率论是必要的，而且为把约当测度、黎曼积分发展为勒贝格测度与积分，进而为抽象测度理论打好基础。第十三章介绍距离空间的函数理论，讲述了现代分析中很有用的阿采拉定理，泰兹延拓定理及斯桃茵—外尔斯特拉斯定理。

鉴于凸分析对现代应用数学(如最优化理论)的重要作用，专设第十四章介绍凸集、凸函数的最初等的基本结果。

最后一章研究特殊的距离空间之间的映象— R_N 的场理论。先以拓扑学的观点论述了曲线、曲面的表示。尔后把通常场论三公式作为微积分基本定理在二维、三维的推广，在引入了外微分运算及外微分形式之后，最终将它们概括为 R_N 中一般的斯托克斯定理。该定理在微分几何及现代物理中是非常重要的。

本书各章节后面配有总计上千道习题，这是本书的有机部分。

编译者认为以现代分析观点处理 R_N 中微积分的这样简明的教程，符合改革数学分析使之现代化的要求。张学铭教授对此给予热情地指教与鼓励，在此致以真诚的谢意。

希望这本书能为数学分析或高等数学的理工科师生提供参考，对学过初等微积分又需要现代分析的中学数学教师和工程技术人员能有所帮助，这是编译者的良好意愿。但由于自己水平有限，书中存有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　实　数　系

§1·1　域的公理系

本节提出的域公理系，是微积分中代数运算的逻辑基础。任意对象所组成的集合，当它满足下列A_1—A_5、M_1—M_5及D共十一条公理时，称这个集合为域；域中的元素称为"数"。

加法与减法公理（A_1—A_5）

A_1　封闭性。若a，b是数，有且仅有一个数称为a与b的和，记为$a+b$。

A_2　交换律。对于任意两个数a，b，都有

$$a+b=b+a.$$

A_3　结合律。对任意数a，b和c，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

A_4　零的存在性。有且仅有一数0，称为零，对任意数a，满足

$$a+0=a.$$

A_4中可以不要求仅有一个数0，其唯一性容易证明。事实上，设0和$0'$都是这样的数，那么便有$0+0'=0$及$0'+0=0'$。根据A_2有$0+0'=0'+0$，即$0=0'$。这说明当零存在便是唯一的。

A_5　负数存在性。a是任意数，有且仅有一数x，满足

$$a+x=0.$$

这个数x称为a的负数（或称a的相反数），表示为$-a$。

如同A_4，类似地可证，A_5中唯一性要求是不必要的。

定理1·1 若a，b是数，那么有且仅有一个数x满足$a+x=b$；数$x=b+(-a)$。

证明 应当证明：（i）$x=b+(-a)$满足$a+x=b$；（ii）没有其他数能满足这一等式。

为证（i），使用A_2，A_3，A_4，有

$$a+x=a+[b+(-a)]=a+[(-a)+b]$$
$$=[a+(-a)]+b=0+b=b.$$

于是（i）成立。

在 $a+x=b$ 两端加（$-a$），得

$$(a+x)+(-a)=b+(-a).$$

而左端

$$(a+x)+(-a)=a+[x+(-a)]$$
$$=a+[(-a)+x]=[a+(-a)]+x$$
$$=0+x=x.$$

可见$x=b+(-a)$，这便证明了解的唯一性。

数$b+(-a)$也记成$b-a$。

有了上述两个数的加法定义，可用结合律来定义三个、四个以及任何有限个数的加法。由A_3，$(a+b)+c$与$a+(b+c)$相等，定义$a+b+c$为这一共同值。

引理1·1 若a，b和c是任意的三个数，那么

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a$$
$$=c+a+b=c+b+a.$$

请读者据A_2、A_3详细地写出引理1·1的证明。

引理1·2 若a，b，c和d是任意数，那么

$$(a+c)+(b+d)=(a+b)+(c+d).$$

证明 由引理1·1及A_3，有

$$\begin{aligned}(a+c)+(b+d)&=[(a+c)+b]+d\\&=(a+c+b)+d=(a+b+c)+d\\&=[(a+b)+c]+d=(a+b)+(c+d).\end{aligned}$$

定理1·2

（i）若a是一数，那么$-(-a)=a$。

（ii）若a，b是数，那么

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

证明 （i）由$-a$的定义，有

$$(-a)+[-(-a)]=0 \quad 及$$

$$(-a)+a=a+(-a)=0.$$

A_5指出（$-a$）是唯一的，因此 $a=-(-a)$。

（ii）据负数定义，应有

$$(a+b)+[-(a+b)]=0.$$

再用引理1·2，有

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)]&=[a+(-a)]+[b+(-b)]\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

由A_5一个数仅有一个相反数，得出（ii）成立。

定理1·2可以叙述为：（i）（$-a$）的相反数是a；（ii）和的相反数等于相反数的和。

乘法与除法公理（M_1—M_5）

M_1　封闭性。若a，b是数，有且仅有一个数称为a与b的积，表示为ab（或$a\times b$或$a\cdot b$）。

M_2　交换律。对任意的两个数a与b，有

$$ba=ab.$$

M_3　结合律。对任意的a、b、c，有

$$(ab)c=a(bc).$$

M_4　单位的存在性。有且仅有一个不等于零的数u，对任意数a都有　$au=a$成立，这个数u称为单位，照习惯表示为1。

M_5　倒数的存在性。对每个不为零的数a，有且仅有一数x满足　$ax=1$。这个数x称为a的倒数（或a的逆），表示为a^{-1}（或$1/a$）。

注　公理M_1—M_5与公理A_1—A_5是相“平行”的，相当于以乘法代替加法，但M_5与A_5并不恰好相当，M_5还要求$a\neq 0$．其原因由下面定理1·3指出：任意数与0的积等于0，就是零不能做除数．

特殊的公理D

D　分配律。对于任意的数a、b、c，有

$$a(b+c)=ab+ac,$$

注　在每一逻辑系统之中，必然有不定义的概念——原始概念．例如欧几里德平面几何里的点、直线就是不定义的原始概念．当然，对这两个概念可以直观地给以描述，但在几何学的理论结构中它是不能下定义的，它们的性质是由公理系来给出的．在域的公理系当中，“数”是不定义的原始概念．我们可以用实数来解释，也可以用有理数或者复数来解释．事实上有理数系、实数系、复数系还有若干数系(可以是有限个数组成)都满足域公理．实数系只是满足域公理系的诸数系当中的一个．满足公理系统的集合称为这一公理系统的一个解释，实数系是域公理系统的一个解释．

如果要求仅以实数系为其解释的公理系，还需在域公理之外再增加新的公理，这将在§1·3及§2·1中完成．

定理1·3 若a是任意数，那么 $a0=0$。

证明 设b是任一数。那么$b+0=b$，所以 $a(b+0)=ab$，由分配律D，有

$$(ab)+(a0)=(ab)$$

由A_4，有 $a0=0$。

定理1·4 若a、b是数，且$a\neq 0$时，那么有且仅有一个数x，满足$ax=b$，数$x=ba^{-1}$。

欲证定理1·4，只要把定理1·1证明中的“加”换为“乘”，0换为1，$-a$换为a^{-1}即得。

注“当且仅当”是数学中常用的术语.设A与B是两个命题.“当B真，A真”意味着B真蕴含A真；“A真仅当B真”意味着A真蕴含B真；“A真当且仅当B真”这意味着双重含意：A真蕴含B真和B真蕴含A真.今后用符号$\Longleftrightarrow$表示“当且仅当”并记为

$$A\Longleftrightarrow B.$$

“当且仅当”也常说成“充分与必要”或“等价于”.

定理1·5

（i）$ab=0$当且仅当a，b至少有一为零。

（ii）$a\neq 0$及$b\neq 0$当且仅当$ab\neq 0$。

证明 （i），（ii）都要证明当且仅当两个方面。

对于（i），注意若a，b至少有一为零，那么由定理1·3应有$ab=0$。另一方面，若$ab=0$，那么有$a=0$或$a\neq 0$两种情况。当$a=0$时，结果成立；当$a\neq 0$时，那么

$$b=1b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}0=0。$$

这时有$b=0$，结果成立。综合两方面，（i）得证。

对于（ii），首先假定$a\neq 0$，$b\neq 0$，应用（i）可知$ab\neq 0$。否则a，b至少有一为零与假定矛盾。另一方面，设$ab\neq 0$，那么$a\neq 0$与$b\neq 0$成立。否则由定理1·3将有$ab=0$，

这与$ab\neq 0$矛盾。

把$(ab)c$与$a(bc)$这共同值作为abc的定义。读者容易证得与引理1·1及引理1·2相似的下列引理。

引理1·3 若a，b，c是数，那么

$$abc=acb=bac=bca=cab=cba.$$

引理1·4 若a，b，c，d是数，那么

$$(ac)(bd)=(ab)(cd).$$

定理1·6

(i) 若$a\neq 0$，那么$a^{-1}\neq 0$且$(a^{-1})^{-1}=a$。

(ii) 若$a\neq 0$，$b\neq 0$，那么$(ab)^{-1}=(a^{-1})(b^{-1})$。

这一定理的证明与定理1·2的证明一样，只要以乘法代加法，以1代0，a^{-1}，b^{-1}分别代$(-a)$，$(-b)$即可。注意若$a\neq 0$，$aa^{-1}=1\neq 0$，由定理1·5的(ii)便得$a^{-1}\neq 0$。

定理1·7 若a,b是数(可以是正的、负的或是零)，那么

(i) $a(-b)=-(ab)$.

(ii) $(-a)b=-(ab)$.

(iii) $(-a)(-b)=ab$.

证明 (i) 因为$b+(-b)=0$，由分配律有

$$a[b+(-b)]=ab+a(-b)=0$$

另一方面$ab+[-(ab)]=0$，由公理A_5有

$$a(-b)=-(ab).$$

(ii) 可由(i)交换a、b得到。至于(iii)，由(i)，(ii)，得

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[-(ab)].$$

再由定理1·2的(i)得

$$-[-(ab)]=(ab)$$

即 $(-a)(-b)=ab$，(iii) 成立。

推论 $(-1)a=-a$。

现在根据上述公理及定理来证明代数中学过的诸分数律。

注 对于 ab^{-1} 引进以下符号：

$$ab^{-1}=\frac{a}{b}=a/b=a\div b$$

这些表示相除的符号称之为分数.分数的分子与分母按通常定义.以零为分母的分数没有意义.

定理1·8

(i) 对于每个数 a 有等式 $a/1=a$。

(ii) 若 $a\neq 0$，那么 $a/a=1$。

证明 (i) 我们有

$a/1=(a\cdot 1^{-1})=(a\cdot 1^{-1})\cdot 1=a(1^{-1}\cdot 1)=a\cdot 1=a$。

(ii) 若 $a\neq 0$，按定义 $a/a=aa^{-1}=1$。

定理1·9 若 a，b，c，d 是数且 $b\neq 0$，$d\neq 0$，那么 $bd\neq 0$ 且 $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$。

证明 从定理1·5得出 $bd\neq 0$，由关于分数的注释及引理1·4与定理1·6的（ii），有

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=(ab^{-1})\cdot(cd^{-1})=(ac)\cdot(b^{-1}d^{-1})$$

$$=(ac)(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}.$$

下列五个定理的证明都留给读者去完成。

定理1·10 若 $b\neq 0$，$c\neq 0$，那么