

实分析基础

王友方 编译

山东科学技术出版社

实 分 析 · 基 础

王友方 编译

山东科学技术出版社

一九八五年·济南

实 分 析 基 础

王友方 编译

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本 23印张 490千字

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数：1—3,800

书号 13195·124 定价 4.80 元

内 容 提 要

本书是继初等微积分之后包括大学数学分析内容在内的一本教程，其特点是渗透了现代数学分析的观点和方法。本书阐述了实数和一元微积分的理论，并在此基础上抽象出距离空间及其映射的现代分析的基本概念；以距离空间的观点阐述了多元微积分理论，使数学分析的经典内容与现代分析相衔接；论述了常微分方程解的存在唯一性定理、级数理论、黎曼—斯蒂阶 斯 积 分 理 论、凸函数的基本性质；给出了现代分析中阿采拉定理、斯忒茵—外尔斯特拉斯定理及 R_N 中一般的斯托克斯定理。

本书叙述简明并配有较多理论性习题，可作为理工科大学数学分析的教学参考书，也可作为中学教师及需要现代数学分析基础知识的读者进修用书。

前 言

本书主要依据美国加利福尼亚大学教授 M.H. protter, C.B. Morrey 合著《A First course in Real Analysis》, 并结合我国数学分析教学实际编译而成的。这是继初等微积分之后的大学数学分析教程, 其特点是以现代分析的观点与方法阐述 $\mathbf{R}_N$ 中微积分理论, 使分析的基础与现代分析相衔接。

本书共十五章。第一章以公理法讲述实数理论, 为分析的代数运算、极限、连续性概念提供逻辑基础。第二章至第五章, 作为初等微积分的总结和分析的基础, 包括了 $\mathbf{R}_1$ 中连续、极限和微积分理论。导数是以算子的观点定义的, 积分中介绍了约当测度, 并将测度与积分联系了起来。

现代分析发展的关键是抽象出距离空间的概念。第六章引入了距离空间, 以 $\mathbf{R}_N$ 、 $C[a, b]$ 等为典型讲述了点集拓扑的基础知识。基于紧性集将连续函数的性质一般化, 还将逐次逼近法上升为完备空间中的压缩映象不动点定理, 据以证明隐函数、常微分方程解的存在唯一性。第七、八章以距离空间的观点为指导, 简捷地将 $\mathbf{R}_1$ 的微积分理论发展为 $\mathbf{R}_N$ 的微积分理论。介绍级数理论的第九、十两章中, 一致收敛性概念也被推广到距离空间, 同时以抽象测度的思想提出无序和的概念, 统一处理多重级数的收敛性。第十一、十二章推广黎曼积分。广义积分理论的重点是积分号下求导数。把黎曼

积分推广为黎曼—斯蒂阶斯积分，不仅对学习概率论是必要的，而且为把约当测度、黎曼积分发展为勒贝格测度与积分，进而为抽象测度理论打好基础。第十三章介绍距离空间的函数理论，讲述了现代分析中很有用的阿采拉定理，泰兹延拓定理及斯桃茵—外尔斯特拉斯定理。

鉴于凸分析对现代应用数学(如最优化理论)的重要作用，专设第十四章介绍凸集、凸函数的最初等的基本结果。

最后一章研究特殊的距离空间之间的映象— R_N 的场理论。先以拓扑学的观点论述了曲线、曲面的表示。尔后把通常场论三公式作为微积分基本定理在二维、三维的推广，在引入了外微分运算及外微分形式之后，最终将它们概括为 R_N 中一般的斯托克斯定理。该定理在微分几何及现代物理中是非常重要的。

本书各章节后面配有总计上千道习题，这是本书的有机部分。

编译者认为以现代分析观点处理 R_N 中微积分的这样简明的教程，符合改革数学分析使之现代化的要求。张学铭教授对此给予热情地指教与鼓励，在此致以真诚的谢意。

希望这本书能为数学分析或高等数学的理工科师生提供参考，对学过初等微积分又需要现代分析的中学数学教师和工程技术人员能有所帮助，这是编译者的良好意愿。但由于自己水平有限，书中存有不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 实数系	1
§ 1.1 域的公理系	1
§ 1.2 自然数、序列、数系的扩充	10
§ 1.3 序公理与不等式	16
§ 1.4 数学归纳法, 自然数的定义	24
第二章 连续性和极限	32
§ 2.1 连续性	32
§ 2.2 极限定理	38
§ 2.3 单边极限——相对于集的连续性	46
§ 2.4 趋向无穷处的极限, 无穷极限	52
§ 2.5 序列的极限, 连续性公理	60
第三章 R_1 上函数的基本性质	68
§ 3.1 介值定理	68
§ 3.2 最小上界, 最大下界	71
§ 3.3 波尔查诺—外尔斯特拉斯定理	79
§ 3.4 有界性及极值性定理	82
§ 3.5 一致连续性	84
§ 3.6 哥西序列与哥西准则	88
§ 3.7 汉茵—波赖尔与勒贝格定理	90
第四章 微分学的基本理论	99
§ 4.1 R_1 上函数的微分	99
§ 4.2 反函数	113

第五章 积分学的基本理论	118
§ 5.1 达布积分	118
§ 5.2 黎曼积分	136
§ 5.3 对数函数与指数函数	144
§ 5.4 约当测度	151
第六章 距离空间和映象	160
§ 6.1 许瓦兹不等式与三角形不等式, 距离空间的概念	160
§ 6.2 点集拓扑基础	167
§ 6.3 可列集	177
§ 6.4 紧集	183
§ 6.5 紧集上的函数	191
§ 6.6 连通性	194
§ 6.7 距离空间之间的映象	199
§ 6.8 压缩映象定理	209
第七章 R_N内的微分	216
§ 7.1 偏导数	216
§ 7.2 高阶偏导数和台劳定理	223
§ 7.3 多变量函数的微分	239
§ 7.4 单一方程的隐函数定理	245
§ 7.5 关于方程组的隐函数定理	254
§ 7.6 条件极值与拉格朗日乘数法	271
第八章 R_N内的积分	280
§ 8.1 R_N 内的体积	280
§ 8.2 R_N 内的达布积分	283
§ 8.3 R_N 内的黎曼积分	291
§ 8.4 象集的体积及变量替换	301
第九章 无穷序列与无穷级数	319
§ 9.1 基础的定理	319

§ 9.2	一般项级数, 幂级数	326
§ 9.3	一致收敛性	335
§ 9.4	级数的一致收敛性, 幂级数的一致收敛性	345
§ 9.5	无序和	364
§ 9.6	无序和的比较判别法, 一致收敛性	379
§ 9.7	多重序列与多重级数	386
第十章	伏里叶级数	399
§ 10.1	展开公式	399
§ 10.2	伏里叶正弦与余弦级数, 区间的改变	407
§ 10.3	收敛性定理	415
第十一章	积分所定义的函数	432
§ 11.1	积分所定义函数的导数	432
§ 11.2	广义积分	440
§ 11.3	广义积分所定义的函数, Γ 函数	449
§ 11.4	微分方程解的存在唯一性定理	461
第十二章	有界变差函数与黎曼—斯蒂阶斯积分	469
§ 12.1	有界变差函数	469
§ 12.2	黎曼—斯蒂阶斯积分	483
第十三章	距离空间上的函数	507
§ 13.1	完备的距离空间	507
§ 13.2	阿采拉定理, 连续函数的延拓	519
§ 13.3	斯桃园—外尔斯特拉斯逼近定理	535
第十四章	凸集与凸函数	552
§ 14.1	凸集	552
§ 14.2	凸函数	557
第十五章	场理论、格林定理和斯托克斯定理	569
§ 15.1	R_1 上的矢函数, 弧, 运动三面形	569
§ 15.2	矢函数与 R_N 上的场	583

§ 15·3	线积分	602
§ 15·4	格林定理	618
§ 15·5	R_3 内的曲面及其参数表示式	632
§ 15·6	曲面的面积及曲面积分	641
§ 15·7	可定向曲面	650
§ 15·8	斯托克斯定理	662
§ 15·9	发散量定理	676
§ 15·10	外微分与一般的斯托克斯定理	687
附 录		701
1	绝对值	701
2	实数的 p 进制小数表示	704
3	E_N 内的矢	710

第一章 实数系

§ 1.1 域的公理系

本节提出的域公理系，是微积分中代数运算的逻辑基础。任意对象所组成的集合，当它满足下列 A_1-A_5 、 M_1-M_5 及 D 共十一条公理时，称这个集合为域；域中的元素称为“数”。

加法与减法公理 (A_1-A_5)

A_1 封闭性。若 a, b 是数，有且仅有一个数称为 a 与 b 的和，记为 $a+b$ 。

A_2 交换律。对于任意两个数 a, b ，都有

$$a+b=b+a.$$

A_3 结合律。对任意数 a, b 和 c ，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

A_4 零的存在性。有且仅有一数 0 ，称为零，对任意数 a ，满足

$$a+0=a.$$

A_4 中可以不要仅有一个数 0 ，其唯一性容易证明。事实上，设 0 和 $0'$ 都是这样的数，那么便有 $0+0'=0$ 及 $0'+0=0'$ 。根据 A_2 有 $0+0'=0'+0$ ，即 $0=0'$ 。这说明当零存在便是唯一的。

A_5 负数存在性。 a 是任意数，有且仅有一数 x ，满足

$$a + x = 0.$$

这个数 x 称为 a 的负数（或称 a 的相反数），表示为 $-a$ 。

如同 A_4 ，类似地可证， A_5 中唯一性要求是不必要的。

定理1·1 若 a, b 是数，那么有且仅有一个数 x 满足 $a + x = b$ ，数 $x = b + (-a)$ 。

证明 应当证明：（i） $x = b + (-a)$ 满足 $a + x = b$ ；
（ii）没有其他数能满足这一等式。

为证（i），使用 A_2, A_3, A_4 ，有

$$\begin{aligned} a + x &= a + [b + (-a)] = a + [(-a) + b] \\ &= [a + (-a)] + b = 0 + b = b. \end{aligned}$$

于是（i）成立。

在 $a + x = b$ 两端加 $(-a)$ ，得

$$(a + x) + (-a) = b + (-a).$$

而左端

$$\begin{aligned} (a + x) + (-a) &= a + [x + (-a)] \\ &= a + [(-a) + x] = [a + (-a)] + x \\ &= 0 + x = x. \end{aligned}$$

可见 $x = b + (-a)$ ，这便证明了解的唯一性。

数 $b + (-a)$ 也记成 $b - a$ 。

有了上述两个数的加法定义，可用结合律来定义三个、四个以及任何有限个数的加法。由 A_3 ， $(a + b) + c$ 与 $a + (b + c)$ 相等，定义 $a + b + c$ 为这一共同值。

引理1·1 若 a, b 和 c 是任意的三个数，
那么

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + a + c = b + c + a \\ &= c + a + b = c + b + a. \end{aligned}$$

请读者据 A_2 、 A_3 详细地写出引理1.1的证明。

引理1.2 若 a , b , c 和 d 是任意数, 那么

$$(a+c)+(b+d)=(a+b)+(c+d).$$

证明 由引理1.1及 A_3 , 有

$$\begin{aligned}(a+c)+(b+d) &= [(a+c)+b]+d \\ &= (a+c+b)+d=(a+b+c)+d \\ &= [(a+b)+c]+d=(a+b)+(c+d).\end{aligned}$$

定理1.2

(i) 若 a 是一数, 那么 $-(-a)=a$.

(ii) 若 a , b 是数, 那么

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

证明 (i) 由 $-a$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}(-a)+[-(-a)] &= 0 \quad \text{及} \\ (-a)+a &= a+(-a)=0.\end{aligned}$$

A_1 指出 $(-a)$ 是唯一的, 因此 $a=-(-a)$.

(ii) 据负数定义, 应有

$$(a+b)+[-(a+b)]=0.$$

再用引理1.2, 有

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)] \\ &= [a+(-a)]+[b+(-b)] \\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$

由 A_5 一个数仅有一个相反数, 得出(ii)成立。

定理1.2可以叙述为: (i) $(-a)$ 的相反数是 a ;

(ii) 和的相反数等于相反数的和。

乘法与除法公理 (M_1-M_5)

M_1 封闭性. 若 a, b 是数, 有且仅有一个数称为 a 与 b 的积, 表示为 ab (或 $a \times b$ 或 $a \cdot b$) .

M_2 交换律. 对任意的两个数 a 与 b , 有

$$ba = ab.$$

M_3 结合律. 对任意的 a, b, c , 有

$$(ab)c = a(bc) .$$

M_4 单位的存在性. 有且仅有一个不等于零的数 u , 对任意数 a 都有 $au = a$ 成立, 这个数 u 称为单位, 照习惯表示为 1 .

M_5 倒数的存在性. 对每个不为零的数 a , 有且仅有一个数 x 满足 $ax = 1$. 这个数 x 称为 a 的倒数 (或 a 的逆) , 表示为 a^{-1} (或 $1/a$) .

注 公理 M_1-M_5 与公理 A_1-A_5 是相“平行”的, 相当于以乘法代替加法, 但 M_5 与 A_5 并不恰好相当, M_5 还要求 $a \neq 0$. 其原因由下面定理 1.3指出: 任意数与 0 的积等于 0 , 就是零不能做除数.

特殊的公理D

D 分配律. 对于任意的数 a, b, c , 有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

注 在每一逻辑系统之中, 必然有不定义的概念——原始概念. 例如欧几里德平面几何里的点、直线就是不定义的原始概念. 当然, 对这两个概念可以直观地给以描述, 但在几何学的理论结构中它是不能下定义的, 它们的性质是由公理系来给出的. 在域的公理系当中, “数”是不定义的原始概念. 我们可以用实数来解释, 也可以用有理数或者复数来解释. 事实上有理数系、实数系、复数系还有若干数系 (可以是有限个数组成) 都满足域公理, 实数系只是满足域公理系的诸数系其中的一个. 满足公理系统的集合称为这一公理系统的一个解释, 实数系是域公理系统的一个解释.

如果要求仅以实数系为其解释的公理系, 还需在域公理之外再增加新的公理, 这将在 § 1.3 及 § 2.1 中完成.

定理1.3 若 a 是任意数, 那么 $a0 = 0$.

证明 设 b 是任一数, 那么 $b + 0 = b$, 所以 $a(b + 0) = ab$, 由分配律D, 有

$$(ab) + (a0) = (ab)$$

由 A_4 , 有 $a0 = 0$.

定理1.4 若 a, b 是数, 且 $a \neq 0$ 时, 那么有且仅有一个数 x , 满足 $ax = b$, 数 $x = ba^{-1}$.

欲证定理1.4, 只要把定理1.1证明中的“加”换为“乘”, 0 换为 1 , $-a$ 换为 a^{-1} 即得.

注“当且仅当”是数学中常用的术语. 设 A 与 B 是两个命题. “当 B 真, A 真”意味着 B 真蕴含 A 真; “ A 真仅当 B 真”意味着 A 真蕴含 B 真; “ A 真当且仅当 B 真”这意味着双重含意: A 真蕴含 B 真和 B 真蕴含 A 真. 今后用符号 $\Leftrightarrow$ 表示“当且仅当”并记为

$$A \Leftrightarrow B.$$

“当且仅当”也常说成“充分与必要”或“等价于”.

定理1.5

(i) $ab = 0$ 当且仅当 a, b 至少有一为零.

(ii) $a \neq 0$ 及 $b \neq 0$ 当且仅当 $ab \neq 0$.

证明 (i), (ii) 都要证明当且仅当两个方面.

对于 (i), 注意若 a, b 至少有一为零, 那么由定理1.3应有 $ab = 0$. 另一方面, 若 $ab = 0$, 那么有 $a = 0$ 或 $a \neq 0$ 两种情况. 当 $a = 0$ 时, 结果成立; 当 $a \neq 0$ 时, 那么

$$b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

这时有 $b = 0$, 结果成立. 综合两方面, (i) 得证.

对于 (ii), 首先假定 $a \neq 0, b \neq 0$, 应用 (i)可知 $ab \neq 0$. 否则 a, b 至少有一为零与假定矛盾. 另一方面, 设 $ab \neq 0$, 那么 $a \neq 0$ 与 $b \neq 0$ 成立. 否则由定理1.3将有 $ab = 0$,

这与 $ab \neq 0$ 矛盾。

把 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 这共同值作为 abc 的定义。读者容易证得与引理1.1及引理1.2相似的下列引理。

引理1.3 若 a, b, c 是数, 那么

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

引理1.4 若 a, b, c, d 是数, 那么

$$(ac)(bd) = (ab)(cd).$$

定理1.6

(i) 若 $a \neq 0$, 那么 $a^{-1} \neq 0$ 且 $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) 若 $a \neq 0, b \neq 0$, 那么 $(ab)^{-1} = (a^{-1})(b^{-1})$.

这一定理的证明与定理1.2的证明一样, 只要以乘法代加法, 以1代0, a^{-1}, b^{-1} 分别代 $(-a), (-b)$ 即可。注意若 $a \neq 0, aa^{-1} = 1 \neq 0$, 由定理1.5的(ii)便得 $a^{-1} \neq 0$ 。

定理1.7 若 a, b 是数(可以是正的、负的或是零), 那么

(i) $a(-b) = -(ab)$ 。

(ii) $(-a)b = -(ab)$ 。

(iii) $(-a)(-b) = ab$ 。

证明 (i) 因为 $b + (-b) = 0$, 由分配律有

$$a[b + (-b)] = ab + a(-b) = 0$$

另一方面 $ab + [-(ab)] = 0$, 由公理 A_5 有

$$a(-b) = -(ab)。$$

(ii) 可由(i)交换 a, b 得到。至于(iii), 由(i), (ii), 得

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)]。$$

再由定理1.2的(i)得

$$-[-(ab)] = (ab)$$

即 $(-a)(-b) = ab$, (iii) 成立。

推论 $(-1)a = -a$ 。

现在根据上述公理及定理来证明代数中学过的诸分数律。

注 对于 ab^{-1} 引进以下符号:

$$ab^{-1} = \frac{a}{b} = a/b = a \div b$$

这些表示相除的符号称之为分数, 分数的分子与分母按通常定义, 以零为分母的分数没有意义。

定理1.8

(i) 对于每个数 a 有等式 $a/1 = a$ 。

(ii) 若 $a \neq 0$, 那么 $a/a = 1$ 。

证明 (i) 我们有

$$a/1 = (a \cdot 1^{-1}) = (a \cdot 1^{-1}) \cdot 1 = a(1^{-1} \cdot 1) = a \cdot 1 = a,$$

(ii) 若 $a \neq 0$, 按定义 $a/a = aa^{-1} = 1$ 。

定理1.9 若 a, b, c, d 是数且 $b \neq 0, d \neq 0$, 那么

$$bd \neq 0 \text{ 且 } \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

证明 从定理1.5得出 $bd \neq 0$, 由关于分数的注释及引理1.4与定理1.6的(ii), 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) &= (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) = (ac) \cdot (b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

下列五个定理的证明都留给读者去完成。

定理1.10 若 $b \neq 0, c \neq 0$, 那么