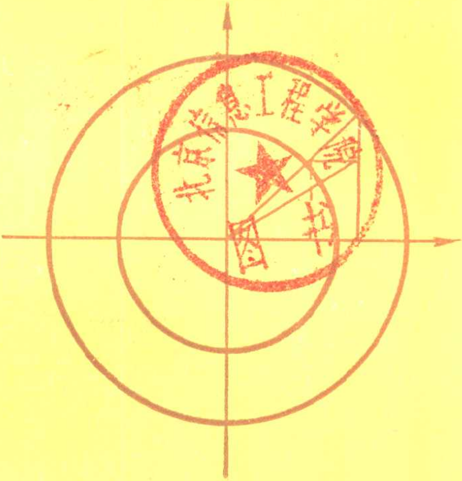
线性代数与解析几何基础



Я.С.布哥洛夫 С.М.尼果里斯基 著
黄璞生 程正兴 译
赵 根 榕 校

陕西科学技术出版社

线性代数与解析几何基础

Я. С. 布哥洛夫　С. М. 尼果里斯基　著

黄璞生　程正兴　译

赵根榕　校

线性代数与解析几何基础

Я. С. 布哥洛夫 С. М. 尼果里斯基 著

黄瑛生 程正兴 译 赵根榕 校

责任编辑 赵生久

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 129,000

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数 1—6,000

统一书号：7202·104 定价：1.20元

前　言

本书将线性代数与解析几何熔为一体加以讲述，是很有特色的．从理论上看，它们本来就属于同一范畴，合在一起是很自然的，因为解析几何是二、三维的线性代数（进而，泛函分析是无限维的线性代数．线性代数本身则是有限维的）．从教学上看，这样做也确有许多优点：例如，读者容易由摸得着看得见的解析几何的事实推广到线性代数的抽象概念，而不致感到茫然；反过来，从线性代数的高度来看解析几何，则更为深刻．

本书的内容、组织与使用，“原序”已有说明，不再赘述．我们认为，本书可供具有高中程度的读者阅读，也可作为高等理工科院校、电大、职工大学的教材，同时给我们的教材改革工作也提供了一个良好参考．

欢迎批评，如蒙使用本书的教师将其教学经验寄给我们，则尤为欢迎．

西北大学　赵根榕

1985．1．28．

原　　序

本书是我们编的教科书《高等数学丛书》的第一册，叙述了行列式理论的基本问题，矩阵论初步，线性方程组理论及向量代数。同时，也讨论了线性代数的主要内容：线性算子、正交变换、自共轭算子、二次型及其化二次型为标准型。

本书还包括了解析几何的基础知识：直线、平面、空间直线以及二次曲线和二次曲面。

我们进行的议论照例都是完全有根据的，但是，我们是这样进行叙述的：一般 n 维情形的证明可以略去，但是，无论是结论的表述，还是详细的解释都与二维和三维的相应的情形一样。

二次曲线与二次曲面的标准型本书叙述得极为简略，因为它们将用数学分析的方法以问题的形式加以补充研究。二次型用数学分析的方法加以研究，或者，如果方便的话，也可以用泛函分析的方法加以研究。

虽然我们把本书称为这套丛书的第一册，但是，事实上，这一册与第二册（《微积分学》）的内容有着密切的联系。应当按照什么样的次序加以叙述是众所周知的。

本书讲述了高等工业学校的教学大纲所规定的所有问题。

目　　录

§1. 二阶行列式

给出四个数 a_1，a_2，b_1，b_2。由这四个数所确定的数 $a_1b_2-a_2b_1$，称为二阶行列式并记为如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1. \tag{1}$$

数 a_1，a_2，b_1，b_2 叫做行列式的元素。在行列式（1）中，a_1，a_2 表示第一行，b_1，b_2 表示第二行，a_1，b_1 表示第一列，a_2，b_2 表示第二列。

容易验证行列式具有如下的性质：

a）把行列式的行变为相应的列，行列式的值不变：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

b）交换行（列）的位置，行列式的值只改变符号：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix};$$

c）行列式中任意一行（或列）的元素扩大 k 倍，则行列式的值也扩大 k 倍。例如：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

即行（或列）的公因子可以提到行列式外面来；

d）如果行列式的任意一行（或列）的元素等于零，那么，它的值也等于零。例如：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0b_2 - 0b_1 = 0;$$

e）如果行列式中两行（或两列）的元素对应相等，那么，它的值等于零。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.$$

下面我们引入三阶行列式并更一般地引入 n 阶行列式。它们仍然具有性质 a），b），c），d），e）。

§2. 三阶行列式和n阶行列式

把数

$$\triangle = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1}$$

表示成如下形式

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

并称之为三阶行列式。

在行列式（2）中，有第一行、第二行和第三行。同样有第一列、第二列和第三列。数 a_{kl} 叫做行列式的元素；这时第一个下标 k 指出已知元素的行标数，第二个下标 l 指出列

标数．也可以说，元素 a_{kl} 位于行列式的第 k 行与第 l 列的交叉处．元素 a_{11}，a_{22}，a_{33} 构成行列式的主对角线，而元素 a_{13}，a_{22}，a_{31} 构成它的副对角线．也可以说，排列着元素 a_{11}，a_{22}，a_{33} 的对角线叫做行列式（2）的主对角线．

表示式（1）的结构十分简单．它是一个数，可由元素 a_{kl} 按下面直观的（沙留斯）法则计算出来．组成（沙留斯）表：它是在行列式（2）的元素的右边添加上该行列式的第一列和第二列而得到的（图 1）．我们看到，应当取所有可能的用直线划出的元素的乘积．同时，与主对角线平行的直线所对应的三个积应当取正号，而另外三条与副对角线平行的直线所对应的三个积应当取负号．

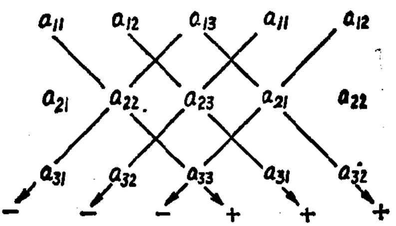


图 1

每一个带有指定正负号的乘积都叫做行列式（2）的项．包含在乘积中的元素都是从每一行与每一列中选出的代表．在每一项中，这些元素都可以按第一个下标增大的次序排列，即按它们的行标数增大的次序来排列．在和（1）中就是这样作的．至于这些元素的列标数，可以有如下的排列：

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3, \\ 2 & 3 & 1, \\ 3 & 1 & 2, \end{matrix}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3 & 2 & 1, \\ 1 & 3 & 2, \\ 2 & 1 & 3. \end{matrix}\right. \tag{4}$$

这恰好是数字1，2，3的所有可能的排列。数字1，2，3的排列

$$1, 2, 3 \tag{5}$$

称为基本排列。

如果在排列中有两个元素互换位置，则称这两个元素进行了置换。置换以后，原排列变成另一个排列。然后，还可以同样地作置换，结果得到第三个排列（不排除第一种排列的可能）。例如，排列

$$3, 2, 1 \tag{6}$$

可以由排列（5）交换第一、三两个元素而得到。而排列

$$2, 3, 1 \tag{7}$$

是由排列（6）的第一、二两个元素的置换而得到的。

需要指出，如果某个排列可由基本排列经过N次置换而得到，同时，这个排列还可由基本排列用任何其他途径经过N_1次置换而得到，那么，两个数N和N_1或者同为偶数，或者同为奇数。如果数1，2，3的某个排列是由基本排列经过偶（奇）数个置换得到的，则把这个排列称为偶（奇）排列。

设给出一个排列$j=(j_1, j_2, j_3)$，其中j_1，j_2，j_3是数字1，2，3所取的某一次序。由基本排列置换为这一排列的置换数用$t(j)$表示。如果$t(j)$是偶（奇）数，则排列j为偶（奇）排列。

排列（3）都是偶排列，而排列（4）都是奇排列。

有了排列的知识以后，就可以给出三阶行列式的另一等价定义。

把 $(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$形式的乘积的和

$$\triangle=\sum_{j}(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{8}$$

叫做三阶行列式（2），其中 $j=(j_1, j_2, j_3)$ 是基本排列1，2，3的所有可能的不同排列。

这个定义可以推广到n阶（$n=1, 2, 3, \cdots$）行列式。能够写成

$$\triangle=|a_{ik}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

的形式，并且按照下面法则由给定的数 a_{ik}(行列式的元素)进行计算所得到的数△叫做 n 阶行列式：△是就所有可能的不同排列 $j=(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 所取的和

$$\triangle=\sum_{j}(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

数 $t(j)$ 等于由基本排列 1，2，…，n 变为排列 $j=(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 所需的置换数．积 $(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 叫做行列式的项。

n 阶行列式满足上节所列举的性质a)，b)，c)，d)，e)。

证明 a）在行列式中把列变为相应的行以后，原来的行标数现在已变为第二个下标。例如，对三阶行列式（2），我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33} \\ =\triangle.$$

在一般情形，新行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{t(j)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

按照第一个下标整理乘积 $a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$ 中的因子，即把排列 $j=(j_1, j_2, \cdots j_n)$ 变为基本排列 $1, 2, \cdots n$。这时，我们应当进行 $t(j)$ 次置换。与此同时，原来第二个下标的基本排列就变为某个排列 $i=(i_1, i_2, \cdots i_n)$，并且数 $t(i)$ 与 $t(j)$ 有相同的奇偶性。于是

$$(-1)^{t(j)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}=(-1)^{t(i)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

不难看出，不同的排列 $j_1, j_2, \cdots j_n$ 对应着不同的排列 $i_1, i_2, \cdots i_n$。但是，

$$\sum_j(-1)^{t(j)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}=\sum_i(-1)^{t(i)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$
$$=\triangle.$$

b) 例如，交换三阶行列式 (2) 的第一行与第三行，则得到一个用 $\triangle'$ 表示的行列式。它等于

$$\triangle'=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{3j_1}a_{2j_2}a_{1j_3}$$
$$=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_3}a_{2j_2}a_{3j_1}$$
$$=-\sum_{j'=(j_3,j_2,j_1)}(-1)^{t(j')}a_{1j_3}a_{2j_2}a_{3j_1}=-\triangle,$$

因为排列 $j=(j_1, j_2, j_3)$ 与排列 $j'=(j_3, j_2, j_1)$ 相差一个置换。

c) 给行列式的某一行（列）乘上任何数 k，相当于给它的所有项都乘以 k，因为每一项都含有指定的行（或列）

的一个元素。因之所有项之和乘以k。

d）如果行列式的任意一行或者任意一列的元素都等于零，这时，它的所有项显然都等于零，从而行列式等于零。

e）如果行列式具有两个相同的行或两个相同的列，则行列式等于零。这一点可由性质b）推出（$\triangle' = -\triangle$，$\triangle' = \triangle$，由此推出$\triangle = 0$）。

由n阶行列式（9）中删去第i行与第k列，剩下的表示式构成一个$(n-1)$阶的行列式M_{ik}，把它叫做元素a_{ik}的余子式。而把值

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

叫做元素a_{ik}的代数余子式。

性质 f）行列式的某一行（或列）的元素a_{ik}与这些元素的代数余子式的乘积之和等于行列式的值：

$$\triangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{10}$$

$$\triangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1, 2, \cdots n). \tag{10'}$$

我们就三阶行列式的第三行来证明这个性质。这时有

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ n_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= \triangle.$$

和（10）叫做行列式按第i行元素的展开式，而把和

(10′) 叫做行列式按第 k 列元素的展开式.

例1 如果在行列式△中（参见 (9) 式），$a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$，则 $\triangle=a_{11}A_{11}$，即计算这个行列式归结为计算它的一个代数余子式，亦即计算 $(n-1)$ 阶的行列式.

例2 如果△的主对角线下方（或上方）的所有元素都等于零（当 $k>l$(或 $k<l$)时，$a_{kl}=0$)，则 $\triangle=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。这可由上面的例子得到.

性质 g）行列式的某一行（或列）的元素 a_{ik} 与其他行（或列）的元素所对应的代数余子式的乘积之和等于零:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \tag{11}$$

$(i\neq j;\ i,\ j=1,\ \cdots n)$.

实际上，只要注意第一个和即可。这个和不依赖于第 j 行的元素。在行列式中用第 i 行的元素代替第 j 行的对应元素，所考察的这个和不变。现在，这个和可以看作新行列式按第 j 行元素的展开式，因而它等于新行列式的值。因为新行列式有相同的两行——第 i 行和第 j 行，故根据性质 e），它等于零.

性质 h）已知两个 n 阶行列式$\triangle_1$和$\triangle_2$，它们除了指定的某一行（或列）外，其余的行（或列）全都相同。这两个行列式的和等于一个 n 阶行列式△，它的指定的一行(或列)由行列式$\triangle_1$和$\triangle_2$的这一行（或列）的对应元素的和组成。例如，

$$\triangle_1+\triangle_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{1,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & (a_{nn}+b_{nn}) \end{vmatrix}=\triangle.$$

事实上，按第 n 列的元素把给出的行列式展开。我们得到

$$\triangle_1+\triangle_2=\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kn}+\sum_{k=1}^{n} b_{kn}A_{kn}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} (a_{kn}+b_{kn})A_{kn}=\triangle.$$

性质 *i*）如果给行列式的任意一行（或列）元素加上另一行（或列）的对应元素的 k 倍，则行列式的值不变。例如，根据性质 *h*），*c*），*e*），

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}+ka_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}+ka_{n1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$=|a_{kl}|+k\cdot 0=|a_{kl}|.$$

适当的应用这个性质，能把给出的行列式的计算化为较低阶的行列式的计算。

例 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -31 & -39 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -31 & -39 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 31 & 39 \end{vmatrix}$$

$$=5\times 39-9\times 31=-84.$$

例 4

$$\begin{vmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\-5&3&-1\\-7&4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&-1\\-7&2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&1\\-7&2\end{vmatrix}=17.$$

例 5 由数 a_1, a_2, …, a_n 构成的行列式

$$\triangle_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

叫做幂行列式或范得蒙行列式①。

如果任意两个数 a_j 和 a_k 彼此相等，则该行列式等于零。如果所有的 a_j 都不相同，则

$$\begin{aligned}\triangle_n=&(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_2-a_1)\cdot\\&\cdot(a_n-a_2)(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_3-a_2)\cdot\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdot(a_n-a_{n-2})(a_{n-1}-a_{n-2})\cdot\\&\cdot(a_n-a_{n-1}).\end{aligned}\tag{12}$$

事实上，当 $n=2$ 时，

$$\triangle_2=\begin{vmatrix}1&a_1\\1&a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1,$$

①范得蒙（Vander Monde, A. T. 1735-1796）——德国数学家。