高等工程专科学校适用

概率论与数理统计

主编　温秋根　夏浩然
主审　王仲才　李昌柏

机械工业出版社

序

概率论与数理统计，是研究随机事件统计规律的学科。它与经典数学、模糊数学一起构成了现代数学的主要三大分支。所谓随机事件，是指在一定条件下可能发生也可能不发生的或然现象。恩格斯曾指出：在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。概率论与数理统计就是探讨这种大量同类现象的总体规律的学科。概率论与数理统计研究对象的客观普遍性，决定了它在实践中应用的广泛性。而概率论与数理统计研究对象的特殊性，导致它区别于经典数学思维模式和理论方法。因此，无论从实践还是从理论哪个方面来讲，掌握概率论与数理统计的基本思想和基础知识，理应是现代工程师必备的专业素质之一。

本书是按照高等专科学校教学大纲，本着必需、够用的原则编写的简明教程。限于篇幅和教学时数，只能介绍最基础的内容。本书结构编排严谨，概念交待清楚，理论剖析透彻，例题精选典型，语言叙述流畅，可谓通俗易懂，是一本合适的高等专科学校的教材。

本书每章开头有内容提要，结尾又有内容小结，这肯定对读者熟练掌握内容大有俾益，同时也构成了本书区别于同类教材的一个显著特色。

王 仲 才

1990.6.15

于江西大学

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科，应用十分广泛，它有其独特的思维和方法，是高等工程专科学校一门重要的技术基础课，也是工程技术人员、企业或经济管理人员必备的数学工具。为适应专科学校教学的需要，根据国家教委1990年1月《高等工程专科学校基础课和部分技术基础课程教学基本要求》（征求意见稿），编写了这本教材。在编写过程中，注意了下面几点.

1. 工程专科教育是以培养技术应用型人才为目标，故在保证数学学科的系统性、逻辑性的基础上，理论的阐述以必需、够用为度，加强应用性，安排了工程实例，力求达到学以致用的目的；

2. 概念的引入都尽可能联系客观背景；

3. 文字简明扼要，通俗易懂，每章前有提要，后有小结，便于自学；

4. 全书教学时数控制在50学时；带星号的节、款为选讲部分；

5. 适用对象为工程专科学校、职业大学、职工大学及本科专业学时不足的学生，也可供工程技术人员和企业或经济管理人员参考。

为便于读者参考，另备有全书习题详解。

参加本书编写的有：黄河水利学校郝启连（第一章）、上海科技专科学校侯长林（第二、三章）、南昌水利水电专科学校温秋根（第四章）、长沙有色金属专科学校夏浩然

（第五、九章）、浙江水利水电专科学校沈云海（第六、八章）、黄河水利学校孙纯琪（第七章）。由温秋根、夏浩然主编。

本书由江西大学校长王仲才教授和李昌柏同志主审。文信山、源建华、朱焆彤、孟庆才等同志对本书的编写提出了有益的意见和帮助。在本书编写过程中，得到了机械工业出版社、南昌水利水电专科学校和湖南省水利水电学校领导的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者不吝指教。

编　者

1990年4月

目　　录

第一章　随机事件及其概率……………………………（1）
§1·1　随机事件 ……………………………（1）
一、随机事件与样本空间……………………………（1）
二、事件之间的关系与运算……………………………（4）
§1·2　事件的概率 ……………………………（9）
一、概率的统计定义……………………………（9）
二、概率的古典定义……………………………（11）
三、概率的几何定义……………………………（13）
四、概率的公理化定义……………………………（15）
五、概率的性质……………………………（15）
§1·3　条件概率与有关的基本公式 ……………（18）
一、条件概率与乘法公式……………………………（18）
二、全概率公式……………………………（20）
三、贝叶斯（Bayes）公式……………………………（23）
§1·4　伯努利概型 ……………………………（24）
一、事件的相互独立性……………………………（24）
二、伯努利概型……………………………（27）
本章小结……………………………（29）
习题一……………………………（31）
第二章　随机变量及其分布……………………………（36）
§2·1　随机变量及其分布函数……………………（36）
§2·2　离散型随机变量的概率分布……………（40）
一、分布律……………………………（40）
二、常用分布……………………………（43）
§2·3　连续型随机变量的密度函数……………（48）

一、密度函数……………………………………………………（48）
二、常用分布……………………………………………………（52）
§2·4 随机变量函数的分布……………………………（60）
一、设X是离散型随机变量……………………………………（61）
二、设X是连续型随机变量……………………………………（63）
本章小结…………………………………………………………（64）
习题二……………………………………………………………（67）
第三章 二维随机变量及其分布……………………………（73）
§3·1 二维随机变量的分布………………………………（73）
一、二维随机变量的分布函数…………………………………（73）
二、二维离散型随机变量的概率分布…………………………（75）
三、二维连续型随机变量的联合分布密度……………………（78）
§3·2 边缘分布和随机变量的独立性……………………（81）
一、边缘分布……………………………………………………（81）
二、随机变量的相互独立性……………………………………（87）
§3·3 二维随机变量函数的分布…………………………（93）
一、离散型………………………………………………………（93）
二、连续型………………………………………………………（95）
三、$U=\max(X,Y)$ 及 $V=\min(X,Y)$ 的分布……（98）
本章小结…………………………………………………………（100）
习题三……………………………………………………………（104）
第四章 随机变量的数字特征………………………………（109）
§4·1 一维随机变量的数字特征…………………………（109）
一、数学期望及其性质…………………………………………（109）
二、方差及其性质………………………………………………（117）
三、数学期望和方差的近似计算………………………………（123）
四、原点矩与中心矩……………………………………………（124）
§4·2 二维随机变量的数字特征…………………………（127）
一、二维随机变量函数的数学期望……………………………（127）

二、数学期望和方差的性质……………………………………（129）
三、协方差与相关系数……………………………………（131）
四、协方差与相关系数的性质……………………………（137）
本章小结……………………………………………………（137）
习题四………………………………………………………（140）
第五章　大数定律与中心极限定理…………………（147）
§5·1　大数定律 ……………………………………（147）
§5·2　中心极限定理 ………………………………（151）
习题五………………………………………………………（155）
第六章　参数估计……………………………………（157）
§6·1　统计量 ………………………………………（157）
一、母体和样本……………………………………………（157）
二、统计量…………………………………………………（158）
三、样本均值和方差的简化公式…………………………（160）
§6·2　抽样分布 ……………………………………（163）
一、$\bar{x}$的分布……………………………………………（163）
二、χ^2分布 ………………………………………………（164）
三、t分布 …………………………………………………（166）
四、F分布…………………………………………………（168）
§6·3　分布密度的近似求法 ………………………（171）
§6·4　点估计 ………………………………………（175）
一、矩估计法………………………………………………（176）
二、极大似然估计法………………………………………（177）
§6·5　估计量的优劣标准 …………………………（182）
一、无偏性…………………………………………………（182）
二、有效性…………………………………………………（185）
§6·6　区间估计 ……………………………………（187）
一、母体均值的区间估计…………………………………（187）

二、母体方差的区间估计…………………………………（190）
本章小结…………………………………………………（192）
习题六……………………………………………………（195）
第七章 假设检验……………………………………（198）
§7·1 假设检验的基本思想 ……………………（198）
一、问题的提出…………………………………………（198）
二、假设检验的基本思想………………………………（199）
三、两类错误……………………………………………（201）
§7·2 单个正态母体的假设检验………………（201）
一、已知σ^2，检验H_0：$\mu=\mu_0$ ……………………（201）
二、σ^2未知，检验H_0：$\mu=\mu_0$ ……………………（202）
三、检验H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$……………………………………（204）
§7·3 两个正态母体的假设检验………………（205）
一、已知σ_1^2和σ_2^2，检验H_0：$\mu_1=\mu_2$……………………（205）
二、σ_1^2，σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，检验假设H_0：
$\mu_1=\mu_2$……………………………………………………（207）
三、检验H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$……………………………………（209）
***§7·4 总体分布函数的假设检验**………………（213）
本章小结…………………………………………………（219）
习题七……………………………………………………（221）
第八章 回归分析……………………………………（224）
§8·1 一元线性回归 ……………………………（224）
一、基本概念……………………………………………（224）
二、回归直线方程………………………………………（225）
三、回归方程的显著性检验……………………………（230）
四、预测与控制…………………………………………（235）
§8·2 一元非线性回归 …………………………（238）
一、指数曲线型…………………………………………（238）
二、幂函数型……………………………………………（239）

三、双曲线型……………………………………………（240）
四、对数曲线型…………………………………………（240）
五、S形曲线（成长曲线）型……………………………（240）
§8·3　多元线性回归………………………………（242）
一、数字模型……………………………………………（242）
二、回归方程……………………………………………（243）
三、相关性检验…………………………………………（244）
四、偏回归平方和与因素主次的判别…………………（245）
本章小结…………………………………………………（247）
习题八……………………………………………………（250）
第九章　方差分析……………………………………（252）
§9·1　单因素方差分析…………………………………（252）
*§9·2　双因素方差分析………………………………（264）
一、无重复试验双因素方差分析………………………（264）
二、有重复试验双因素方差分析………………………（269）
本章小结…………………………………………………（275）
习题九……………………………………………………（277）
附录一　排列组合与二项式公式………………………（281）
附录二　常用数理统计表………………………………（284）
附表1　标准正态分布表………………………………（284）
附表2　泊松分布表……………………………………（287）
附表3　χ^2分布表……………………………………（289）
附表4　t分布表…………………………………………（291）
附表5　F分布表…………………………………………（292）
附表6　相关系数检验表………………………………（301）
附录三　习题答案或提示………………………………（302）
参考文献…………………………………………………（316）

第一章　随机事件及其概率

〔提要〕 事件和概率是本学科两个最基本的概念。本章首先借助集合论的方法讨论事件之间的关系及其运算，然后给出概率的定义、性质以及计算概率的各种法则，为以后各章提供模型和工具。

§1.1　随机事件

一、随机事件与样本空间

人们在生产实践、科学试验和日常生活中观察到的现象，大体可分为两类：一类是在一定条件下必然会发生或必然不会发生的现象，称为必然现象。因为其结果是明确的，所以也称为确定性现象。例如：同性电荷相互吸引，常温下铁被熔化，水在5°C结成冰等，都是必然不会发生的现象；同性电荷相互排斥，垂直上抛的石子会下落等，都是必然发生的现象。

另一类是在一定条件下可能发生，也可能不会发生的现象，其结果不能预先确定，称为随机现象。例如：

（1）一个盒子中装有10件产品，其中5件是正品，另外5件是次品，从中任取1件得正品；

（2）某电话总机在单位时间内可能接到的呼唤次数是20次；

（3）某发电机在正常运行条件下，某日将发生故障。

就每次观察而言，随机现象具有不确定性；但在相同条

件下进行大量观察，随机现象就会呈现出某种规律性。例如，多次重复地抛掷一枚质地均匀而对称的硬币，就会发现正面朝上和反面朝上的次数大致相等。随机现象的这种规律性称为随机现象的统计规律性，概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科。

对随机现象的研究是通过试验进行的。在这里，试验这个术语既包括各种各样的科学实验，也可以是对某一事物的某个特征的观测。如果某一试验满足条件：

1. 试验可以在相同条件下重复地进行；

2. 每次试验的所有可能的结果是明确知道的，并且可能的结果不止一个；

3. 每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在进行一次试验之前不能肯定会出现哪一个结果。

则称这样的试验为随机试验。有时也简称为试验，记为E。

例1 抛一枚硬币，观察其“正面朝上”还是“反面朝上”。

例2 向胸环靶射击一枪，观察射中环数。

例3 在某一段时间间隔内，记录某电话总机接到的呼唤次数。

例4 记录某电厂一昼夜的最高负荷量。

以上所举的4个例子都是随机试验。可以分别记为E_1，E_2，E_3，E_4。

在一次随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，简称为事件。通常用A，B，C，…表示。例如，在试验E_1中，“正面朝上”、“反面朝上”；在E_2中，“击中5环”，“击中的环数大于6”，“击中的环数不小于

7”；E_3中“呼唤次数在20至30之间”等都是随机事件。

在一次试验中，它的每一个可能出现的结果都是这个试验的最简单的随机事件，称为基本事件。因为随机试验的所有可能的结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的，它们的全体称为样本空间，通常用Ω表示，Ω中的点就是基本事件，也称样本点，用ω表示，例如：

在E_1中，可能的结果只有两个："正面朝上"和"反面朝上"。若记ω_1为"正面朝上"，ω_2为"反面朝上"，则$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

在E_2中，可能的结果有11个。若记ω_i为"射中i环"$(i=0, 1, 2, \cdots, 10)$，则$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$或$\Omega=\{\omega_i, i=0, 1, 2, \cdots, 10\}$，亦可令$i$表示"射中$i$环"，则$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$。

在E_3中，$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$。

在E_4中，$\Omega=\{\omega; 0\leqslant\omega\leqslant P_0\}$，或$\Omega=\{0, P_0\}$，其中$P_0$是该厂的最大发送功率。

在一次试验中，有的随机事件就是基本事件，有的随机事件是由具有某个特征的基本事件所组成的，例如在E_2中，事件A表示"射中环数大于6"是由基本事件"7"，"8"，"9"，"10"所组成，即$A=\{7, 8, 9, 10\}$。所以从集合论的观点看，随机事件是样本空间Ω中的一个子集。

在每次试验中必然发生的事件称为必然事件。在试验中，当且仅当事件A中所包含的任一个样本点出现时，才称A在这次试验中发生了，因为Ω是由试验中所有样本点组成，而在任何一次试验中必然要出现Ω中的某一个样本点，所以一个试验E的样本空间就是它的必然事件，我们就用Ω来记必然事件。

在任何一次试验中都不发生的事件称为不可能事件，即它不含有任何一个样本点，记为ϕ。

必然事件和不可能事件都属确定性现象。为了研究方便，把它们看作两个特殊的随机事件。

二、事件之间的关系与运算

同一试验中的各种事件之间是有联系的。对事件之间相互关系和运算的研究，有助于对较复杂事件的分析和处理。

1．事件的包含关系和相等关系

若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A是事件B的子事件，或称事件A包含于事件B，记为$A\subset B$或$B\supset A$。例如例2中，事件$A=\{10\}$发生，必然导致事件$B=\{7,8,9,10\}$发生，所以$A\subset B$。

为直观起见，常用平面上一个矩形表示样本空间Ω，矩形内每一点表示一个基本事件（样本点），用封闭曲线所围图形表示事件，$A\subset B$可表示如图1-1。

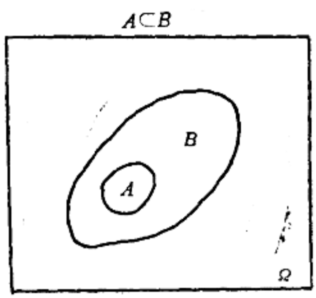

图 1-1

因为不可能事件不含样本点，所以规定对任一事件A，有$\phi\subset A$。

如果$A\subset B$并且$B\subset A$，则称事件A与B相等，记为$A=B$。显然，相等的两个事件总是同时发生或同时不发生 在例2中，若A表示事件“射中环数为奇数”，$B=\{1,3,5,7,9,\}$，则$A=B$。

2．事件的和

“事件A与B中至少有一个发生”也是一个事件，称为事件A与B的和，记为$A\cup B$。它的几何表示如图1-2中阴影部分，即事件$A\cup B$包含的样本点是A与B中样本点的全部（重复的只记一次），在例2中，若A表示“射中环数为奇数”，B表示“射中八环以上”，则$A\cup B=\{1,3,5,7,8,9,10,\}$。

3. 事件的积

“事件A与B同时发生”也是一个事件，称为事件A与B的积，记为$A\cap B$或AB，其几何表示如图1-3中阴影部分，即事件AB包含的样本点为事件A、B所共有。在例2中若$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{8,9,10\}$，则$AB=\{9\}$。

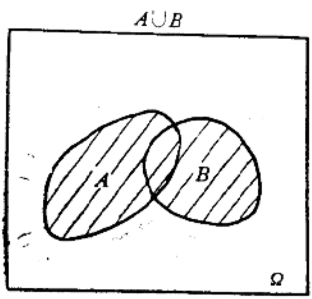

图 1-2

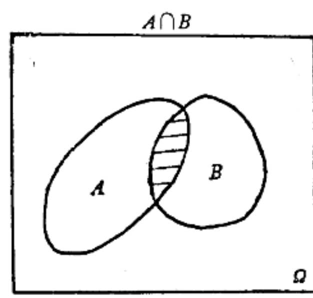

图 1-3

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个与可列多个事件的情形：

事件“n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生”称为A_1，A_2，…，A_n的和，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

而“可列多个事件A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生”称为A_1，A_2，…，A_n，…的和，记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

事件“n个事件A_1，A_2，…，A_n同时发生”称为A_1，A_2、…，A_n的积，记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

或 $$A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

而“可列多个事件A_1，A_2…，A_n…同时发生”称为A_1，A_2，…A_n，…的积，记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

或 $$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

4. 事件的差

“事件A发生而事件B不发生”也是一个事件，称为事件A与B的差，记为$A-B$。其几何表示如图1-4中阴影部分，从A中去掉属于B的样本点，所剩样本点的全体就是事件$A-B$。在例2中，若$A=\{1，3，5，7，9\}$，$B=\{8，9，10\}$，则$A-B=\{1，3，5，7\}$。

5. 互斥事件

若事件A与B不能同时发生，即$AB=\phi$，则称事件A与B是**互斥事件或互不相容事件**，其几何表示如图1-5，即事件A与B没有共同的样本点。在例2中，若$A=\{1，3，5，$

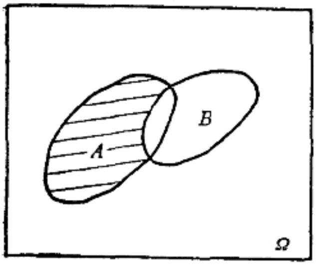

图 1-4

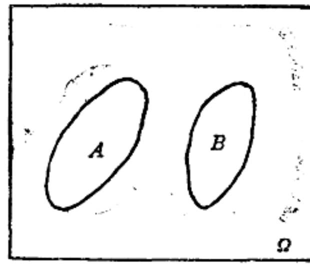

图 1-5

7，9}，$B=\{2，4，6，8\}$，则显然$AB=\phi$. 因此A与B互斥。

若n个事件A_1，A_2，…，A_n中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_iA_j=\phi \qquad (1\leqslant i<j\leqslant n)$$

则称这n个事件是互不相容的（或两两互斥）。

当A与B互斥时，$A\cup B$常写为$A+B$。

6. 两事件互逆（或对立）

若事件A与B同时满足条件

$$A\cup B=\Omega \qquad\qquad AB=\phi$$

则称A与B互逆（或对立），并称B是A的（同样A也是B的）逆事件（或对立事件），记A的逆事件为$\overline{A}$，B的逆事件为$\overline{B}$，则

$$B=\overline{A} \text{或} A=\overline{B}$$

其几何表示如图1-6。显然$\overline{A}=\Omega-A$。在例2中，若A表示“射中环数少于5”，即$A=\{0，1，2，3，4\}$；而B表示“射中环数不少于5”，即$B=\{5，6，7，8，$

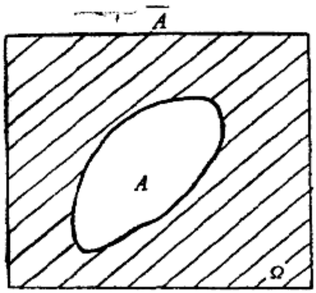

图 1-6

9，10}，则显然$A\cup B=\Omega$，且$AB=\phi$，故$B=\overline{A}$。

根据事件互逆的定义，显然有

$$\overline{\overline{A}}=A \qquad \overline{\Omega}=\phi$$

$$A\cup\overline{A}=\Omega$$

同集合的运算一样，事件的和与积还满足下列规律

（1）交换律

$$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$$

（2）结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

（3）分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

（4）对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}，\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

此规律可推广到任意有限多个和无限（可列）多个事件。假设A_1，A_2，…是有限或可列多个事件，则

$$\overline{\bigcup_i A_i} \quad \bigcap_i \overline{A_i}$$

显然有

$$\overline{\bigcup_i \overline{A_i}}=\bigcap_i A_i$$

取上式两端的余，则对偶律亦可写成

$$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}$$