应用数学和力学讲座丛书

断裂理论基础

李 灏 陈树坚 编著

四川人民出版社

《应用数学和力学》讲座丛书

断 裂 理 论 基 础

李 灏 陈树坚 编著

四 川 人 民 出 版 社

一九八三年·成都

责任编辑：崔泽海
封面设计：李文金

断裂理论基础　　李　灏　陈树坚　编著

四川人民出版社出版　　重庆印制一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本 787×1092毫米 1/16　　印张 11.5　字数 263 千
1983年10月第1版　　1983年10月第1次印刷
印数：1—6,150 册

书号：7118·699　　定价：1.[illegible]8 元

内 容 简 介

本书第一章概述矩阵、矢量与笛卡儿张量、解析函数论与奇异积分方程、诺特理论与场的守恒定律、应力场与应变场、弹性理论、塑性理论等数学与固体力学知识，作为以后各章的理论基础。其后各章分别讲述断裂理论的基本内容，包括线弹性断裂理论、边界配置法与有限单元法、混合型裂纹的脆性断裂、位错与断裂、非线性弹性与弹塑性断裂理论和断裂动力学。书末附有详细的参考文献。本书体系严谨，可作为从事固体力学工作的研究人员、大学教师和研究生进一步学习断裂理论的参考书。

《应用数学和力学》讲座丛书序

《应用数学和力学》编委会为了适应四化建设的需要，推动应用数学和力学方面的学术交流，自去年五月起在全国各地举办不定期的《应用数学和力学》讲座，由本刊编委同志义务分任主讲，讲授有关专题，介绍最新成就，深得各方同志支持和欢迎。去年已举办讲座五期，今后将继续举办。由于场地、名额所限，希望能参加听讲而向隅的同志很多，纷纷提出要求。为此，在四川人民出版社马骏副总编的建议下，特将讲座材料内容，编成丛书，陆续分册出版，以供读者。

长期以来，应用数学和力学是相辅相成的。晚近的发展更加如此。例如：由于人类生产活动的飞速发展，生产材料的日益更新，我们要处理比弹性、塑性性、不可压缩流体、非粘性流体等更为复杂的介质，从而要研究有记忆性能的材料、有极化性质的材料和有非局部性质的材料等的力学性质。为了描述这些力学性质，人们就要求大量使用泛函分析和群论的方法。又例如：为了处理巨型的机械、特大的载荷和高速的运动，人们面对着大量的非线性问题。为了处理这些非线性问题，二十年来，力学界开发了奇异摄动理论的研究。又例如：计算机的发展，提供了力学原理直接用于工程上复杂结构物强度计算的可能性，从而开创了近代的有限元理论，以及和有限元理论密切相关的广义变分原理。其它如嘉当张量之用于极化材料的分析，突变理论之用于处理稳定性问题，沃许函数之用于映象理论等，也无不如此。此外，随机过程和模糊数学等学科的发展，也正深刻地反映在力学原理处理真实生产问题的过程之中，从而使生产问题的处理更真实地反映了现实。

《应用数学和力学》讲座和讲座丛书，将尽可能地反映这种日新月异的发展情况。

《应用数学和力学》编委会谨藉丛书发行之际，向主讲的编委同志和编辑部的工作同志们致谢，由于他们的无私劳动和辛勤努力，讲座才能办成，丛书才得出版。

恳请读者不吝指教，对本丛书的任何意见，都将是对《应用数学和力学》编委会工作的支持和爱护。

钱　伟　长

一九八一年元月二十九日于北京清华园照澜院

序　言

本书是在李灏的《断裂理论》讲义基础上整理而成的，作为《应用数学和力学丛书》的一卷出版，可作为从事固体力学工作的研究人员、大学教师和研究生进一步学习断裂理论的参考书。假定本书读者已具有断裂力学的初步知识，所以并不准备从头讲述。

本书第一章概述数学与固体力学的知识，作为以后各章的理论基础。

断裂理论包括宏观和微观两个方面，微观断裂理论属于固体物理的范畴。本书只介绍宏观的断裂理论，包括弹性断裂理论和弹塑性断裂理论。

本书第二章论述线弹性断裂理论。弹性断裂理论有线性和非线性两个组成部分，主要研究脆性断裂。脆性断裂的奠基性工作是葛里菲斯（A. A. Griffith）理论[1]，他根据体系能量平衡观点，研究了玻璃、陶瓷等脆性材料中裂纹扩展问题。然而当时并未得到广泛的重视；因为那时工程结构中采用的钢材很少发生脆性断裂，在生产上还不是一个严重问题。直到第二次世界大战及其后生产上焊接工艺和高强度、超高强度材料在工程中广泛使用，发生了很多断裂事故。人们这才对脆性断裂重视起来。当时发现，这些断裂事故都是意外发生的，断裂处的最大工作应力往往并不高，甚至远低于材料的屈服极限。这种现象称为**低应力脆断**。人们从无数低应力脆断事故中认识到，材料传统的强度和韧度指标虽能满足通常设计要求，却不能避免断裂事故的发生，这说明传统的指标和强度计算不能确保结构的安全，不能适应新材料、新工艺的需要。人们对低应力脆断的大量分析研究表明：脆性破坏总是由宏观缺陷或裂纹的**失稳扩展**（快速扩展）引起的。有时裂纹还会持续缓慢地作所谓**亚临界扩展**，最后到达临界状态，发生**半脆性断裂**。所谓宏观裂纹，就是指冶金缺陷或在加工和使用（如在加载、疲劳、应力腐蚀）过程中形成的缺陷，它在构件中的存在是难免的。扬弃传统强度理论中关于材料不存在缺陷的假设，而从实际构件中存在缺陷或裂纹的客观事实出发，把构件看成连续和间断的统一体，就形成了一门新兴的强度学科——断裂力学。在这个基础上提出的一整套计算方法和设计原则，使工程中的低应力脆断得到了合理的说明和解决，从而大大地减少其发生。在这个发展过程中，欧文(G. R. Irwin) 作出了很大的贡献。他在1948年指出[2]：葛里菲斯型的平衡必须存在于载荷功、材料贮存的弹性应变能、塑性变形功和表面能的变化之间。他认识到：对于延性材料，抵抗表面张力作的功要比抵抗塑性变形作的功小得多。1955年后他又指出[3]：能量观点相当于一种应力强度观点，当表示裂纹顶端应力场强度的**应力强度因子**到达反映其临界值（即材料的**断裂韧度**）时，便发生断裂。

线弹性断裂理论是从二维裂纹问题开始的，但其研究方向将是三维问题、表面裂纹问题、各向异性体问题等。

计算应力强度因子有很多数值方法，本书第三章着重阐述**边界配置法**和**有限单元法**。边界配置法是1964年由格洛斯 (B. Gross)、斯若利 (J. E. Srawley) 等开始提出的[4]。他们将威廉斯 (M. L. Williarms) 应力函数截断为有限项，例如 $2m$ 项，然后由边界上的 m 个点处的 2m个条件去确定其中 $2m$ 个待定常数。1970 年起，有限单元法在断裂问题的数值分析中有很大发展。裂纹体的应力场在裂纹顶端具有奇异性的特点，在应用有限单元法进行计算时应给以足够的重视，因此本书除介绍通常单元之外，着重介绍特殊单元。

本书第四章讨论混合型裂纹的脆断．1963年，欧道昂（F. Erdogan）和薛昌明（G. C. Sih）提出了关于混合型裂纹扩展问题的**最大拉应力理论**[5]．1973年，薛昌明又提出了**应变能密度理论**[6]，并应用到各个方面中去[7-11]．我国学者在混合型裂纹扩展理论研究中，也有不少成果．

位错与断裂有密切的关系，至少从方法论观点看来可借用位错模型研究脆断，本书第五章将介绍其理论基础．

裂纹顶端塑性区的存在是阻止裂纹扩展的重要因素．因此，必须考察裂纹顶端的屈服状况，这是弹塑性断裂理论的研究任务．弹塑性断裂理论以**纤维断裂**为其基本形态，它包括小范围屈服断裂、大范围屈服断裂和全面屈服断裂．小范围屈服断裂是指塑性区尺寸比起裂纹尺寸小得多的断裂现象，它可以用弹性断裂理论的方法近似地处理．大范围屈服断裂是指裂纹前缘塑性区尺寸接近裂纹尺寸的断裂现象；裂纹前缘达到全面屈服时的断裂现象称为全面屈服断裂．对于大范围屈服断裂和全面屈服断裂，不但线弹性断裂理论的结论不能成立，而且也不能简单地进行所谓塑性区修正．它的研究必须建立在裂纹体的塑性理论基础上，这是当前断裂理论的主要研究方向，有关的各种断裂判据还在进一步探讨和发展中．1960年，道格达尔（D .S. Dugdale）运用穆斯海里什维利（N. I. Mushkelishvili）的方法[12,13]，研究裂纹顶端的塑性区（DM模型）．1961年，威尔斯（A. A. Wells）提出[14]：在大范围屈服断裂时，也可以用所谓裂纹张开位移作为度量裂纹扩展时所作的功．1963年，皮尔贝（B. A. Bilby）、克脱莱尔（A. H. Cottrell）和斯文顿（K. H. Swinden）从位错概念出发[15]研究裂纹顶端的塑性区（BCS模型）．1968年，赖斯（J. R. Rice）[16][17]提出一种用围绕裂纹顶端的路径无关的线积分来研究裂纹顶端的变形，分析了裂纹顶端的应变集中问题．可以证明：这是二维弹性静力学守恒定律的一种形式．本书第六章就探讨非线性弹性和弹塑性断裂问题．

研究含缺陷或裂纹体在快速加载或裂纹快速扩展时的力学问题，若考虑物体各处的惯性，这是本书第七章断裂动力学的任务．脆性材料切削加工、碰撞冲击下的破坏、地震对结构的影响、输油管道与天然气管道的破裂等都是断裂动力学问题的实例．军事工程中许多爆炸和防爆问题都涉及断裂动力学．因此，断裂动力学的研究在现代工农业、现代国防和现代科学技术上都具有十分重要的意义．早在1948年，莫特（N. F. Mott）[18]将动能引入能量判据，1951年约飞（E. H. Yoffé）[19]考察了恒长度裂纹的匀速扩展．1960年，克拉斯（J. W. Craggs）[20]研究的是裂纹面受载而加载点随裂纹前进的半无限长裂纹．直到布诺贝格（K. B. Broberg）[21]和巴克（B. R. Baker）[22]分别在1960年和1962年分析了裂纹从零长度对称匀速开裂后，建立了力学模型，才有现实的意义．欧道昂[23]提出闭合能判据，阿肯逊（C. Atkinson）、埃赛贝（J. D. Eshelby）以及福洛恩德（L. B. Freund）先后讨论了能通率判据[24][25]，福洛恩德的研究[26]比较广泛，他考虑了裂纹在一般载荷下应力波和应力脉冲对匀速与变速开裂的影响．断裂动力学已有三十年的历史，由于它在理论和实验技术上都比较复杂，现在仅处于初创阶段．可望在不久的将来出现可喜的成果．目前，不论在微观领域还是在宏观领域，断裂动力学都还有大量工作可做．

纵观断裂理论的产生和发展，充分地证实了恩格斯的一句话："科学的发生和发展一开始就是由生产决定的．"（《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第162页．）

编　者

目　录

第一章　数学与固体力学基础

§1-1　矩　　阵

一、矩阵的概念

矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个纵横排列的数组，

$$\mathbf{A}=(A_{ij})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots A_{2n} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots A_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

其中 $A_{ij}(i=1,2\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵$\mathbf{A}$ 的**元素**或**分量**．我们说矩阵 $\mathbf{A}$有m 行和 n 列，或者说是 $m\times n$ 阶的。有时我们使用符号 $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ 表示矩阵及其阶数。

当 $n=1$ 时，$\underset{m\times 1}{\mathbf{a}}$ 称为 m **维列阵**或**列矢量**，

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

当 $m=1$ 时，$\underset{1\times n}{\mathbf{b}}$ 称为 n **维行阵**或**行矢量**，

$$\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\cdots,b_n) \tag{1.3}$$

行数与列数相等的矩阵 $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$，叫做 **n 阶方阵**．从 A_{11} 到 A_{nn} 的矩阵对角线，叫做该方阵的**主对角线**．除主对角线上外所有元素都等于零的方阵，叫做**对角阵**．主对角线上的元素 A_{ii} 都等于1，其余元素都等于零的方阵，叫做**单位阵**，记为$\mathbf{I}$，

$$\mathbf{I}=(\delta_{ij}) \tag{1.4}$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克 (Kronecker) 符号，

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1,\ 若\ i=j \\ 0,\ 若\ i\neq j \end{cases} \tag{1.5}$$

所有元素都等于零的矩阵，叫做**零阵**，记为$\mathbf{0}$．

对称于主对角线的元素彼此相等，即 $A_{ij}=A_{ji}$ 的方阵称为**对称阵**；彼此等值而反号，即 $A_{ij}=-A_{ji}$，从而 $A_{ii}=0$ 的方阵称为**反对称阵**．

将矩阵 $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ 的行与列互换而成的矩阵 $\underset{n\times m}{\mathbf{B}}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的**转置阵**，以 $\mathbf{A}^T$ 表示，

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T \tag{1.6a}$$

意味着

$$B_{ij}=A_{ji} \tag{1.6b}$$

显然

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A} \tag{1.7}$$

如果方阵 **A** 的所有非零元素都分布在靠近主对角线的带宽内，则此方阵 **A** 称为**带状阵**。例如

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

称为半带宽为 3 的方阵。显然，对角阵就是半带宽为 1 的带状阵。

所有非零元素都在对角线之上或之下的矩阵称为**三角阵**，前者称为**上三角阵**，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1n} \\ 0 & A_{22}\cdots A_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 \ \cdots A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1n} \\ & A_{22}\cdots A_{2n} \\ 0 & \ddots \quad \vdots \\ & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

后者称为**下三角阵**，

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} A'_{11} & & & \\ A'_{21} & A'_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

二、矩阵代数

同阶矩阵相等的条件是相应的元素相等，即 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 的条件是 $A_{ij}=B_{ij}$

同阶矩阵相加或相减所得到的矩阵，其元素是原来矩阵相应元素的和或差，即

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{C}=\mathbf{A}\pm\mathbf{B} \\ &\text{意味着} \\ &C_{ij}=A_{ij}\pm B_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

矩阵的加法或减法显然遵从交换律和结合律：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{1.12}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \tag{1.13}$$

矩阵 **A** 乘以标量 α 定义为 **A** 中的每一个元素都乘以 α，记为 $\alpha\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\alpha$，即

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}=\mathbf{A}\alpha \\ &\text{意味着} \\ &B_{ij}=\alpha A_{ij}=A_{ij}\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

矩阵与标量的乘法显然符合分配律：

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \tag{1.15}$$

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} \tag{1.16}$$

矩阵 **A** 与 **B** 可相乘的条件是 **A** 的列数n等于 **B** 的行数. **A** 乘以 **B** 的积是一矩阵**C**, 其元素C_{ij}等于 **A** 的第 i 行与 **B** 的第 j 列的对应元素相乘的积之和，即

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{C}=\mathbf{AB}\\ &\text{意味着}\\ &C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{in}B_{nj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}\end{aligned}\right\} \tag{1.17a}$$

今后可采用**求和约定**：一式子里重复两次的指标要对它遍历 1 到 n 求和. 这样就可将 (1.17a) 简写成

$$C_{ij}=A_{ik}B_{kj} \tag{1.17b}$$

这种重复两次的指标称为**哑指标**. 重要的是：更换哑指标，例如将上面的 k 换成 r，写成 $A_{ir}B_{rj}$，并不改变式子的展开形式.

注意两矩阵相乘，交换律一般不成立. 例如设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}&\text{[illegible]}\\10&3\end{pmatrix}$$

即

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

但矩阵与单位阵相乘，有

$$\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A} \tag{1.18}$$

另外，乘法结合律仍成立，

$$\mathbf{ABC}=(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{1.19}$$

两矩阵乘积的转置等于各自转置并改变前后次序的乘积，

$$(\mathbf{BA})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \tag{1.20}$$

这就是**转置逆序规律**.

应该注意：从**AB**=**AC**不能推知**B**=**C**，例如

$$\mathbf{A}=(3,2),\quad \mathbf{B}=\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{Bmatrix}1\\7\end{Bmatrix}$$

虽然有

$$\mathbf{AB}=(3,2)\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix}=17=(3,2)\begin{Bmatrix}1\\7\end{Bmatrix}=\mathbf{AC}$$

但是

$$\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$$

只有当 $\mathbf{A}$ 的元素 A_{ij} 取任意数值时，都能使 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 成立，才能断定 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $\det\mathbf{A} \neq 0$，则称 $\mathbf{A}$ 为**非奇异阵**，否则称为**奇异阵**．非奇异阵 $\mathbf{A}$ 的**逆阵** $\mathbf{A}^{-1}$ 满足

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \tag{1.21}$$

逆阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 的求法如下：

（1） 用相应的代数余子式代替 $\mathbf{A}$ 中的每一元素．元素 A_{ij} 的代数余子式 A^*_{ij} 定义为：将矩阵第 i 行和第 j 列的元素舍去后形成 $(n-1)$ 阶行列式 M_{ij}，并乘以 $(-1)^{i+j}$，即 $A^*_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

（2） 把代数余子式 A^*_{ij} 构成的矩阵 $\mathbf{A}^*$ 转置．

（3） 用矩阵行列式 $|\mathbf{A}|$ 除 $(\mathbf{A}^*)^T$ 中的每一个元素，则得 $\mathbf{A}$ 的逆阵，即

$$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{A}^*)^T/|\mathbf{A}| \tag{1.22}$$

若系数阵 $\mathbf{A}$ 是非奇异阵，则线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{C} \tag{1.23}$$

有唯一解：

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \tag{1.24}$$

如果对于所有的 $\mathbf{x}$ 都有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{1.25}$$

则 $\mathbf{A}$ 是**半正定阵**．如果对所有 $\mathbf{x} \neq 0$ 都有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \tag{1.26}$$

并且仅当 $\mathbf{x} \equiv 0$ 时才有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \tag{1.27}$$

则 $\mathbf{A}$ 是**正定阵**．

将矩阵分块成一些**子阵**．例如，

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ \hdashline A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{array}\right)$$

表示矩阵由点线分块成四个子阵，可以写成

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\underset{3\times3}{\mathbf{A}_{11}}$，$\underset{3\times2}{\mathbf{A}_{12}}$，$\underset{1\times3}{\mathbf{A}_{21}}$ 和 $\underset{1\times2}{\mathbf{A}_{22}}$ 本身就是矩阵．我们可以把每个子阵当做矩阵元素，进行矩阵运算．例如对于分成两个子阵的 $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}=\begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix}$$

有

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2\end{pmatrix}$$

当然，子阵的阶数一定要使得任何接着进行的乘法等运算是有意义的。

三、矩阵分析

设矩阵**A**的每个元素都是t的函数，则矩阵**A**对t的导数是由**A**中每个元素对t的导数形成的矩阵，即

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{dA_{ij}}{dt}\right) \tag{1.28}$$

矩阵**A**对t的积分是由**A**中的每个元素对t的积分形成的矩阵，即

$$\int\mathbf{A}dt=\left(\int A_{ij}dt\right) \tag{1.29}$$

设矩阵**A**为一n阶方阵，对任意n维列阵

$$\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix}$$

求乘积

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix}=A_{ij}x_ix_j \tag{1.30}$$

这称为**x**的**二次型**，注意(1.30)里用了求和约定。

对二次型有

$$\frac{\partial\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}=2\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1.31}$$

这里，$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$表示对列阵**x**各个分量$x_i$的偏导数所组成的列阵：

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial}{\partial x_n}\end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

当矩阵**A**是正定阵时，二次型(1.30)称为**正定二次型**。

§1-2 矢量与笛卡儿张量

固体力学涉及的物理量同描述它们所用的特殊坐标系无关。在数学上，这些量最好用**张量**表示，因为张量的存在正是同坐标选择无关。选定了任何特殊的参照坐标系，就可用一张量在该系中的**分量**来表示这个张量；而它在任何其他坐标系中的分量也就可用**变换律**求得。张量正是用它的分量的变换律来定义的。

固体力学的定律常同参照坐标系的选择无关，因此最好写成**张量方程**。因为张量变换是齐线性的，如果张量方程在某一坐标中成立，则它在任何其他系中也成立。张量方程在坐标变换下的这种**不变性**是张量演算在固体力学中非常有用的主要原因之一。

当考虑的是任意曲线坐标间的普遍坐标变换时，所定义的是一般张量。如果只限于齐次坐标间的变换，涉及的便是**笛卡儿张量**。本书用的张量主要是笛卡儿张量。因此今后提到"张量"一词，就是指"笛卡儿张量"，除非另作说明。

一、矢量

最简单的张量是大家熟习的标量与矢量。标量只具有大小；矢量则除大小外，还有方向。于是矢量可用直角笛卡儿坐标系里的有向线段表示，如图1-1所示。设矢量 $\mathbf{v}$ 的大小为 v，而方向角为 $\theta_i(i=1,2,3)$，则它在坐标轴 x_i 上的投影或**分量**是

$$v_i=v\cos\theta_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.33}$$

反之，已知矢量的分量，便有

$$\left.\begin{aligned} v&=(v_iv_i)^{1/2}\\ \cos\theta_i&=v_i/v \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

这里用了求和约定。可见矢量 $\mathbf{v}$ 完全可用其分量 v_i $(i=1,2,3)$表示。

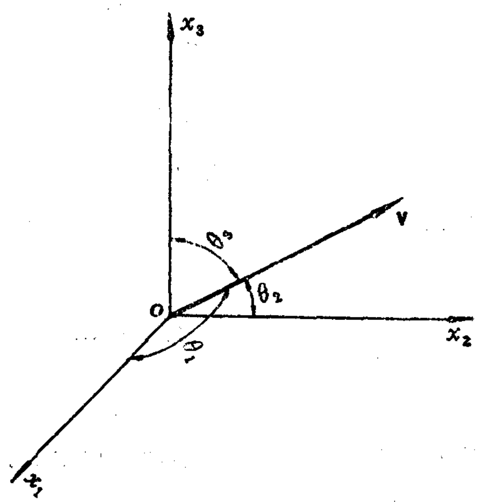

图1-1 矢量的表示

设有另一直角笛卡儿坐标系，其轴为 x_i'。令 a_{ij} 为 x_i' 与 x_j 两轴夹角的余弦，则不难知道 $\mathbf{v}$ 在两坐标系里的分量之间的关系：

$$v_i'=a_{ij}v_j \tag{1.35}$$

如果互换有撇与无撇的轴，则方程仍能成立。这样立即求得（1.35）的逆方程。现在将v_i' 换成 v_i，将 v_j 换成 v_j'，将 $a_{ij}=\cos(x_i',x_j)$ 换成 $a_{ji}=\cos(x_i,x_j')$，于是 (1.35) 便化为

$$v_i=a_{ji}v_j' \tag{1.36}$$

(1.35)与(1.36)就是矢量的变换律。

由(1.5)，(1.36)与(1.35)有

$$\delta_{ij}v_j=v_i=a_{ki}v_k'=a_{ki}a_{kj}v_j$$

或

$$(a_{ki}a_{kj}-\delta_{ij})v_j=0$$

因为矢量的分量 v_j 可任意选择，所以

$$a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij} \tag{1.37}$$

同样由

$$\delta_{ij}\,v'_j=v'_i=a_{ik}\,v_k=a_{ik}\,a_{jk}\,v'_j$$

得

$$a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij} \tag{1.38}$$

若x'_i轴($i=1,2,3$)是正交坐标轴，则(1.37)表示x_i轴也是互相正交的；若x_i轴是正交坐标轴，则(1.38) 表示 x'_i 轴也是互相正交的．因此(1.37)与(1.38)称为**正交性关系**．

两矢量 u 与 v 的和或差为一矢量 w，其分量

$$w_i=u_i\pm v_i \tag{1.39}$$

标量 m 与矢量 v 的乘积为一矢量 w，其分量

$$w_i=mv_i \tag{1.40}$$

于是若分别沿坐标轴 x_1, x_2, x_3 取单位矢量 $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$，$\mathbf{i}_3$, 如图 2 所示，则任何矢量

$$\mathbf{v}=v_i\mathbf{i}_i \tag{1.41}$$

定义两矢量 u 与 v 的**标量积** u·v 为如下标量：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=uv\cos\theta \tag{1.42}$$

其中 θ 为两矢量间的夹角．根据(1.42)，有

$$\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_j=\delta_{ij} \tag{1.43}$$

因此

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=(u_i\mathbf{i}_i)\cdot(v_j\mathbf{i}_j)=u_iv_j\delta_{ij}=u_iv_i \tag{1.44}$$

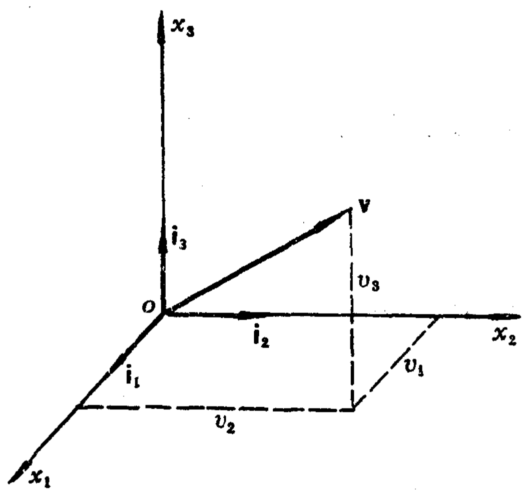

图1-2 矢量沿坐标轴的分解

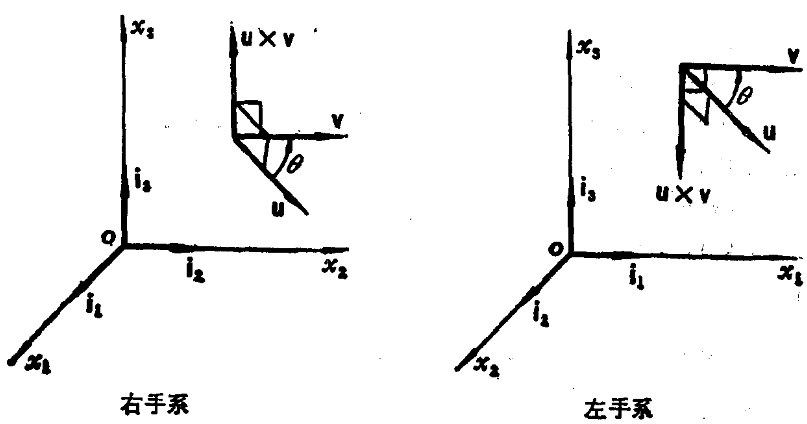

图 1-3 矢量积