高中

林炳华　主编

数学解题思路

气象出版社

高中数学解题思路

林炳华　主编

气象出版社

(京)新登字 046 号

内 容 简 介

本书内容包括集合、映射与函数、三角函数、立体几何、数列、极限、数学归纳法、不等式、复数、排列组合、二项式定理和解析几何等内容。每一节的内容包括内容概要、范例分析、练习题和答案或提示。

本书内容与高中数学课本同步，突出重点，注意解题方法及思路的分析。它的主要特点：抓纲扣本，纲本结合。阅读本书，既可以帮助高中数学教师剖析教材、精心备课，提高教学水平；也有助于高中学生掌握知识、发展能力、提高学习效果。

本书适合于高中各年级师生使用，也可作为各类人员自学数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题思路/林炳华等编.-北京：气象出版社，1995.12

ISBN 7-5029-1940-6

Ⅰ.高… Ⅱ.林… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.606

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 22133 号

高中数学解题思路

林炳华 主编

责任编辑：张淑萍 终审：庞金波

封面设计：田耘 责任技编：席大光 责任校对：杨晓茹

* * *

气象出版社出版

(北京西郊白石桥路 46 号 邮政编码：100081)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

* * *

开本：787×1092 1/32 印张：9.5 字数：213 千字

1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

印数：1－18000 定价：8.80 元

ISBN 7-5029-1940-6/G・0562

前　言

本书紧密配合高中各年级数学课本进行同步编写，内容源于课本，高于课本。

怎样才能掌握高中数学的解题思路和方法，这是大家所关心的问题。的确，要学好高中代数、立体几何、解析几何和三角等，除了掌握好有关的概念、定理、公式外，还必须通过各种各类典型范例分析，才能进一步加深对数学基本知识的理解，培养分析问题的能力，开拓解题思路，寻找解题规律，掌握解题方法。

由于时间和水平所限，书中难免有不妥之处，望读者不吝赐教。

编　者

1995 年 5 月于福州

目　录

第一章 函　数

§1 集　合

一、内容概要

1. 集合是一个不加定义的原始概念，课本从分别取自然数、点、图形、整式以及物体的实例出发，把集合描述为“一组对象的全体”.

2. 对于一个给定的集合，它必定具备三个特征.(1)确定性：任何一个对象都可以判定它是或者不是这个集合的元素.若元素 x 是集合 A 的元素，记作 $x \in A$，否则记为 $x \notin A$. 根据集合中元素的确定性可知，对任何元素 x 与集合 A，在 $x \in A$ 与 $x \notin A$ 两种情况下，必有一种且只有一种成立. 例如：“著名科学家”、“所有好学生”为元素是不能构成数学意义的集合，因为找不到以判别每一具体对象是否属于此集合的明确标准. 但是，“所有被学校审批了的三好学生”可以构成一个集合.(2)互异性：给定集合中任何两个元素都是不同的，当相同元素归入一个集合时，只作为一个元素出现在集合中. 如记号$\{1,1,2\}$由于其中出现了重复元素，所以不能作为集合的正确表示，应写成$\{1,2\}$，如果它表示方程$(x-1)^2(x-2)=0$的解集时，其中 1 是二重根，应写成$\{1_{(2)},2\}$.(3)无序性：给定集合中元素间无顺序关系，所以哪个元素写在前或写在后无关紧要.

3. 集合的表示法.(1)列举法：把集合中的元素在一个大括号内一一列举出来，它通常用来表示有限集合.(2)描述法：把集合中元素的公共属性用特定的形式描述出来，即用

{元素 | 元素所具有的共同属性} 表示. 简记为 $A=\{x|P\}$

集合的两种表示方法各有优点，具体选用哪一种表示方法要视具体问题而定，有些集合选用哪一种方法都可以，有些集合则只能用其中一种方法表示. 另外，有的集合可以用形式多样的描述法表示. 例如：正奇数集合可以写成{正奇数}，也可以写成$\{1,3,5,7,\cdots\cdots\}$，也可以写成$\{x|x=2n-1,n\in N\}$等. 但是，集合$\{x|-2\leqslant x<1,x\in R\}$就不能用列举法表示，而集合$\{0.1,2,\pi,\frac{1}{3}\}$一般不易用描述法表示.

二、范例分析

例 1 判定下列各式是不是一个集合.

(1)$\{x|x+3>x,x\in R\}$;

(2)$\{\pi,\lg1000,\sqrt{3},2\sin60°\}$;

(3){接近于 0 的数}.

解:(1) $\{x|x+3>x,x\in R\}$ 它的元素为实数 x，而 x 具有的属性是满足不等式 $x+3>x$ 的一切实数 x，这个性质是确定的性质，所以它是一个集合.

(2) 因为 $2\sin60°$ 表示实数 $\sqrt{3}$，所以 $\{\pi,\lg1000,\sqrt{3},2\sin60°\}$ 不符合集合的元素具有互异性，所以它不是一个集合.

(3)"接近于 0 的数"是多大的数无法确定，所以它不表示一个集合.

例 2 用适当的方法表示下列集合.

(1)28 以内的质数集;(2) 被 5 除余 3 的正整数集;

(3) 不在坐标轴上的点的集合;(4) 不等式$\frac{1}{x}>1$的解集.

解:(1) 因为 28 以内的质数有有限个，所以用列举法表示

为 $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,\}$；

(2) 被 5 除余 3 的自然数有无穷个，所以用描述法表示为 $\{x|x=5K+3,K\geqslant 0,K\in Z\}$；

(3) 设点 $A(x,y)$ 不在坐标轴上，所以有 $x\neq 0,y\neq 0$，以 A 点为元素的集合为 $\{(x,y)|xy\neq 0\}$；

(4) $\because \frac{1}{x}>1$，即 $\frac{1}{x}-1>0$，$\frac{x-1}{x}<0$，所以用描述法表示为 $\{x|0<x<1\}$.

例 3　已知集合 $A=\{x|x=2m+1,m\in z\}$，集合 $B=\{y|y=4n+1,n\in z\}$，向集合 A、B 之间的关系是什么？

分析：集合 A 是奇数集，设 $a\in\{x|x=2m+1,m\in z\}$ 则 a 是个奇数，$a=2m'+1$ $m'\in z$，当 $m'=2n,n\in z$ 时，$a=4n+1$；当 $m'=2n-1$ $n\in z$ 时，$a=4n-1$，即 $a=4n+1$ 或 $a=4n-1$ $(n\in Z)$，从而可以与 B 比较它们之间的关系.

解：$\because m\in z$，当 $m=2n,n\in Z$ 时 A 为 $\{x|x=4n+1,n\in z\}$，当 $m=2n-1,n\in Z$ 时，A 为 $\{x|x=4n-1,n\in Z\}$ 所以 A 为 $\{x|x=4n+1$ 或 $x=4n-1,n\in Z\}$，$\because B=\{y|y=4n+1$ $n\in Z\}$ 所以 $A\supset B$.

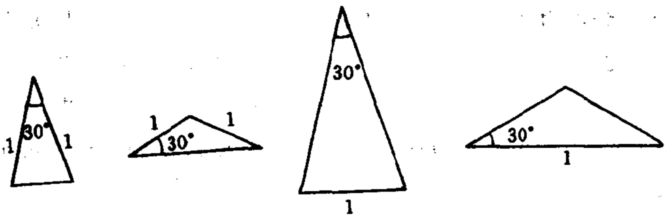
例 4　设 $\{a_1,a_2\}\subset A\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，求适合此关系式的集合 A 的个数.

分析：由于 A 以 $\{a_1,a_2\}$ 为真子数，故 A 中至少包括 a_1,a_2 在内的三个元素，又由于 A 是 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 的子集，故 A 至多与此集合相等.

解：由以上分析，集合 A 可以这样构造，先取 a_1,a_2，然后，在 a_3,a_4,a_5 中分别任取一个，两个，三个与 a_1,a_2 放在一起构成集合，不难算出这样的集合有 7 个 $(C_3^1+C_3^2+C_3^3=7)$.

例5 设$A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$一条边长为1，一个内角为30°的多边形$\}$，画出$A\cap B$中各元素图.

分析：由交集定义可知，$A\cap B=\{$有一条边长为1，一个内角为30°的等腰三角形$\}$. 这里"有一条边长为1"，应包括"有且只有一条边长为1"和"有两条边长为1"两种可能（为什么不包括"三条边长都为1呢？"）. 这样可以看出，集合中共有4个元素：即顶角为30°腰长为1的等腰三角形；顶角为30°且底边长为1的等腰三角形；底角为30°且腰长为1的等腰三角形；底角为30°且底边为1的等腰三角形. 如下图所示.



说明：元素为几何图形的集合，应充分考虑到各种可能的几何度量、位置、形状，把元素找全.

例6 已知集合$A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，集合$\{B=x|x-a<0,a\in R\}$在下列条件时分别求a的取值范围.

(1)$A\cap B=\varnothing$；(2)$A\subset B$；(3)$A\cap B\subseteq A$.

解 $\because$(1)$x^2-2x-8<0$，即$-2<x<4$，$\therefore A=\{x|-2<x<4\}$.

又$\because x-a<0$，$\therefore B=\{x|x<a\}$，

$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore a\leqslant -2$.

(2)$\because A\subset B$，$\therefore a\geqslant 4$. (3)$\because A\cap B\subseteq A$，$\therefore a\in R$.

例7 设$A=\{$函数$y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$的定义域$\}$，

$B=\{$绝对值不超过 1 的实数$\}$，求 $A\cup B$.

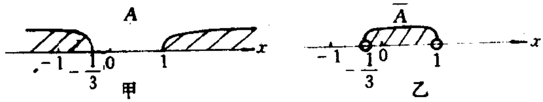
思路：求集合的并集问题应先弄清该集合的元素，把它们用适当的方法表示出来. 求实数集的子集间的交或并问题，可借助于数轴将关系直观地表示出来.

解：$A=\{x|x\neq-1$ 且 $x\neq 2\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，借助于数轴可得 $A\cup B=\{x|x\neq 2,x\in R\}$

例 8 已知 $I=R$，$A=\{x|3x^2-2x-1\geqslant 0\}$，$B=\{x|x^2\leqslant 4\}$，求(1)$\overline{A}$；(2)$A\cap B$；(3) $\overline{A\cup B}$.

解：(1)$\because I=R$，$A=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -\dfrac{1}{3}\}$，

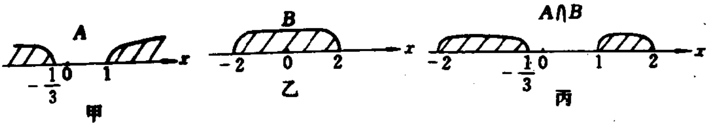
$\therefore \overline{A}=\{x|-\dfrac{1}{3}<x<1\}$（如图所示）.



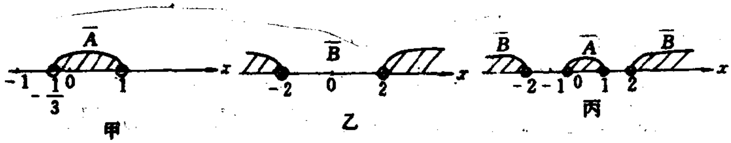
(2)$\because B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -\dfrac{1}{3}\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -\dfrac{1}{3}\}\cap\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$.

$=\{x|-2\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{3}$ 或 $1\leqslant x\leqslant 2\}$（如图所示）.



(3)$\because \overline{A\cup B}=\overline{R}=\varnothing$（或$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ 如图所示）



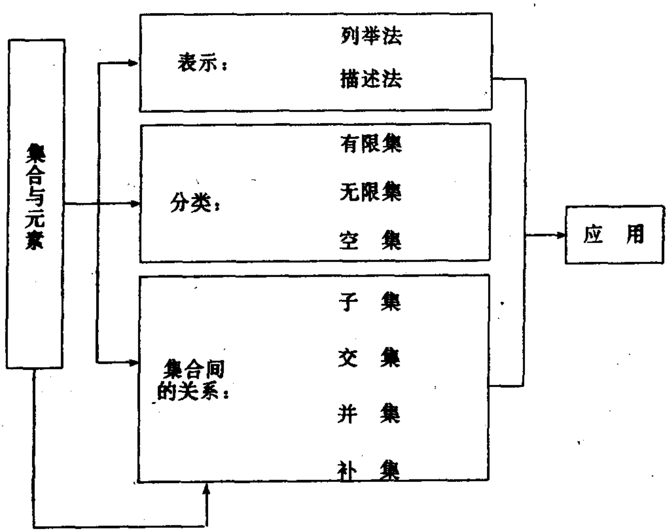
例 9　设 $I=\{1,2,3,4,5\}$，$A\subset I$，$B\subset I$，且 $A\cap B=\{1,2\}$，$A\cap\overline{B}=\{3\}$，$\overline{A}\cap B=\{5\}$ 求 $\overline{A\cup B}$.

思路：给出 A、B 的交、并、补等集合，求 A、B 及 A、B 其它关系时的一般步骤是：(1) 先找出 A、B 中肯定有或肯定没有的元素；(2) 把不明确的元素一一检验，这里要用到交、并、补等概念和性质，还常常使用反证法.

解：$\because A\cap B=\{1,2\}$，$\therefore 1\in A$，$2\in A$.

又 $\because A\cap\overline{B}=\{3\}$，$\therefore 3\in A$. 而 $B\cup\overline{B}=I$，$\therefore A=\{1,2,3\}$. 同理：$B=\{1,2,5\}$，$\therefore \overline{A\cup B}=\{4\}$.

小结：本节结构图如下



§2 映射与函数

一、内容概要

本节叙述有关映射的概念、函数定义、函数定义域、函数值域和函数解析式. 这些内容是函数知识的重要基础，在近几年的高考试题中，已成为不可缺少的内容之一. 每年必考的内容之一.

二、范例分析

例1 已知(x,y)在映射f下的象是(x^2+y^2,x^2-y^2)，求点$(2,1)$在f下的原象.

解： 根据题意有$\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^2-y^2=1\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

或$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

所以，应求的原象为：$(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

例2 下面对应是不是从A到B的映射，为什么？如果是，它有没有逆映射，为什么？

1. $A=\{$实数对$\}$，$B=R$，对应法则“求实数对的和”.

2. $A=\{\alpha|0<\alpha\leqslant 90°\}$，$B=[0,1]$，对应法则是求余弦.

3. $A=R^{+}$，$B=R$，对应法则是“求常用对数”.

4. $A=\{1-x^2|x\in R\}$，$B=\{t|0\leqslant t\leqslant 1\}$，对应法则是“$1-x^2=t$”.

5. $A=R$，$B=R$，对应法则是“求立方”.

解：1. 是从 A 到 B 的映射，因为对于{实数对}中的每一个元素 (x,y)，在 R 中都有唯一的元素 $x+y$ 和 (x,y) 对应. 但它不是从 A 到 B 的一一映射，因为元素 $(1,4)$ 与 $(3,2)$ 不同，可是它们在 R 中的象都是 5，所以没有逆映射.

2. 是从 A 到 B 的映射，但没有逆映射，因为对于 $\{\alpha|0<\alpha\leqslant 90°\}$ 中的每一个元素 α，在 $[0,1]$ 中都有唯一的元素 $\cos\alpha$ 和 α 对应.

3. 是从 A 到 B 的映射，因为对于 R^{+} 中的每一个元素 x，在 R 中都有唯一的元素 $\lg x$ 和 x 对应，而且从 A 到 B 上的一一映射，因为对于 R^{+} 中不同的元素，如 x 和 y，且 $x\neq y$，在 R 中它们的象 $\lg x$ 和 $\lg y$ 也不相同，即 $\lg x\neq\lg y$，并且 R 中的每一个元素 x，在 R^{+} 中都有它的原象 10^x，所以它有逆映射.

4. 不是从 A 到 B 的映射，因为当 $x<-1$ 或者 $x>1$ 时，$1-x^2$ 的值在区间 $[0,1]$ 之外，也就是说，这样的 x 在 B 中没有元素和它对应.

5. 是从 A 到 B 的映射，而且有逆映射. 因为对于 $A=R$ 中的每一个元素 a，在 $B=R$ 中的都有唯一的元素 a^3 和 a 对.

对于 A 中不同元素，如 a 和 b，且 $a\neq b$，在 B 中它们的象 a^3 和 b^3 也不同，即 $a^3\neq b^3$；而且 B 中的每一个元素 a，在 A 中都有它的原象 $\sqrt[3]{a}$.

所以，求立方的对应是从实数集合 R 到实数集合 R 上的一一对应，因此它有逆映射.

例 3 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，

求 $f(\sqrt{3})$ 的值.

解法一:令 $\sqrt{x}+1=\sqrt{3}$,得 $x=(\sqrt{3}-1)^2$,

所以 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=2$.

解法二:略解 先求出 $f(x)$ 的解析式,再求 $f(\sqrt{3})$. 而求 $f(x)$ 的解析式常见的有两种方法:①配方法. $\because f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$, $\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$;②代换法. 令 $\sqrt{x}+1=t$,则 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$,故 $f(x)=x^2-1\ (x\geqslant 1)$.

例 4 若 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$,求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解:根据题意 $0<x^2-1<1$,解得 $-\sqrt{2}<x<-1$ 或 $1<x<\sqrt{2}$. $\therefore f(x^2-1)$ 的定义域为 $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$.

注:要正确理解记号 $f(x)$ 的意义. 对于 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$ 是对 $f(x)$ 中的 x 限定在 $(0,1)$ 内取位,即 $0<x<1$,因而将 x 替换成 x^2-1,就必满足 $0<x^2-1<1$.

例 5 作出函数 $y=|x-1|+|x-2|\ x\in[0,3]$ 的图象.

解:当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=-(x-1)-(x-2)=-2x+3$;
当 $1<x\leqslant 2$ 时,$y=(x-1)-(x-2)=1$;
当 $2<x\leqslant 3$ 时,$y=(x-1)+(x-2)=2x-3$.