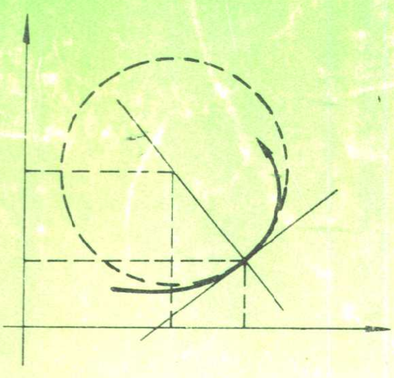
全国高等教育自学考试教材

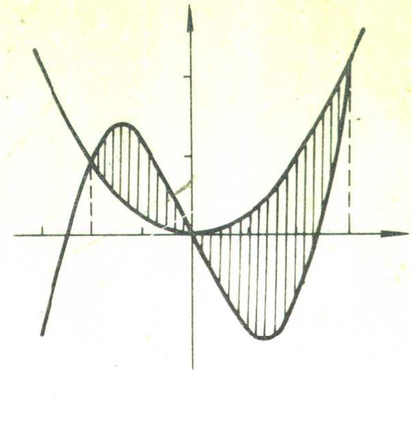
高等数学

（修　订　本）

上　册

陆庆乐　编





西安交通大学出版社

全国高等教育自学考试教材

高 等 数 学

（修订本）

上册

陆庆乐　编

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会1993年修订的机械类本科段高等数学自学考试大纲编写的，教材内容与深广度完全与大纲一致.

全书分上、下两册.上册内容包括函数、极限、连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分及其应用；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学与积分学，常微分方程，级数.

本书针对自学考试缺少教师进行系统讲授的特点，阐释详细，说理透彻，注意揭示概念的本质和概念之间的联系与区别；对重要定理与公式的推理论证，层次分明，思路清晰；辅以几何直观，进行启发引导，深入浅出，逐步深入；并注意解题训练，及时指出易犯的错误.书中例题较多，配有大量习题，且有答案.每章末都有“小结与学习指导”，便于自学.

本书除供自学考试使用外，也可供一般高等工科院校、职工大学、函授大学、电视大学作为教材或参考书，大专班也可使用.

(陕)新登字007号

全国高等教育自学考试教材

高等数学(上册)

(修订本)

陆庆乐 编

责任编辑·路红

西安交通大学出版社出版

西安市咸宁西路28号 邮政编码710049)

西安向阳印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本787×1092 1/16 印张14.75 字数:356千字

1994年10月第2版 1994年11月第1次印刷

印数:1—8000

ISBN7-5605-0481-7/O·82 定价:12.50元

出 版 前 言

高等教育自学考试教材是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《高等数学》是为高等教育自学考试工科专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《高等数学自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

工科专业《高等数学》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的。现经组织专家审定同意予以出版发行。我们相信，随着高数自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九九四年七月

初版前言

本书是根据高等学校工科数学教材编审委员会审订，1980 年颁布的 216 学时高等数学教学大纲的要求编写的．在编写过程中，我们考虑到自学考试的特点，结合多年来在教学中的经验和体会，从以下几个方面进行了一些努力．

1．叙述比较详细，语言力求确切，文字通俗易懂．

2．对概念的引出，注意了阐明它们的实际背景，着重于概念的实质的揭示．

3．对一些重要定理的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观，使读者易于接受．

4．书中例题较多，注意了对解题方法的训练，及时指出在解题中一些在概念上与运算上易犯的错误．

5．在每节后配有搞清概念的思考题与帮助掌握基本方法的运算题，在每章末还配有一些比较深入而带有综合性的总习题，对其中较难的习题适当予以提示．此外，每章还备有一份考试题，以供自我检查学习效果之用．全部习题都有答案．

6．每章末附有“小结与学习建议”，其中除了对内容的小结外，还指出了该章的基本内容与基本要求、重点与难点以及对学习本章的指导．

7．注意了联系实际，特别是结合机械专业的特点，举了一些有关机械方面的例子．

本书分上、下两册出版，上册内容为一元函数微积分学，下册内容有向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、微分方程与级数．

本书力图做到熔教材、习题集、自学指导书三者于一炉，但限于时间与编者的能力，一定还存在不少缺点与错误，诚恳希望读者提出批评与指正．

编　者

1984 年 6 月

再版前言

本书的初版是根据高等学校工科数学教材编审委员会审订，由国家教委于1980年颁布的高等数学教学大纲编写的．出版以来，将近十年．经过使用，认为该教材叙述详细，说理透彻，便于教学．但作为自学考试教材，内容偏多，篇幅偏大．

为了满足自学考试的需要，现按全国高等教育自学考试指导委员会于1993年制订的机械类本科段高等数学自学考试大纲进行了改写．内容的取舍，悉按大纲，深广度的要求，也与大纲一致．

在体系上作了较大的变动．把初版的18章合并成11章；把先讲定积分改为先讲不定积分．重新精选了习题；重写了小结与学习指导．

鉴于自学考试没有教师进行系统的讲解，因此改写时在文字叙述方面与一般的教材略有不同，更靠近讲课形式，阐释得比较详细透彻，特别对一些估计难学的内容；并注意尽量借助几何直观引出问题，从分析具体例子入手进行启发引导．在介绍内容的过程中，根据需要设置一些“路标”，指明问题逐步深入的方向，使读者既能体会问题的转向是事物发展的必然，又能使所学内容串连成线，不致成为一堆零碎的知识，从而使读者对内容的结构、发展的思路了解得比较清楚，掌握得更加牢固．

为了培养解题能力，书中举了较多的例题，同时指出解题中容易出错之处，并注意解题规范化书写的训练．书中的习题较多，每章还配有总习题与自我检查题，后者用以衡量经过自学达到大纲要求的程度．习题均附有答案．

每章末附有“小结与学习指导”、对该章的学习要求、重点、难点和对学习的建议等．以冀对自学有所帮助．自学者只要持之以恒，锲而不舍，定能有成．

初版中的极限、连续和一元函数的定积分等部分由马知恩教授执笔；多元函数微积分学部分由邵济煦教授执笔．全书由主编陆庆乐教授统编定稿．

本书由陆庆乐改写。改写稿完成后，全国高等教育自学考试指导委员会机械类专业委员会组织专家审查，并被定为本科段各专业自学考试教材。参加审稿会的有西北工业大学孙家永教授，西安建筑科技大学潘鼎坤教授，西安交通大学杨林森教授、杨泽高教授、蒋潞教授，西安理工大学张光汉教授，对他们提出的宝贵意见，表示衷心的感谢．

本书的出版，感谢蒋潞编审的精心加工和西安交通大学出版社的大力支持．

书中存在的这样或那样的问题，恳望读者予以指正．

编者

1994年5月于西安交通大学

目　　录

第一章　函数

本章将在中学里已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义、简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数与初等函数等概念，这些都是以后学习的基础.

1-1　函数概念

函数概念是数学中最重要的概念之一，是高等数学的主要研究对象，它反映了物质世界中各种量之间的相互依存关系. 为了研究事物在变化过程中的数量变化规律，我们首先必须区分常量与变量.

1.　常量与变量　自然界的现象无一不在变化之中，我们在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程时，总会遇到许多量. 如面积、体积、长度、时间、速度、温度等. 这些量一般可以分为两类，一类是在过程进行中不断变化的量，这一类量称为**变量**，变量常用 $x,y,z,u,v\cdots$ 等字母来表示；另一类是在过程进行中保持不变的量，这一类量称为**常量**. 常量通常用 $a,b,c,\alpha,\beta\cdots$ 等字母来表示. 例如，一个物体作匀速直线运动，那末时间与位移的大小都是变量，而速度则为常量. 又如一个金属圆环，由于热胀冷缩，在受热过程中，圆环的直径与周长都在不断变大，冷却时又在不断变小，因此，直径与周长都是变量；但在整个过程中，周长和直径之比却始终不变，是一个常量，就是圆周率 $\pi=3.141\ 592\cdots$.

应当注意，在研究一些特定的自然现象时，同一个量在这一现象中是常量，而在另一现象中却是变量. 例如速度，在匀速运动中是常量，在匀加速运动中是变量. 还须注意常量与变量的相对意义. 例如，气温的变化，会引起机器上的轴的热胀冷缩，如果引起的轴长的变化极为微小，而这种变化对机器精度的影响又微不足道，那末为了简化研究过程，可以把它当作常量来处理；但对精密仪器来说，即使轴长的变化极为微小，也会影响仪器的精密度，这时又应把它当作变量来处理. 所以一个量把它看作是常量还是变量，与所研究问题的具体情况有关.

区间　一个变量能取得很多数值，这些数值的集合往往随着所研究的问题的性质不同而不同，例如要在室温为 16℃的情况下把水烧开，那末水的温度将从 16℃增加到 100℃，即温度 T 这个变量取得从 16 到 100 之间的各个数值. 又如变量 $x=\cos\theta$，对所有 θ 可取的值，只能在 -1 与 $+1$ 之间.

在几何上，一个变量所取的值可用数轴上的点来描述. 像上述的变量 $x=\cos\theta$，就可用从 -1 到 $+1$ 线段上所有的点来表示，包括 -1 与 $+1$ 两个端点在内(图 1.1).

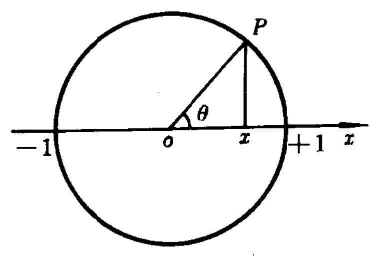


图 1.1

一个变量能取得的全部数值的集合，称为这个变量的**变化范围**或**变域**. 今后我们经常遇到的变域是区间. 所谓变量 x 的**区间**就是介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数. 在数轴上就是从 a 到 b 的线段. a 与 b 称为区间的**端点**. 当 $a<b$ 时，a 称为**左端点**，b 称为**右端点**.

区间是否包括端点在内要看所研究的问题而定.按照包括或不包括端点在内,区间可以区分为:

(1) 闭区间　两个端点都包括在内,记作 $a \leqslant x \leqslant b$ 或 $[a,b]$;

(2) 开区间　两个端点都不包括在内,记作 $a < x < b$ 或 (a,b);

(3) 半开区间　只包括一个端点在内,记作 $a \leqslant x < b$ 或 $[a,b)$,及 $a < x \leqslant b$ 或 $(a,b]$(图 1.2).

在图(1.2)中,区间的端点包括在内时,把端点描成实点,不包括在内时,把端点描成空点.

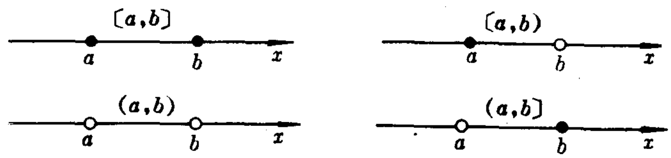


图 1.2

除了这些**有限区间**外,还有各种**无限区间**:

(4) 小于(不大于)c 的一切实数,记作 $-\infty < x < c$ 或 $(-\infty,c)$($-\infty < x \leqslant c$ 或 $(-\infty,c]$);

(5) 大于(不小于)c 的一切实数,记作 $c < x < +\infty$ 或 $(c,+\infty)$($c \leqslant x < +\infty$ 或 $[c,+\infty)$);

(6) 一切实数,记作 $-\infty < x < +\infty$ 或 $(-\infty,+\infty)$.

这样,对于每一个变量说来,总有它的一定的变域,这是与该变量不可分割的.我们还将看到,区间的开闭也往往跟所要证明的结论有重大关系.为简便起见,此后在不需要区别以上所说的各种情况时,我们就把某一区间简单记作 I.

邻区　在下一章讲极限时,要用到邻区的概念.设 x_0 为一已知点,包括 x_0 的任意一个开区间 (a,b) 称为 **x_0 的邻区**.但我们通常考虑的往往是以 x_0 为中心的区间 (a,b),这时称 x_0 为邻区的中心,$\frac{1}{2}(b-a)$ 为邻区的半径.图 1-3 所表示的是以点 x_0 为中心,ε 为半径的邻区:$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$,称为 **$x_0$ 的 ε 邻区**..

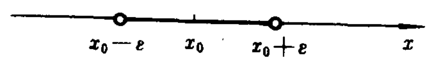


图 1.3

设 x 为这邻区内的任一点,那末 x 满足不等式

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

这个不等式可写成

$$|x - x_0| < \varepsilon \tag{1}$$

所以(1)式也可用以表示 x_0 的 ε 邻区.在这个邻区中,如果再把它的中心 x_0 去掉,就称为 **x_0 的 ε 去心邻区**.可用不等式

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,\ x \neq x_0 \quad \text{或} \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon \tag{2}$$

表示.式中的 $0 < |x - x_0|$ 的含意是 $x \neq x_0$.

应当指出,邻区的半径虽然没有明确规定其大小,但一般总取 ε 是很小的正数.

$(x_0-\varepsilon, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\varepsilon)$ 分别称为 **x_0 的左、右 ε 邻区**.

2. 函数的定义　现在让我们在变量概念的基础上来阐明函数的概念.

在研究某一自然现象或实际问题时,往往会发现问题中的变量并不都是彼此独立变化的,它们之间存在着依存关系.下面先考察几个例子.

例 1　设有一自由落体,在下落的时间 t(单位为 s)内经过的位移的大小为 s(单位为 m).如果不计空气的阻力,s 与 t 之间有如下的依存关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

其中 g 为重力加速度($g=9.8\text{m/s}^2$).

如果落体从开始下落到着地的时间为 T(图 1.4),那末变量 t 的变化范围(变域)为 $0 \leqslant t \leqslant T$,当 t 在此变域内任取一值时,都可从(3)式求出其对应值.例如当 $t=1\text{s}$ 时,$s=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9\text{m}$.

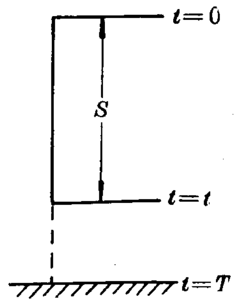


图 1.4

例 2 金属棒受热伸长,根据实验结果,棒长 l 与温度 T℃之间有如下依存关系:

$$l = l_0(1 + \alpha T) \tag{4}$$

其中 l_0 是 0℃时的棒长,α 为一常数,称为线胀系数,它的值随着金属材料的不同而不同.在 T 的变域内任取一值时,可由(4)求出 l 的对应值.

在以上两例中,变量之间的依存关系都由一个确定的表达式来表示.但应指出,有无这种确定的表达式,对问题中变量之间有依存关系存在是无关紧要的.

例 3 下表是一台发电机启动后一小时内每分钟的转速记录:

t(min)	1	2	3	4	…	60
n(r/min)	2 011	2 981	2 998	3 001	…	3 002

上表给出了时间 t 与转速 n 之间的依存关系.从它可以查出 t 取 1,2,…,60 等整数时,转速 n 的值.

例 4 图 1.5 是气温自动记录仪描出的某一天的气温变化曲线,它给出了时间 t 与气温 T 之间的依存关系:

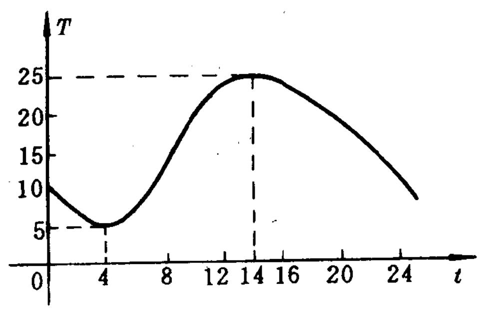


图 1.5

时间 t 的变域为区间[0,24].从图可以看出,当 $t=14\text{h}$,$T=25$℃,为这天中的最高气温.

例 3 与例 4 中的依存关系都没有一个简明的表达式,而代之以一张表格与一条曲线.

从以上的例子看到,它们所描述的问题虽各不相同,但却有共同的特征:

(1) 每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此独立的,而是相互联系,相互制约的;

(2) 当一个变量在它的变域中任意取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系,称为函数关系.下面给出函数的定义.

函数的定义 设有两个变量 x 与 y,当变量 x 在给定的某一个变域中任意取定一值时,另一个变量 y 就按某一个确定的法则有一个确定的值与 x 的这个值相对应,那末变量 y 称为变量 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$①

其中 x 称为**自变量**，函数 y 也称**因变量**. 自变量 x 的这个变域称为函数的**定义域**，而当变域是区间时称为**定义区间**. 因变量 y 所对应的数值范围称为函数的**值域**(图 1.6).

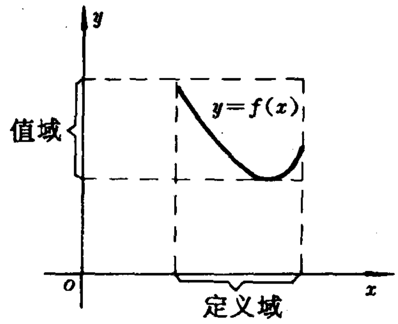


图 1.6

在这个定义中有两个要点，称为定义的两个要素：

(1) 自变量 x 的变域，即函数的定义域.

(2) 确定自变量 x 与因变量 y 之间数值对应的法则.

至于对应法则的说明方式究竟是怎样的，定义对此并无要求. 定义中的记号 $f()$ 就是用来表示这种对应法则的.

如果同时要讨论几个不同的函数，那末就得用不同的记号来表示这些函数. 例如圆的面积 A 与圆的周长 C 都是半径 r 的函数，但它们是不同的函数，即它们的对应法则不同. 因此，把它们记成：

$$A=f(r)=\pi r^2,\quad C=g(r)=2\pi r\ ,\quad (r>0)$$

这里，$f()$ 与 $g()$ 分别表示对括号内的数应作 $\pi()^2$ 与 $2\pi()$ 这样一些运算. 例如，当 $r=1$ 时，分别有

$$A=f(1)=\pi\ ,\quad C=g(1)=2\pi$$

这里，$f(1)$ 与 $g(1)$ 分别表示函数 A 与 C 在 $r=1$ 时所取得的函数值. 可见自变量的值取定后，函数值完全可由它的对应法则来确定. 又如 $\varphi(x)=xa^x(a>0,a\neq1)$，那末

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=a,\ \varphi\left(\frac{1}{a}\right)=a^{\frac{1}{a}-1},\ \varphi(-a)=-a^{1-a}.$$

在给出一个函数时，除了说明它的对应法则外，还应指明它的定义域. 今后如果提到一个函数而没有指明它的定义域时，就规定它的定义域是使函数有确定值的实数的全体. 这样的定义域也称为函数的**自然定义域**. 例如，函数 $y=ax+b$，其中 a 与 b 为常数，它的(自然)定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$；函数 $y=\frac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x\neq0$ 的任何实数，可记为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 或 $|x|>0$；又如函数

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x^2(1-x^2)}{6-x-x^2}}$$

虽然，要使 $f(x)$ 有意义，必须根号下的分式不为负，即

$$\frac{x^2(1-x^2)}{6-x-x^2}=x^2\frac{(1-x)(1+x)}{(3+x)(2-x)}\geqslant0$$

分式在 $x=-3$ 与 $x=2$ 处无意义. 由于 $(3+x)(2-x)$ 当 $x<-3$ 和 $x>2$ 时为负，而 $-3<x<2$ 时为正；$(1-x)(1+x)$ 当 $x<-1$ 和 $x>1$ 时为负，而 $-1<x<1$ 时为正(图 1.7)，所以 $f(x)$ 的定义域为

---

① 记号 $f(x)$ 是欧拉(L. Euler，1707—1783)在 1734 年引入的. 因为函数 $y=f(x)$ 只有一个自变量，所以也称它为一元函数. 以后还要研究具有两个以上自变量的函数，称为多元函数.

$$(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$$

x	-3	-1	1	2	
$(1-x)(1+x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$(3+x)(2-x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

图 1.7

在实际问题中，函数的定义域要受到具体条件的限制. 例如函数

$$y=c\,x^2$$

它的自然定义域是$(-\infty,+\infty)$. 但是如果取$c=\pi$，y与x分别表示圆的面积与半径，这时，$x<0$，函数无实际意义，因此，函数定义域为$[0,\infty)$. 又如果取$c=g/2$，g为重力加速度，而y与x分别表示自由落体所经过的位移的大小与时间，那末函数的定义域就应为$[0,T]$，其中T为落体到达地面的时间.

单值与多值函数 在函数$y=f(x)$的定义中，要求对应于x值的y值是唯一确定的，这种函数也称为**单值函数**，如果取消唯一这个要求，即对应于一个x值可以有两个以上确定的y值与之对应，那末函数$y=f(x)$称为**多值函数**. 例如函数$y=\sqrt{r^2-x^2}$是多(双)值函数.

为了讨论的方便起见，我们总设法避免函数的多值性. 在一定条件下，多值函数可以分裂为若干**单值支**. 例如，双值函数$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$就可以分成两个单值支：一支是不小于零的$y=+\sqrt{r^2-x^2}$，另一支是不大于零的$y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 我们知道方程$x^2+y^2=r^2$的图形是中心在原点、半径为r的圆周. 这同时也就是双值函数$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$的图形；两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周. 所以只要把各个单值支弄清楚，由各支合起来的多值函数也就了如指掌. 此后，如果没有特别说明，我们所讨论的都限于单值函数.

3. 函数的表示法 由于函数的对应法则是多种多样的，所以表示一个函数要采取适当的方法. 从上面所举的四个例子可见，在例 1、例 2 中，函数的对应法则用一个公式或叫做解析式来表示，所以称为**解析法**；在例 3 中，函数的对应法则用一张表格来表示，称为**表格法**；在例 4 中，函数的对应法则用一条曲线来表示，称为**图示法**. 一般说来，函数的常用表示法就是上述三种. 这三种表示法各有优缺点.

解析法的优点是形式简明，便于作理论研究与数值计算；缺点是不如图示法来得直观.

表格法的优点是表中有对应数据，可以直接查用；缺点是不便于作理论研究，也不直观.

图示法的优点是直观，并可从图形看出函数的变化情况；缺点是不便于作理论研究. 尽管如此，今后在研究函数时仍常常借助于它的图形，从直观上去了解它的变化情况.

在实用上有些函数虽然也可用解析式表出，但不能用单独一个解析式来表示，往往当自变量在某一个区间上取值时，可用这个解析式来表示，而在另一个区间上取值时，就得用另一个解析式来表示. 这种在不同区间上用不同解析式来表示的函数称为**分段函数**. 例如在电子技术中经常用到的单位阶跃函数就是一个分段函数：

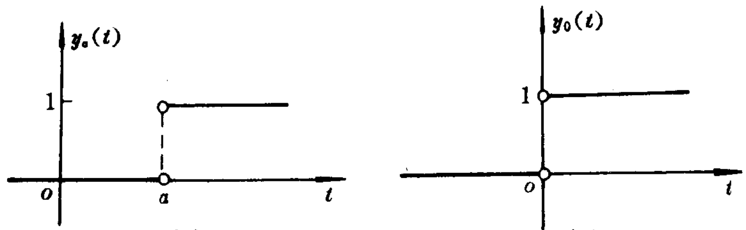
$$u_a(t)=\begin{cases}0\ , & t<a\\ 1\ , & t>a\end{cases}\qquad(a\geqslant 0)\tag{5}$$

它的定义域为$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，图形如图 1.8(a)所示. 图中的空点表示该点不属于函数的图形.

特别，当$a=0$时，有

$$u_0(t)=\begin{cases}0\ , & t<0\\ 1\ , & t>0\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，如图 1.8(b)所示.



(a) (b)

图 1.8

应当注意，我们切不能因为它在不同区间由不同的解析式来表示而误认为它是两个函数.

对分段函数计算函数值时，要特别注意自变量所在的区间，自变量在哪个区间就要从该区间的解析式中去计算.

例 5 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\dfrac{19}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

试求： (1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$，(2) $f(1)$，(3) $f(3)$，(4) $f(4)$的值.

[**解**] (1)因为$x=\frac{1}{2}$属于区间$0\leqslant x<1$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$；(2)$x=1$属于区间$1\leqslant x<2$，所以$f(1)=x|_{x=1}=1$；(3)$x=3$属于区间$2\leqslant x\leqslant 4$，所以$f(3)=x^2-6x+\frac{19}{2}\Big|_{x=3}=9-18+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}$；(4)$x=4$属于区间$2\leqslant x\leqslant 4$，所以$f(4)=1\frac{1}{2}$(图 1.9).

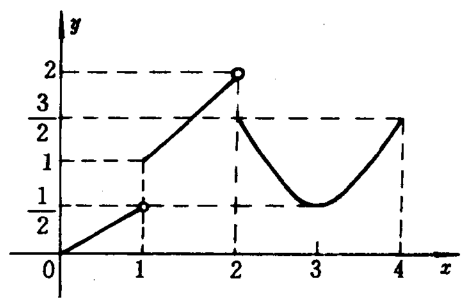


图 1.9

4. 函数的增量 在实际问题中，常常要计算函数的增量. 例如金属圆板受热后膨胀，它的半径与面积都在增大. 当半径r从r_0增加到r_1时，相应地面积A从A_0增加到A_1(图 1.10). 称r_1-r_0为半径r的增量，A_1-A_0为面积的增量，并分别记作Δr，ΔA. 这里Δr与ΔA是一个整体记号，即

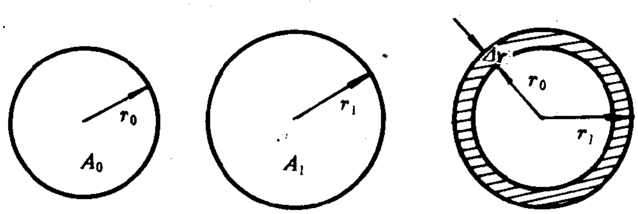


图 1.10

$$\Delta r=r_1-r_0,\quad \Delta A=A_1-A_0.$$

由于 A 是 r 函数：$A=\pi r^2$，因此，Δr 称为**自变量的增量**，ΔA 称为**函数的增量**，并可从函数 $A=\pi r^2$ 计算出

$$\Delta A = \pi r_1^2 - \pi r_0^2 = \pi(r_1 + r_0)(r_1 - r_0) = \pi(r_1 + r_0)\Delta r.$$

一般说来，设有 函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，相应地函数 y 从 y_0 变到 y_1. 我们称 x_1-x_0 **为自变量 x 的增量**，记作 Δx；称 y_1-y_0 **为函数 y 的增量**，记作 Δy，即 $\Delta x=x_1-x_0$，

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \tag{6}$$

或由 $\Delta x=x_1-x_0$，得 $x_1=x_0+\Delta x$，从而由(6)式得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{7}$$

它的几何意义如图 1.11 所示.

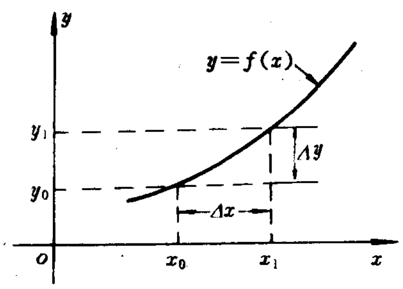


图 1.11

当已知自变量的初值 x_0 与终值 x_1 时，宜于用(6)式计算函数的增量；当已知自变量的初值 x_0 与增量 Δx 时，宜于用(7)式计算函数的增量.

增量也称改变量，它的值可正可负.

习　题　1-1

1. 把下列各不等式表示的变域用区间的记号来表示，并在数轴上画出这些变域：

(1) $-3\leqslant x\leqslant 1$；　(2) $-3\leqslant x<1$；　(3) $-3<x<1$；

(4) $|x|\leqslant 1$；　(5) $|x|>2$；　(6) $-1\leqslant x<+\infty$。

2. 用绝对值不等式来表示下列各区间：

(1) $(-1,+1)$；　(2) $(-2,4)$；　(3) $(1,4)$；　(4) $(-\delta,\delta)$；

(5) $(x_0-\delta,x_0+\delta)$；　(6) $(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$ [用一个绝对值不等式表示]

3. 不以开区间$(1,3)$为邻区的点是○.

① 1.1；　② 2；　③ 2.5；　④ 3.001.

4. 试用绝对值不等式表示 3 的$\dfrac{1}{2}$去心邻区.

5. 试计算下列各函数在各指定点处的值：

(1) 设 $f(x)=x^2-3x+7$，求 $f(x+h)$，$f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ $(h\neq 0)$，$f(2a)$，$f(-2)$；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$，$a>1$，求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)$，$f(2a)$.

6. 如果 $g(x)=\sqrt{x}$，证明

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

7. 指出下列各函数的定义域：

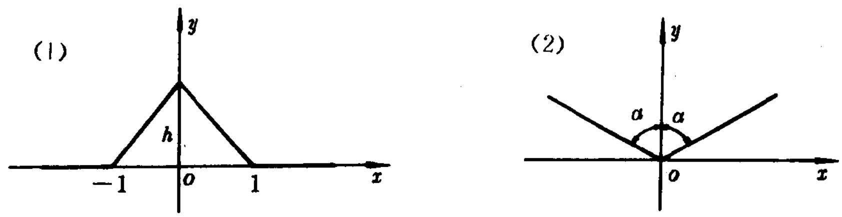
(1) $y=\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{x}$；　(2) $y=\sqrt{1-|x|}$；　(3) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$；

(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　(5) $y=\lg x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$；　(6) $y=\dfrac{1}{x}\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

8. 已知
$$f(x)=\begin{cases} x, & -4\leqslant x<0 \\ 2, & 0\leqslant x<2 \\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$
作出这函数的图形，并求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3.95)$的值.

9. 设 $y=\sin x$，证明：$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$.

10. 写出下列图形所表示的函数：



第 10 题

1-2 函数的简单性态

本节将阐明今后经常遇到的几种关于函数的性态.

1. **单调(增、减)性** 如果对属于某一区间 I 的任何两个值 x_1 与 x_2，在 $x_1<x_2$ 时总有不等式
$$f(x_1)<f(x_2)$$
成立，那末称函数 $f(x)$在 I **单调增**；如果总有不等式
$$f(x_1)>f(x_2)$$
成立，那末称函数 $f(x)$在 I **单调减**①.

单调增和单调减统称为**单调**，区间 I 称为**单调区间**.

一个函数，如果在它的整个定义区间单调增(或减)，就称为**单调函数**. 单调增函数的图形，表现为自左至右上升的曲线，单调减函数的图形，表现为自左至右下降的曲线(图 1.12).

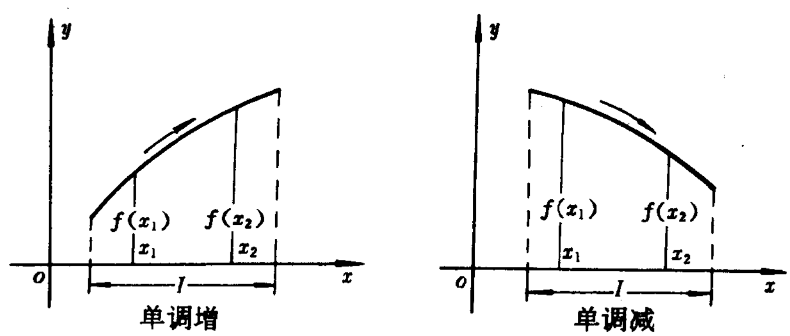


图 1.12

例 1 确定函数 $y=x^2$ 的单调区间.

---

① 如果在 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$〔或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$〕，那末就称 $f(x)$在 I 广义单调增(或广义单调减).

［解］ 任取 x_1 与 x_2，其中 $x_1<x_2$，并设 y_1 与 y_2 为对应的函数值. 于是

$$y_1-y_2=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

由此可知，当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时，恒有 $y_1-y_2>0$；当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时，$y_1-y_2<0$. 这就是说，在区间 $(-\infty,0]$ 函数单调减，在区间 $[0,+\infty)$ 函数单调增。函数 $y=x^2$ 的图形就是抛物线（见图 1.13），其单调区间在图形中是一目了然的. 但这个函数在定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 并不单调增也不单调减，所以不是单调函数.

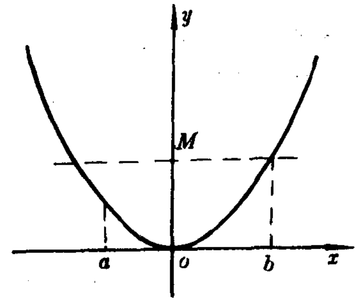


图 1.13

例 2 函数 $y=mx+b$ 是一个单调函数. 这是容易验证的.

2. **有界和无界性** 如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那末我们称函数 $f(x)$ 在区间 I **有界**；否则，便称在 I **无界**.

一个函数，如果在它的整个定义区间有界，称为**有界函数**（图 1.14）.

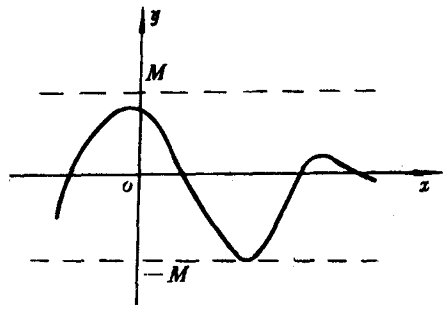


图 1.14

在函数的图形中，有界表现为曲线在上下两方都有一定范围；无界，曲线向上下两方或一方无限伸展.

例 3 讨论函数 $y=x^2$ 的有界或无界性.

［解］ 考虑任意有限区间 (a,b)，设绝对值 $|a|$ 与 $|b|$ 中较大的一个为 A. 于是当 $a<x<b$ 时，总有一个与 x 无关的 $M=A^2$，使得

$$|x^2|\leqslant M$$

因此，函数 $y=x^2$ 在任何有限区间有界（图 1.13）.

但在无限区间，无论 M 取得怎样大，总有 x 的值可使 $x^2>M$. 所以在无限区间，函数 $y=x^2$ 无界.

例 4 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在含有原点的任何区间无界，因为对于任何 M，无论怎样大，只要取 $|x|<\frac{1}{M}$，就有

$$\left|\frac{1}{x}\right|>M$$

例 5 函数 $y=\sin x$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它是一个有界函数.

3. **奇偶性** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称. 如果对属于定义域的任何 x 值恒有

$$f(-x)=f(x)$$

那末称函数 $f(x)$ 为**偶函数**，如果恒有