经济类大专
《微积分》
试题错误剖析

许仁忠 编著

四川科学技术出版社

经济类大专《微积分》试题错误剖析

许仁忠　　编著

四川科学技术出版社

一九八七年·成都

责任编辑：周　军
封面设计：朱德祥
技术设计：周　军

经济类大专《微积分》试题错误剖析

许仁忠　编著

四川科学技术出版社出版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行
四川省地震局印刷厂印刷
统一书号：4298·94

1987年9月第一版　开本　787×1092毫米　1/32
1987年9月第一次印刷　　字数173千
印数　1—9,750册　　印张8
定　价：1.65元
ISBN7-5364-0158-2/F·34

前　言

近年来，随着国家经济建设的飞速发展，经济类的电大、函大、业大、工大、干部专修科和自学考试等大专教育发展很快。大批在职干部和职工积极踊跃地参加学习，希望掌握更多的社会主义经济管理知识，更好地为社会主义经济建设服务。在经济类大专的各门课程中，《微积分》是一门必修的基础课。学好《微积分》对于进一步学习更多的应用数学，掌握科学的现代化经济管理方法，是一个必不可少的基础和前提。

但是，很多同志在学习《微积分》时，总是感到困难很大，特别是初学者和自学者更是如此。造成这种情况的原因，在于《微积分》是高等数学的一部分重要内容，学习它既需要有一定的初等数学基础，更需要掌握和采用高等数学的方法。而这一切，对于广大在职干部和职工来讲，是比那些刚由中学升入大学的青年学生差些。于是，应当有一些办法和措施，帮助这些同志克服弱点，发挥长处，学好《微积分》这一门基础的必修课。我们正是抱着这一愿望和目的，编写了这本书，奉献给有志于学习和掌握更多的现代化科学管理知识的同志们。

我们发现，相当多数的同志在学习《微积分》时，一是感到《微积分》内容繁多杂乱、主次不明，掌握起来常常有些头绪不清；二是从内容上看来似乎是懂了，但作起习题来却常常发生这样或那样的错误，特别是参加各类考试完成试题时更是如此。我们在编写中，正是注意到了这两点，力求使这本小册

子达到帮助大家克服这两点难处的目的。首先，我们在编写内容的安排上，不是按照一般的教科书依课程内容排顺序的传统习惯，而是把全部《微积分》内容归纳成基本概念、基本理论和基本运算这三大类，按照经济类大专《微积分》课程的基本要求，在每一类下分别作突出重点的内容归纳总结，以及通过例题进行解题方法和技巧的介绍。对于经济类专业学生来讲，学习数学的要求就是明确基本概念，理解基本理论，掌握基本运算。如果能把《微积分》的内容依这三个“基本”分门别类有主有次地搞清楚了，繁多的内容也就有个头绪了。其次，在具体内容的撰写上，除了注意归纳习题的类型及解题的方法外，还特别注意对各类习题常见的错误进行剖析。特别是初学者和自学者在作习题时常犯的错误，我们更以例题从正反两方面指出错误所在，产生这类错误的各方面原因，以及不犯这些错误应特别注意的地方。最后，为了帮助读者了解经济类大专《微积分》考试的基本要求，我们收集了部分经济类大专的《微积分》试题，附于书末供读者参考。

笔者是在近年来从事经济类《微积分》教学和辅导工作的实践基础上，通过总结来完成这本小册子的。就自己而言，当然愿把这种有益于同志们学好《微积分》的事尽量作好，但苦于水平有限，恐难于如愿，恳望读者批评指教。编写过程中得到西南财经大学数学教授吴怀先生指导，并承蒙他审阅全书，谨致以学生的谢意。

许仁忠

一九八七年春节

于西南财经大学

目 录

第一部分　基本概念和基本理论

第一章　基　本　概　念

函数、极限、连续、导数、微分、积分和级数是微积分中几个重要的基本概念。本章通过具体例子帮助大家正确理解这几个概念，同时对常见的由于概念理解偏误而导致的解题错误进行剖析。

§1—1　函　　数

函数的定义域和值域、函数的几种简单性质及初等函数是我们讨论的重点。

一、函数及其定义域和值域

定义　设x与y是两个变量，当变量x在数轴上取某一数值时，如果变量y依照某一法则，总有一个或多个确定的数值与之对应，则变量y叫做变量x的函数。变量x叫做自变量，变量y叫做函数或因变量。

如果对于自变量的某一个已知数值（或在某一已知点

处)，函数具有确定的对应值，那么就说自变量取该值时（或在该点处）函数是有定义的。数轴上使函数有定义的一切点的全体，叫做函数的定义域。

对于自变量x的某一个值，函数的对应值叫做函数当x取这个值时的函数值。函数值的全体，称为函数的值域。

定义域、对应关系和值域是函数概念的三要素。

〔例1〕 函数$f(x)=x$和$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$是否同一函数。

有的同志根据$(\sqrt{x})^2=x$就判定$f(x)=\varphi(x)$，这是错误的。因为函数$f(x)$的定义域是$(-\infty, \infty)$，而函数$\varphi(x)$的定义域是$[0, \infty)$，由于两者的定义域不同，根据函数的定义，$f(x)$和$\varphi(x)$不是同一函数。只有在$[0, \infty)$上，$f(x)=\varphi(x)$。

〔例2〕 函数$f(x)=x$和$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$是同一函数吗？

解：不是。因为$f(x)$和$\varphi(x)$这两个函数的定义域是相同的，都是$(-\infty, \infty)$，但它们的值域不同。$f(x)$的值域是$(-\infty, \infty)$，而$\varphi(x)$的值域是$(0, \infty)$。这样，$f(x)$和$\varphi(x)$的对应关系不同，因而二者不是同一函数。只有在区间$[0, \infty)$上，由于有$\sqrt{x^2}=|x|=x$，才能认为$f(x)=\varphi(x)$。

〔例3〕 已知

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

求$f(1)$和$f(0)$

多数同志都能正确的求得

$$f(1)=1^2+1=2$$

但有的同志却认为$f(0)=0^2+1=1$，这是错误的。这种分段

函数把函数的定义域分为几段，在求函数值时应根据函数的对应关系去计算。在本题中，显然$f(0)=0$。

在求函数的定义域时，既要考虑到函数解析表达式所规定的范围，还要考虑到问题的实际意义。

〔例4〕 设圆的半径为R，则面积

$$A=\pi R^2$$

是R的函数。从解析表达式看，R可取任意实数，但从实际中，R仅能取正实数，故定义域为$(0,\infty)$。

用解析式表达的函数的定义域可以归纳为以下几种常见的类型：

（1） 分式的分母不能为零。如$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$的定义域为$x\neq1$的任意实数。

（2）偶次根式中的被开方式非负。如$f(x)=\sqrt{x^2-1}$的定义域为$x^2-1\geqslant0$即$|x|\geqslant1$。

（3）分式的分母是偶次根式，则被开方式只能取正数。如$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$1-x^2>0$即$(-1,1)$。

（4）对数式的真数只能取正实数。如$f(x)=\log_a(x-1)$的定义域是$x-1>0$即$(1,\infty)$。

(5)偶次根式的被开方式是对数式，则对数式的真数当底$a>1$时只能取大于等于1的实数，当底数$a<1$时只能取$(0,1)$间的实数。例如函数$f(x)=\sqrt{\log_2(x-1)}$的定义域为$x-1\geqslant1$即$x\geqslant2$；而$\varphi(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$的定义域为$0<x-1\leqslant1$即$1<x\leqslant2$。

（6）分式的分母是对数式时，对数式的真数只能取不等

于1的正实数。例如$f(x)=\dfrac{1}{\log_2(x-1)}$的定义域是$x-1\neq 1$等即$x\neq 2$的正实数。

（7）分式的分母中的偶次根式的被开方式是对数式，对数式的真数取值与(5)相似，只是要去掉真数为1的情况。如$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(x-1)}}$的定义域是$x-1>1$即$x>2$；而$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}}$的定义域是$0<x-1<1$即$1<x<2$。

(8)反正弦和反余弦函数的自变量取值范围在$|x|\leqslant 1$上，

〔例5〕求$y=\sqrt{\ln\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$的定义域。

解：这里，既要使对数式有意义，又要使二次根式有意义，于是应有

$$\begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}>0\\ \ln\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)\geqslant 0\end{cases}$$

故知$1\leqslant x\leqslant 4$即〔1，4〕是函数的定义域。如果只考虑到二者中一点，得到的结果是错误的，这也是初学者常出现的错误。

〔例6〕求$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域。

函数是分式$\dfrac{1}{1-x^2}$和根式$\sqrt{x+2}$的和，故应使二者都有意义的才是定义域，于是有

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

故函数的定义域是$x \geqslant -2$且$x \neq \pm 1$。

二、函数的几种简单性质

定义（i）若函数$y=f(x)$对其定义域内的所有的x，均有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$是奇函数；如对定义域内所有的x，均有$f(x)=f(-x)$，则称$y=f(x)$是偶函数；

（ii）若函数$y=f(x)$对区间(a, b)上的任意二点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$y=f(x)$在区间(a, b)内是单调增加的；当$x_1<x_2$时有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$y=f(x)$在区间(a, b)内是单调减少的；

（iii）设函数$y=f(x)$在区间(a, b)上有定义。如果存在一个正数M，使对任意的$x \in (a, b)$，恒有$|f(x)| \leqslant M$，则称$y=f(x)$在(a, b)内有界。

〔例7〕 函数$f(x)=x^2$在$[-1, 2)$内是否偶函数。

不少同志轻易地根据$x^2=(-x)^2$就判定其是偶函数。这是不妥的。因为在$[-1, 1]$上，显然有$f(-x)=f(x)$，但在$(1, 2)$上，由于题目没有明确$f(x)$在$(-2, -1)$的定义式，因而不能确定在$(1, 2)$上也有$f(-x)=f(x)$，故不能肯定$f(x)$在$(-1, 2)$上是偶函数。只有在区间$(-2, 2)$上或$[-1, 1]$上，函数$f(x)=x^2$才是偶函数。

〔例8〕证明$f(x)=x^2$是$(0, \infty)$上的增函数。

不少同志不注意增函数定义中x_1和x_2是定义域中任意二点的条件，分别取$x_1=1$，$x_2=3$，由$f(1)=1^2<3^2=f(3)$就认为是证明了$f(x)=x^2$是增函数。这是错误的。正确的证明过程应是：

任取x_1，$x_2 \in (0, \infty)$，设$x_1 < x_2$，

$\because f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2$

$= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$

由x_1，$x_2 \in (0, \infty)$知$x_1 + x_2 > 0$

由$x_1 < x_2$知$x_1 - x_2 < 0$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$，故知$f(x) = x^2$是$(0, \infty)$上的增函数。

三、初等函数

定义　由基本初等函数（常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次四则运算和有限次复合所构成的并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

〔例9〕函数$y = 1 + x + x^2 + \cdots$是初等函数吗？为什么？

解：不是。因为它不是由基本初等函数经过有限次四则运算而是无限次四则运算得到的。

〔例10〕函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

是初等函数吗？为什么？

解：不是。因为它不是由一个式子表示而是由两个式子表示的。凡是由两个或两个以上的式子表达的分段函数都不是初等函数。

§1—2 极限与连续

函数的极限和连续是两个相关的概念，[illegible]清它们的联系和区别。与此有关的是左右极限的概念及无穷小量的概念。

一、函数的极限和连续

定义 (i) 设函数$y=f(x)$在点x_0处的一个邻域内有定义(在x_0处可以没有定义)。如果对于任意给定的任意小的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切的x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则常数A就叫做函数$y=f(x)$当$x\to x_0$时的极限。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

(ii) 设函数$y=f(x)$在x_0处及其一个邻域内有定义。如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在，而且等于$f(x)$在x_0处的函数值$f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在x_0处连续。

由定义可知，函数在一点连续，函数在那一点的极限必然存在；而函数在一点存在极限，但函数在那一点不一定连续。

〔例1〕 函数

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

在$x=0$处的极限显然存在，即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，但在$x=0$处，

函数$f(x)$不连续。因为$f(0)=1$，$f(x)$在$x=0$处的极限虽然存在，但不等于函数值$f(0)$。

函数的不连续的点叫间断点。判断函数的间断点的原则有三条：①函数在这一点极限不存在；②函数在这一点无定义；③函数在这一点虽有定义且极限存在，但极限值不等于函数值。

〔例2〕 找出函数$y=\dfrac{1}{x^2-1}$的间断点

解：显然，函数在$x=\pm 1$处没有定义，故知$x=1$和$x=-1$是$y=\dfrac{1}{x^2-1}$的间断点。

例1中，函数在$x=0$处虽有定义且极限存在，但函数值不等于极限值，故$x=0$是间断点。

〔例3〕 说明等式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)$$

在什么条件下成立，举出恰当的例子。

有同志认为上式对任何函数$f(x)$均成立，这是由于没有弄清极限与连续的关系而产生的错误。事实上，只有$f(x)$在x_0处连续时，才有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$，$f(x)$在$x_0$处不连续时，上式就不能成立。例如函数

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

就不能有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(\lim\limits_{x\to 1} x)$。

由于初等函数在其定义区间内都是连续的，故我们也可以说对一切初等函数$f(x)$，在其定义区间内，恒有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

二、左、右极限

记$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$是$f(x)$在$x_0$处的右极限和左极限，则函数$f(x)$在$x_0$处极限存在且等于A的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

这是判断函数在某点极限是否存在的直接方法。

〔例4〕讨论函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 在$x=0$处的极限。

有同志从 $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = 1$ 出发，判定

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

这是错误的。事实上，当$x>0$时，

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

而当$x<0$时，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 可知函数$f(x)$在$x=0$处的极限