科學圖書大庫

無限大的等級

譯者　陳弘毅　葉哲志

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

無限大的等級

譯者　　陳弘毅　葉哲志

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鋆　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年十月廿六日初版
中華民國六十二年三月廿五日再版

無限大的等級

定價　新台幣二十元　港幣三元

譯者　陳弘毅　國立師範大學數學系理學士
　　　葉哲志　國立師範大學數學系理學士

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱3261號 電話519784號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鋆 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段151號 電話979739號

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鍠氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良發行系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

序　言

本書是著者自1969年迄今四年間，在國立清華大學數學系的複變數函數論講義之內容整理而成，其目的是給理工科系學生灌輸一般所必須的複變函數論之基本知識。複變數函數的理論不外乎是數學分析的一分科，內容可以說是微分積分學，以及其延伸的一種學問。

科學欲在國內生根，則以本國文字來寫各科學的書籍，是極其重要的工作，俾學者以自己日常的語言，能夠容易感受與吸收其所要的知識，這也就是著者着手寫本書的動機，更期望本書對修讀複變數函數的同學們有所裨益。

本書內容的分量是適合每週三節授一年的課程，或略去部份煩雜的演算，每週四節教授一學期的課程。依著者的經驗講授本講義，在第三章之前有些內容是學生們在初等微積分或高等微積分中已學過，所以對於此部分內容大概都能充分理解，講授時可省略一部分時間。

爲要有效地學習數學，進而使所學能發揮作用，則理解其理論與解說外，隨著各章或各節之後，都列有練習題，其分量恰好爲同學們複習所習的內容，同學們宜逐題做解。

本書除了複變數函數論的理論外，若能使讀者諸君，對於數學全般性能有所理解，則是著者最爲高興的了，尤其對於理工科學生諸君，若能從本講義有系統地，很快地吸收自己所需要的材料與知識，並獲得所要的益處，那就是著者最感欣慰的一件事。

當這本講義出現時，很受清華大學數學系學生們的愛戴與歡迎，也甚受清華同事們的鼓勵，並提供許多有益於本書的助言，著者在此特申謝意。尤其是本系徐正梅先生，一一將拙稿過目抄寫，並提供許多寶貴的意見，在此特表感謝。

本書倉卒脫稿，難免漏誤，尚希專家學者，不吝教正。

賴漢卿謹識

中華民國六十三年一月

修訂版序言

本書去年七月出版後不到二個月，即全部售完，因之來不及更改版誤部分，乃應讀者需要即行出第二版，著者藉此對於第一、二版之版誤，深表歉意。

這次修訂版除將版誤部分修正外，在書末了部分增添了各章節之習題解答提示，以供讀者做習題時參考，也可藉此引發學習興趣與解題信心，雖所列提示未盡完備，但著者相信讀者依所提方向，必能獲得完全的答案。

本書出版後承蒙八、九個大學採用爲課本，著者於此特表謝意，這一次習題提示由顏振輝、葉芳栢與吳博雅等同學幫了不少忙，順便於此申表謝意，本次修訂版，時間倉卒，難免仍有漏誤，尙請專家學者，不吝指正。

賴漢卿　謹識

民國六十四年九月於

清華大學數學研究所

原第二版序

本書的這一版本係經大量修改與增補而成。我特別將第六節重新改寫過，如此可望有助於以一特殊觀點來介紹現代研究的廣大領域。

我願談談有關III－V節的目的，III－V 節乃本書的特色所在，我可舉一特殊之問題加以說明。假設此一問題爲：決定當 x 趨近 1 時冪級數 $\Sigma\phi(n)x^n$ 之狀態。通常對這一問題的分類有三種方法。一種爲用“不等式的條件”來限制 $\phi(n)$，如設 $\phi(n)$ 及其某幾個導函數或函數差爲具有指定符號之單調函數。另一種爲專門考察 $\phi(n)$之特殊形式，如 $n^\alpha(\log n)^\beta(\log\log n)^\gamma$ …，通常這就足以說明主要的爭論問題。

第三種觀點對於討論具這特色的問題常較方便。吾人可假設 $\phi(n)$爲遞增速率不太慢之某一標準體系中之任意函數；所選出自然之體系爲“L-函數”之體系，即其爲可由有限個對數與指數定出之函數。因此，在我所提過的特殊問題中，吾人可假設 $\phi(n)$爲遞增不超過所有 n 之乘冪之任意 L－函數。如此可望證出諸定理－其證明雖非窮盡各種情形，卻可包含所有可視爲特殊情形之標準例子。這一觀點在 du Bois-Reymond 的論文裡多已暗中採用，於此吾人亦常加採用。顯然，一開始必須先對 L－函數之性質做一準確且一般性之考察，但 du Bois-Reymond 卻將其省略。例如，第一個根本定理在本書上爲定理13，這定理的任何特殊情形皆立可證出，但是du Bois-Reymond 卻未曾對其加以證明，而就我所知，在本書出版以前仍未有其一般情形之證明。

我非常感激E.C.Jitchmarsh 先生與 A.Oppenheim 先生在修正證明中所給我的諸多建議，在此一併致謝。

目　次

I. 導 論

1.1. 當n“甚大”時，正整數變數之函數$f(n)$；或者，當x“甚大”或“甚小”或“幾乎等於a”時，連續變數x之函數$f(x)$；其“大的等級”或“小的等級”之概念，甚至在數學分析的最基本階段都是極其重要的*。吾人知道，x^2隨著x趨近無限大，且x^2之趨近無限大**快於**x，即比值x^2/x亦趨近無限大；同樣，x^3之趨近無限大快於x^2；如此可無止地類推下去。於是吾人導至一個由函數x，x^2，x^3，…，x^n，…所構成的“無限大之標度”（x^n）的概念。這標度可因插入x之非整數乘冪而得以補充且因之在某種程度上算是被完成。但是有些函數增加之變率，在吾人的標度，甚至後來被完成的標度上都無法加以測度。就如，$\log x$之趨近無限大慢於x之**任意**乘冪，而e^x則較快；同時，$x/(\log x)$之趨近無限大慢於x，但卻較快於次數小於1之x之任意乘冪。

當吾人更進一步深入於分析，而接觸到它近代的發展，通常如，傅立氏（Fourier）級數論，整函數論，或解析函數之特異點的理論等時，這些概念的重要性就愈來愈大。對這些概念做有系統的研究，對其有關的一般定理的查證與處理此等概念之簡便方法，即爲Paul du Bois-Reymond所著“無限大的計算”這本書的主要內容。

1.2. 吾人設f與g爲，連續變數x之函數，且定義於某一數值x_0以上‡之所有數值x上。進一步，吾人假設f與ϕ爲正值的，連續的，穩定地遞增的，且隨x趨近無限大；於是，吾人考察，$x\to\infty$時，比值f/ϕ之狀況。吾人可區分爲四種情形。

(I) 若$f/\phi\to\infty$，則吾人將稱f之**等級**（order）（或**遞增的速率**（rate of increase），或**遞增**（increase））大於ϕ之等級，而記爲

$$f \succ \phi$$

* 如參見 Hardy I，360。

‡ 表大於或等於x_0。

（II） 若$f/\phi\to 0$，則吾人將稱f之遞增小於ϕ之遞增，而記爲

$$f\prec\phi$$

（III） 若f/ϕ，對於某一數值x_1以上*之所有數值x而言，其函數值皆介於兩正數δ與Δ之間，即$0<\delta<f/\phi<\Delta$，則吾人將稱f之遞增等於ϕ之遞增，而記爲

$$f\asymp\phi$$

其中，可能f/ϕ趨近一固定之極限，若是，則吾人記之爲

$$f\doteqdot\phi$$

最後，若此極限爲1，則吾人將記之爲

$$f\sim\phi$$

當吾人能夠藉$f\asymp\phi$之關係式以比較f之遞增與某種標準函數ϕ之遞增，則吾人稱ϕ**測度**（或**量**）f之遞增。於是稱$2x^2+x+3$之遞增爲x^2。

時常見到的一特殊情形是，f/ϕ與f，ϕ皆爲單調的（即穩定地增加或減少）。在此情形下之f/ϕ必趨近無限大或0或正的極限：故$f\succ\phi$或$f\prec\phi$或$f\doteqdot\phi$。但這關係對一般情形之f，ϕ並不成立，吾人即可察知如下。

（IV） 可能f/ϕ既不趨近無限大或0，也不介於兩正的界限數之間。

例如，設ϕ_1與ϕ_2爲兩連續之增函數，且使$\phi_1\succ\phi_2$。只須瀏覽一下圖1，大概就可足夠清楚地顯示出，吾人如何由往返於ϕ_1與ϕ_2二圖形間之直線或曲線的"樓梯"以構造一穩定增加之函數f；使$x=x_1$，x_2，…

---

* 當f與ϕ爲正值之連續函數時，對x_1加以限制並無眞正的必要。蓋如此則，當$x_0\le x<x_1$時，必有數δ_1與Δ_1使$0<\delta_1<f/\phi<\Delta_1$；而且$x\ge x_1$時，若$0<\delta<f/\phi<\Delta$，則$x\ge x_0$時必使$0<\delta_2<f/\phi<\Delta_2$，在此$\delta_2=\mathrm{Min}(\delta,\delta_1)$，$\Delta_2=\mathrm{Max}(\Delta,\Delta_1)$。

推廣吾人的定義至此種論說不可行之更通常之情形，無論如何是很方便的；吾人略去不必要之文字，在使定義更具有適應性。

時$f=\phi_1$；而$x=x_2$，x_4，…時$f=\phi_2$；於是

$$x=x_1\text{，}x_3\text{，}\cdots$$

時$f/\phi_1=1$，但在$x=x_2$，x_4，… 時其諸函數值依次減少至超過所有限制；而當$x=x_2$，x_4，…時$f/\phi_2=1$，但在$x=x_1$，x_3，…時，其諸函數值依次增加至超過所有限制。若ϕ爲一可使$\phi_1\succ\phi\succ\phi_2$之函數，如$\sqrt{\phi_1\phi_2}$，則$f/\phi$兼具有可增加至超過所有限制與可減少至超過所有限制之值。

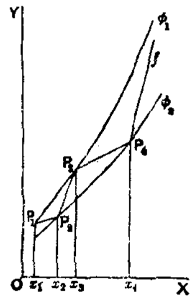

圖 1

以後在§4.43 吾人就可遇到此種類型的例子，其中之函數用明顯的解析式子定出。

1.3. 若能找到一正數之常數δ，使對所有充分大之數值x而言，皆$f>\delta\phi$，則吾人記爲

$$f\succcurlyeq\phi\text{；}$$

而若能找到一正數常數Δ，使對所有充分大之數值x而言，皆$f<\Delta\phi$，則吾人記爲

$$f\preccurlyeq\phi.$$

若$f\succcurlyeq\phi$且$f\preccurlyeq\phi$，則$f\asymp\phi$。

察知$f\succcurlyeq\phi$在邏輯上並非等於$f\prec\phi$之否定，無論如何是很重要的。關係$f\succcurlyeq\phi$，$f\prec\phi$是互斥的，但並非窮舉的；第一式使第二式之否定式成立，但反之則不然。再者，$f\succcurlyeq\phi$並不等於交代式“$f\succ\phi$或$f\asymp\phi$”，這些論點可由§1.2 末段之例題加以說明。在這例題裏，$f\succcurlyeq\phi_1$與$f\prec\phi_1$皆不成立；而$f\succcurlyeq\phi_2$則成立，但$f\succ\phi_2$與$f\asymp\phi_2$則仍皆不眞確。在上，下極限的說法裡，$f\succcurlyeq\phi$意指

$$\lambda=\varliminf\frac{f}{\phi}>0$$

而“$f\prec\phi$錯誤”則意指

$$\Lambda = \overline{\lim} \frac{f}{\phi} > 0$$

此時若有“ $f \succ \phi$ 或 $f \asymp \phi$ ”，則可斷言 $\lambda > 0$，而若 λ 有限則 Λ 亦爲有限。

讀者將不難證明下列諸定理。同性質的其他簡單定理不少，但這裡所列的似乎是最重要的。

(a) 若 $f \succ \phi$，$\phi \succcurlyeq \psi$，則 $f \succ \psi$。
(b) 若 $f \succcurlyeq \phi$，$\phi \succ \psi$，則 $f \succ \psi$。
(c) 若 $f \succcurlyeq \phi$，$\phi \succcurlyeq \psi$，則 $f \succcurlyeq \psi$。
(d) 若 $f \asymp \phi$，$\phi \asymp \psi$，則 $f \asymp \psi$。
(e) 若 $f \succcurlyeq \phi$，則 $f + \phi \asymp f$。
(f) 若 $f \succ \phi$，則 $f - \phi \asymp f$。
(g) 若 $f \succ \phi$，$f_1 \succ \phi_1$，則 $f + f_1 \succ \phi + \phi_1$。
(h) 若 $f \succ \phi$，$f_1 \asymp \phi_1$，則 $f + f_1 \succcurlyeq \phi + \phi_1$。
(i) 若 $f \asymp \phi$，$f_1 \asymp \phi_1$，則 $f + f_1 \asymp \phi + \phi_1$。
(j) 若 $f \succ \phi$，$f_1 \succcurlyeq \phi_1$，則 $f f_1 \succ \phi \phi_1$。
(k) 若 $f \asymp \phi$，$f_1 \asymp \phi_1$，則 $f f_1 \asymp \phi \phi_1$。

讀者若能列述一系列又含符號 $\ggcurly$ 與 $\sim$ 之類似定理，將是有益的。

1.4. 迄今，吾人一直假設所論及之函數皆隨 x 趨近無限大。沒有任何理由阻止吾人假設其含下列諸情形：其中 f 或 ϕ 穩定地趨近零，或趨近不爲 0 之極限；如此吾人可記 $x \succ 1$，或 $x \succ 1/x$，或 $1/x \succ 1/x^2$。記此於心，讀者將可構造此一系列定理，類似於 §1.3 者，但是其中所含之和與積代之以商。

推廣吾人之定義，使其可適用於穩定趨近 $-\infty$（或 0 或其他極限）之負值函數，亦將更爲方便。在此等情形中，若用到符號 $\succ$，$\prec$，$\asymp$，$\ggcurly$，則函數與其模沒有分別：於是吾人記 $-x \prec -x^2$ 或 $-1/x \prec 1$ 時，其意義恰與 $x \prec x^2$ 或 $1/x \prec 1$ 相同。但是 $f \sim \phi$ 被視爲關於函數本身而非其模之一命題。

如今，定下如下之原則，必然甚佳：今後，對於本書所提及之函數，皆認爲是正值的，連續的，且單調的，其趨近無限大時爲增函數，趨近 0 時爲減函數；除非對其所加之說明或其本身所含之意義已顯然地與此矛盾。但是，有時候，不沿用這些限制反較方便。吾人可放棄對連續函數之限制，例如

，可記

$$[\,x\,] \sim x\ ,\ \pi(x) \prec x\ ,$$

在此 $[\,x\,]$ 表示 x 之整數部分，而 $\pi(x)$則表不超過 x 之質數的個數。又吾人可記

$$1 + \sin x \prec x\ ,\ x^2 \succ x \sin x\ ,$$

以第一式爲例，其意義爲 $(1 + \sin x)/x \to 0$。甚且，可將吾人之符號運用於複函數，如記 $e^{ix} \prec x$ 或 $e^{ix} \asymp 1$。讀者將不難適當地修飾諸定義。

仍有其他的可能情形是必須考慮到的。迄今，吾人一直局限注意力於趨近$+\infty$之連續實數 x 的函數。這種情形在包含一種在應用上甚至更重要之情形仍可成立，此即正整數變數 n 之函數。吾人只須不考慮 x 的非整數值，則有 $n! \succ n^2$ ，$-1/n \prec n$ 。

最後，由假設 $x = -y$ ，$x = 1/y$，或 $x = 1/(y - a)$ ，吾人可從而考慮一連續變數 y 之函數，其中 y 趨近$-\infty$或 0 或 a 。讀者將易於補全其必要之修飾。

以下，吾人所敘述並證明的諸定理，通常皆將僅限於起先的一種情形；即一連續之增函數，其變數 x 爲連續且趨近無限大；至於敘證其他情形所對應之類似定理則爲留給讀者之工作。

1.5. 在此，另有一些符號，吾人將知，在其用於特定之意義上時，甚爲方便。以

$$O(\phi)$$

表示一函數 f ，且使下式成立，此外對其無任何其他之規定

$$|f| < K\phi\ ,$$

其中 K 爲一常數且 ϕ 爲 x 之正值函數。雖然這符號由於 Landau 的影響而普遍地被採用，但首先用它的卻是 Bachmann* 。故有

$$x + 1 = O(x)\ ,\ x = O(x^2)\ ,\ \sin x = O(1)$$

顯然地，下三敍述

$$f=O(\phi)\ ;\ |f|<K\phi\ ,\ f\preccurlyeq\phi$$

彼此同義。仍依照Landau†，吾人以

$$o(\phi)$$

表示一函數f，但使$f/\phi\to 0$。
於是

$$x=o(x^2)\ ,\ 1=o(x)\ ,\ \sin x=o(x)$$

而

$$f=o(\phi)\ ,\ f/\phi\to 0\ ,\ f\prec\phi$$

彼此同義。

吾人依照Borel‡，在一整個系列的不等式裡，用同一字母K以表示一個與所論及之變數無關之正數，但出現在諸不等式中之K並不一定有相同的數值。卽如

$$\sin x<K\ ,\ 2x+1<Kx\ ,\ x^m<Ke^x\ (x\geqq 1).$$

因此，若吾人引用K於任意有限個之不等式（如上列之前二式），這些不等式除含x或其他正論及之變數外概不含其他變數；則所有K的數值介於二數K_1與K_2之間：卽如K_1可能是10^{-10}而K_2可能是10^{10}。在這情形中所有的K滿足$0<K_1<K<K_2$，而每一關係式$f<K\phi$皆可以$f<K_2\phi$代替之，又每一關係式$f>K\phi$則代以$f>K_1\phi$。但是吾人亦有時會引用K於含一參數之不等式（如上列之第三式含參數m）。在此情況下之K，雖與x無關，卻爲m之函數。假設有有限個之參數α，β，…似此出現於本書。則若吾人以任意之特定系列之數值給予α，β，…，吾人卽能如上決定K_1，K_2。如此，則所有之K可滿足。

$$0<K_1(\alpha,\beta,\cdots)<K<K_2(\alpha,\beta,\cdots)\ ,$$

---

* Bachmann，**2**，401。 †Landau，**1**，61。 ‡Borel，**6** and **2**，105。

其中K_1，K_2爲α，β，… 之正值函數，且被定義於可使其適合所求之任一組參數之數值上。但是K_1可有下界0，而K_2則無界。因此吾人可適當地選取α，β，…使K_1與K_2各成爲隨心所欲的小與大。

當一函數f在x大於某一固定數值時若具有某一性質，則此一固定數值當然依此函數與其所具之性質而定；此時吾人稱$x > x_0$時，f具備這性質。於是

$$x > 100 \ (x > x_0)\ ,\ e^x > 100x^2 \ (x > x_0)$$

吾人將用δ與Δ來表示任意而固定之正數，用δ於吾人想強調一數可能有的小時，而Δ則於吾人想強調其可能有的大。因此

$$f < \delta\phi \ (x > x_0)$$

意指"無論δ如何小，吾人皆能找到x_0使$x > x_0$時$f < \delta\phi$"，即意義與$f \prec \phi$相同；而

$$(\log x)^{\Delta} \prec x^{\delta}$$

則意指"$\log x$之任意乘冪(無論如何大)之趨近無限大較慢於x之任意乘冪(無論如何小)"。

最後，吾人以ϵ表示一函數(含一變數或數個變數由上下文或接尾詞可知)，使當這變數或諸變數趨近無限大或趨近所提及之極限時，其極限值爲0。因此ϵ與$o(1)$同義，而

$$f = \phi(1+\epsilon)\ ,\ f \sim \phi\ ,\ f = \phi + o(\phi)$$

彼此亦同義。

1.6. 爲了熟悉上節中所定諸符號之運用，讀者須證明下列之關係式，其中$P_m(x)$，$Q_n(x)$各表次數爲m與n之多項式且其領導係數爲正數：

$$P_m(x) \succ Q_n(x)\ (m > n)\ ,\ P_m(x) \asymp Q_n(x)\ (m = n)\ ,$$

$$P_m(x) \asymp x^m\ ,\ P_m(x)/Q_n(x) \asymp x^{m-n}\ ,$$

$$\sqrt{(ax^2+2bx+c)} \asymp x\ (a>0),\ \sqrt{(x+a)} \sim \sqrt{x},\ \sqrt{(x+a)}-\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}},$$

$$e^x \succ x^\Delta,\ e^{x^2} \succ e^{\Delta x},\ e^{e^x} \succ e^{x^\Delta},\ \log x \prec x^\delta,\ \log\log x \prec (\log x)^\delta,$$

$$\log P_m(x) \asymp \log Q_n(x),\ \log\log P_m(x) \sim \log\log Q_n(x),$$

$$x + a\sin x \sim x,\ x(a+\sin x) \asymp x\ (a>1),$$

$$e^{a+\sin x} \asymp 1,\ \cosh x \sim \sinh x \sim \frac{1}{2}e^x,\ \cosh(x+a) \asymp \cosh x,$$

$$x^\Delta = o(e^{\delta x}),\ (\log x)^\Delta = o\{e^{(\log x)^\delta}\},\ x^\Delta = o\{e^{(\log x)^{1+\delta}}\},$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \sim \log n,\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n \asymp 1,$$

$$n! \prec n^n,\ n! \succ e^{\Delta n},\ n! = n^{n^{1+\epsilon}} = n^{n(1+\epsilon)},$$

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{(2\pi)},\ n!(e/n)^n = (1+\epsilon)\sqrt{(2\pi n)},$$

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x},\ \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + o\left\{\frac{x}{(\log x)^2}\right\},$$

$$\int_3^x \frac{dt}{\log\log t} \sim \frac{x}{\log\log x}$$