CALCULUS
大一微積分

譯者序

譯者曾執教數學十有餘年，深感教學之成效與所用教本有密切關係，目前坊間之微積分深淺不一，難易有別，但能深入淺出、系統完整、觀念正確者，實不易多得．因本書具有多項長處，乃不惜利用公餘之閒，歷時四載，完成譯稿，主要着眼在下列數點：

1. 本書觀念符號均與高中新數學觀念符號一致，大部分坊間譯本均採用舊觀念舊符號，以致高中新數學無用武之地．
2. 系統完整，深淺適度，對一般非數學系同學（尤其是專科學校同學）最爲合適．
3. 現大部分學校均採用英文版數學課本，管見以爲不甚恰當，因所有初讀微積分學生均係初次閱讀英文版課本，其閱讀能力自然有限，雖然數學書較易閱讀，但多年之經驗顯示，學生甚不易全盤了解，尤其對理論精闢之處，更有隔靴搔癢之感，甚而至於似是而非，曲解文義，實在是事倍而功半，如有較好之中文譯本當可力矯此弊，至於培養英文閱讀能力，竊意以爲從文字敍述較不嚴密之實用科目入手較爲有效．

付梓倉促，謬誤之處在所難免，區區管見，貽笑大方，敬祈海內先進賢達，不吝指教是幸．

前　言

本書爲大學一年級數學教本，初版在 Wesleyan 大學試用三年，效果頗令人滿意．

由於着眼在培養科學與工程基礎，本書很前面卽已提到積分與導數，在九星期之內卽可了解積分與微分之全貌．

本書重點不在原則與苛求，而在使學生在對全書的一致連貫性的了解，於是說明並證明（在附錄）在閉區間$[a, b]$中連續函數之極大——極小定理，但卻避免一般的符號與Heine-Borel定理．

本書不靠例題說明，但每一說明必有例題，本書不靠數學上的非正式討論，但卻用非正式討論來介紹新的數學觀念．

對各種學生本書各部分均有足夠的啓發式的教材、例題與習題．

各先進同仁曾予卓越之指敎謹此致謝，尤其感謝 George Springer 先生對原稿之諸項建議與關懷．

希臘字母表

Α	α	alpha
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ ϑ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π ϖ	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ φ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

目　錄

第6章

第7章

第8章

第9章

第10章

第11章

教學重點

第一章　是基本數學（preliminary in character）對讀畢高中新數學課程的學生刪去不教應毫無困難，不過在任何情況下都應盡快的授畢．

第二章　反映出我們的態度，極限的記號是必須了解的一絕不可省略，有的證明放在補充教材內，有的證明在以後可以刪去，極限的觀念絕不可輕視，以後各章都是以此爲基礎的．

第三章　是直接學習微分及其應用．

第四章　中有積分，對連續函數可積分留到以後再證明．

第五章　討論對數與指數函數，由積分 $\int_1^x dt/t$ 開始．

第六章　專門討論三角函數及其反函數，由最小上限公理，與圓弧長的定義開始，第6.2節對弧長的純直覺記號可刪去，在任何情況下，其證明均可刪去．

第七章　我們把微積分的方法應用於學習解析幾何，特別注重於平移、旋轉、極坐標、參數表示法及曲率．

第八章　專門是積分計算的技巧：部分積分，代入積分，分解成部分分式，及數值積分．

第九章　我們把積分當成均值法（averaging process）看，考慮面積、體積、弧長、表面積、功、與力矩，對積分作緊密的注意--視爲與集合函數一樣．

第十章　我們學習數列與級數，一般說來對泰勒級數與冪級數特別注意．

第十一章　我們提出一些特殊的課目：無窮極限，l'Hospital rule, 不正常積分（*Improper*）我們也要提出雙曲正弦與雙曲餘弦．本章的形式有點特別，每一部分的解釋均甚簡要，大部分的結果都是由學生自行從習題中謹慎收集而得．

在附錄中我們證明了課本正文中未曾證明的三個基本定理，介值定理、極大一極小定理及連續函之可積分．

第一章

緒　論

1.1 集合論

集合就是個體的聚集，我們並不特別講求個體的性質，然而我們所需要的集合是非常確定的；也就是說對任何已知個體 x 而言，敍述"x 在此集合中"必須是眞或假二者只佔其一．問題"x 是否在此集合中？"的答案必須是肯定的是，或肯定的否．集合不包含高度抽象意見，如"一切有好願望的人"與"所有愉快的日子等".

集合中的個體，就稱爲此集合中的元素"x 爲集合 A 的元素".x 爲集合 A 的元素的表示法是

$$x \in A.$$

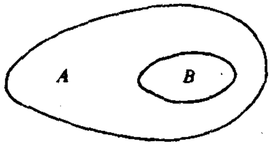
也讀作"x 是 A 的元素"或"x 屬於 A"或"x 在 A 之中"記號 $\notin$ 表示 x 不是 A 的元素．例如

$$-1 \notin \text{正整數所成的集合}.$$

集合 B 稱爲集合 A 的子集合若且唯若

$$x \in B \qquad \text{則} \qquad x \in A.$$

於是若 B 不是 A 的子集合，則必有一 B 中之個體不在 A 中．我們用 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ 表 B 是 A 的子集合．（見圖1.1.1.）這種表示法也讀作"B 包含於 A"或"A 包含 B".



$B \subseteq A$

圖 1.1.1

例 題 1. 一切等邊三角形所成的集合 $\subseteq$ 一切三角形所成的集合

例 題 2. 一切整數所成的集合 $\supseteq$ 一切偶數所成的集合．

例 題 3. 所有大學一年級學生所成的集合 $\subseteq$ 所有大學生所成的集合．

集合的相等是可逆的，即若且唯若有完全相同的元素，則 $A=B$ 更正式一點說若且唯若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq A$ 則 $A=B$．

我們要分清 A 中的元素 a 與 A 的子集合 $\{a\}$，這裏的 a 爲子集合中唯一的元素．所以 $a \in \{a\}$ 是正確的，而 $a=\{a\}$ 則爲錯誤，包括 a,b 兩元素的集合以 $\{a,b\}$ 表之，包括 a,b,c 三元素的集合以 $\{a,b,c\}$ 表之依此類推．

集合 A 與集合 B 共有的元素所成的集合稱爲 A 與 B 的交集，以 $A \cap B$ 表之（圖 1.1.2）於是

若且唯若 $x \in A$ 且 $x \in B$ 則 $x \in A \cap B$．

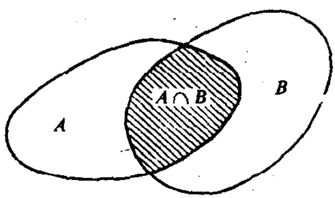


圖 1.1.2

例 題 4. 設 A 爲一切非負數所成的集合，B 爲一切非正數所成的集合則 $A \cap B=\{0\}$.

例 題 5. 設 A 爲全部 3 的倍數所成的集合，B 爲全部 4 的倍數所成的集合，則 $A \cap B$ 爲全部 12 的倍數所成的集合．

例 題 6. 設 A 爲一切警察所成的集合，B 爲一切至少有 6 尺高的人民所成的集合，則 $A \cap B$ 爲一切至少有 6 尺高的警察所成的集合．

設 A 與 B 無共同元素，則稱 A 與 B 爲互斥，而寫作 $A \cap B=\phi$，表沒有元素的集合，也稱爲空集合．

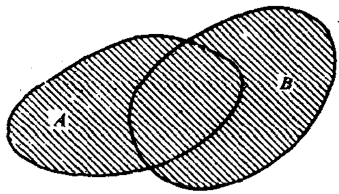
例　題7. 一切具有康奈爾大學博士學位的金魚所成的集合爲空集合．
例　題8. 其平方爲負數的全部正數所成的集合爲空集合．

若 ϕ 爲空集合，A 爲任意集合，則 $\emptyset \subseteq A$ 要證明此事只要注意 ϕ 畢竟是沒有元素，也沒有不在 A 中的元素．

假設 $\emptyset_1$ 與 $\emptyset_2$ 均爲空集合，因爲 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$，由等集合的定義知 $\emptyset_1 = \emptyset_2$．簡言之，所有空集合均相等，故可稱一切空集合爲 ϕ．

A 與 B 的聯集寫作 $A \cup B$．是一切在 A 中或 B 中的元素所成的集合．（圖 1.1.3）包括了既在 A 中又在 B 中的元素，用下列符號表之．

若且唯若　$x \in A$　或　$x \in B$　則　$x \in A \cup B$



$A \cup B$

圖 1.1.3

例　題9. 設 A 爲 1 至 9 之間所有偶數所成的集合，B 爲所有大於 5 的偶數所成的集合，則 $A \cup B$ 爲所有正偶數所成的集合．
例　題10. 設 A 爲一切大學生所成的集合，B 爲一切大學一年級生所成的集合，則 $A \cup B$ 爲一切大學生所成的集合．

集合論至此已討論得差不多了，但這並不是我們這裏的目的．上述所介紹的符號，目前已足夠使用．

習　題

求下列各題的答案：

1.* $\{a, b, c\} \cup \{b, d\}$.
2. $\{a, b, c\} \cap \{b, d\}$.
3.* $\{a, b, c\} \cup \{b, d\} \cup \{a, e\}$.
4. $\{a, b\}$ 的一切子集合．
5.* $\{a, b, c\}$ 的一切子集合．
6. $\{a, b\}$ 與 $\{b, a\}$ 是否相等？

1.2 實數系

原則上我們假定讀者已熟悉實數的基本代數性質．

我們由稱 $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ 的元素爲整數開始，下列形式的數

$$p/q \quad p\text{ 與 }q\text{ 均爲整數，且 }\quad q\neq 0,$$

稱爲有理數.不是有理數（例如 $\sqrt{2}$ 與 π）的實數稱爲無理數，實數的有理數用小數式表示時可稱爲有限位小數或爲循環小數．例如：

$$\tfrac{7}{4}=1.75,\qquad \tfrac{2}{3}=0.666\ldots,\qquad \tfrac{2}{7}=0.285714285714\ldots.$$

一切實數所成的集合以 $\mathbf{R}$ 表之，一切有理數所成的集合以 $\mathbf{Q}$ 表之，一切整數所成的集合以 $\mathbf{J}$ 表之，故得

$$\mathbf{J}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}.$$

本書一切未予確定的“數”均表“實數”

我們特別指出注意被零除爲無意義，若 a 與 b 均爲實數，則

$$ab=0 \quad \text{纔函} \quad a=0 \text{ 或 } b=0.$$

假定已熟悉了正實數與負實數的算術，我們可由下式定義 $a<b$ 或相當於 $b>a$（依次讀作“a 小於 b”與“b 大於 a”）

$$\text{若且唯若}\quad b-a>0 \quad \text{則}\quad a<b$$

則立刻就可得到下列結果．

(O_1) 若 a 與 b 爲實數，則 $a<b$ 或 $a=b$ 或 $b<a$；
(O_2) 若 $a<b$ 且 $0<c$，則 $ac<bc$；
(O_3) 若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<b<c$；(遞移律)
(O_4) 若 $a<b$ 則對所有實數 c 而言，恒有 $a+c<b+c$

1.2.1 定 義

若 a, b, c 均爲實數，且若 $a<b<c$ 或 $c<b<a$．則稱 b 介於 a 與 c 之間．

重要而應該注意的是，介於任意二實數之間，有無限多個實數．這可立卽從下面定理得到證明．

1.2.2 定 理

二數的算術平均數，介於二數之間：卽

$$\text{若}\quad a<b,\qquad \text{則}\quad a<\frac{a+b}{2}<b.$$

證明：因爲

$$a+a<a+b<b+b.$$

於是

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b. \quad \square$$

像"最小正數"，或"最大負數"，或"緊靠 $\frac{1}{2}$ 右邊的數"等數詞都是無意義的．定理 1.2.2 證明了　些數不存在．

符號

$$a < b \text{ 或 } a = b,$$

記作

$$a \leq b.$$

$b \geq a$ 有相同的意義．

數詞

"若且唯若"

在數學中用途廣泛，若以縮寫字代表，更爲便利．

"若且唯若"（ if and only if ）以後簡寫成" iff "．

一切有（　）條件的 x 所成的集合，表示爲

$$\{x : (\quad)\}.$$

於是

$\{x : 0 < x < 1\}$ 是介於 0 與 1 之間的實數集合．

$\{x : x > 0, x$ 爲有理數$\}$ 是正有理數集合．

$\{2n+1 : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是正奇數集合．

R 中的最重要的子集合是區間．非正式的說區間可認爲是"沒有間隙"的集合．也就是說，**R** 的非空子集合 I 若有下兩條件．則稱爲區間．

(1) I 至少有兩個元素，且

(2) 若 $a \in I, b \in I, a < x < b$ ，則 $x \in I$

設 a, b 均爲實數，且 $a < b$ ．下列爲各類型區間與其標準記號的完整表．

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x : a < x < b\}, & [a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\},\\
(a, b] &= \{x : a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x : a \leq x < b\},\\
(a, \infty) &= \{x : a < x\}, & [a, \infty) &= \{x : a \leq x\},\\
(-\infty, b) &= \{x : x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x : x \leq b\},
\end{aligned}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbf{R}.$$

一般言之，二區間的聯集不是區間．例如 $A = [0, 1] \cup [2, \infty)$ 不是區間：

$$1 \in A, \quad 2 \in A, \quad 1 < \tfrac{3}{2} < 2 \quad \text{但} \quad \tfrac{3}{2} \notin A.$$

注意：區間都是無限集合（infinite sets）（根據定理 1.2.2）．有些區間有最大的元素，有些則無，有些區間有最小的元素，有些則無．例如，區間 $[a, b]$，$(a, b]$，$(-\infty, b]$ 都有最大的元素，即 b．區間 $[a, \infty)$ 與 $[a, b)$ 沒有最大的元素。

比較 $I_1 = (a, b)$，與 $I_2 = (a, \infty)$．二者都是無限集合：都沒有最大數二者却斷然不同．在 I_1 中能找到大於其一切元素的數．在 I_2 中這種數不存在．用數學述語說，I_1 有上限而 I_2 則否．

1.2.3 定 義

令 S 爲實數集合．則 S 爲

(i) 有上限，若且唯若有一實數 M，使得

對所有 $x \in S$ 而言，恆有 $x \leq M$

（M 稱爲 S 的上限）；

(ii) 有下限，若且唯若有一實數 m，使得

對所有 $x \in S$ 而言，恆有 $m \leq x$

（m 稱爲 S 的下限）；

(iii) 有界限，若且唯若它是有上限或有下限．

例 題 *1.* 區間 $(-\infty, 2]$ 與 $(-\infty, 2)$ 都有上限，而無下限．

例 題 **2.** 正整數集合有下限，而無上限。

例 題 *3.* 區間 $[0, 1]$, $(0, 1)$，與 $(0, 1]$ 都有界限（上限與下限二者俱全）

習 題

1.* 試問下列何數爲有理數？

$1.41,\quad \sqrt{2},\quad (1+\sqrt{2})^2,\quad (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}),\quad 3.14,\quad \pi$?

2. 試以兩個整數的商表示下列各數：

(a)* 3.176, (b) -2.47, (c) 循環小數 0.333...,
(d) 循環小數 0.003333..., (e)* 循環小數 0.212121...,
(f) 循環小數 $0.a_1a_2 \ldots a_na_1a_2 \ldots a_n \ldots$.

3.* 若 a 與 b 爲有理數，α 與 β 爲無理數，關於 $a+b$, $a+\alpha$, $\alpha+\beta$, 2α, $a\alpha$, $\alpha\beta$ 的有理性或無理性如何？

4. 下列那些集合有上限，有下限或有界限？

(a) 負整數集合 (b) $(-\infty, 0]$,
(c) $(-\infty, 4) \cap (3, \infty)$, (d) $(-\infty, 4) \cup (3, \infty)$,
(e) $\{\sqrt{x} : x \in [0, 9]\}$, (f) $\{2^n : n \in \mathbf{J}\}$,
(g) $\{2^{-n} : n \in \mathbf{J}\}$, (h) $\left\{\dfrac{x^2}{x^2+1} : x \in \mathbf{R}\right\}$?

5.* 有理數能滿足方程式 $10^x = 2$ 嗎?

6. 令 r 與 s 爲有理數，且二者不均爲零．試證 $r+s\sqrt{2}$ 的倒數有相同形式．
7. 試證 $\sqrt{2}$ 爲無理數．[指示：反過來，設 $\sqrt{2}=p/q$ 的最簡分數項平方兩邊，然後討論 p 與 q 二者必定可爲 2 除盡．]
8. 試證 $\sqrt{3}$ 爲無理數．

1.3 坐標線

此處取用法國哲學家與數學家 René Descartes (1596–1650) 所發明的實數的幾何表示法．他的拉丁文名字是 Cartesius 所用的坐標就稱爲卡笛遜坐標．

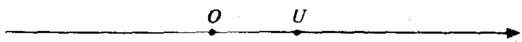


圖 1.3.1

直線 l，並在其上定一方向稱爲正向．爲方便起見，將此線放於水平位置，並選定由左至右的方向爲正向．選定方向以後，線上就有了一定的順序；若且唯若 P 在 Q 的左邊．則記點 P 在點 Q 之前爲 $P<Q$

顯然的，若 P_1 與 P_2 均爲 l 上的點，則

$$P_1<P_2 \quad 或 \quad P_2<P_1 \quad 或 \quad P_1=P_2.$$

還有

$$若 \quad P_1<P_2 \quad 且 \quad P_2<P_3, \quad 則 \quad P_1<P_3.$$

在 l 線上選點 O，稱爲坐標系的原點，而且在點 O 的右邊選一點 U（見圖 1.3.1.）命 O 點的坐標爲 0，U 點的坐標爲 1．OU 線段當作一個單位長度．對 l 上任一點 P，測量 O 與 P 之間的距離（用 OU 的單位數表示之），並以 $d(O,P)$ 表示．設 $d(O,P)=\alpha$．若 $O\le P$，則命 P 爲坐標 α．若 $P\le O$，則命爲坐標 $-\alpha$．

在 l 上的坐標系，具有下列性質：

1) l 上的每一點 P 都代表一個數，且只代表一個數，即 P 的坐標
2) 每一實數 α 都代表一點，且只代表一點，即坐標爲 α 的點 P.
3) 點 $P<$ 點 Q

$$若且唯若 \quad P 的坐標 < Q 的坐標．$$

鑑於 l 與 $\mathbf{R}$ 之間的對應關係，通常不能嚴格區分坐標線與實數系於是把實數視爲附屬於線上的點．說到線 $\mathbf{R}$ 或實數線或數線，與此線上的點力 x，其實 x 就是問題中的點的坐標．例如，x 在數線上介於兩已知點之間的點集合，稱爲區間．

絕對值的觀念用途極廣．對每一實數 x，定義 x 的絕對值記作 $|x|$，表示 x 與 $-x$ 中最大的數，可簡記爲

(1.3.1) $$|x| = \max\{x, -x\}.$$

就相當於

(1.3.2) $$|x| = \begin{cases} 若 \ x \geq 0 \ 則 & x \\ 若 \ x \leq 0 & -x \end{cases}$$

注意

$$|x| \geq 0, \quad 若且唯若\ |x| = 0, 則\ x = 0, 且\ |-x| = |x|.$$

又對任何實數 x 與 y 均有

(1.3.3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ （三角不等式），

(1.3.4) $|xy| = |x||y|$,

(1.3.5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

讓我們證明(1.3.3). 若 $x + y \geq 0$, 則 $|x + y| = x + y$. 因爲 $x \leq |x|$ 且 $y \leq |y|$, 則得 $x + y \leq |x| + |y|$ 於是 $|x + y| \leq |x| + |y|$. 若 $x + y \leq 0$, 則 $|x + y| = -(x + y) = -x - y$. 因爲 $-x \leq |x|$ 且 $-y \leq |y|$, 得 $-x - y \leq |x| + |y|$ 於是又得到 $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

(1.3.4) 的證明．是一如上式，(1.3.5) 則留作習題．

再看到坐標爲 x 的點 P

$$d(O, P) = \begin{cases} 若\ O \leq P, \ 則 & x \\ 若\ P \leq O, & -x \end{cases}$$

得知 $d(O, P) = |x|$ ．視 x 爲點本身，則有

$$d(O, x) = |x|.$$

通常"兩點" x 與 y 之間的距離 $d(x, y)$ 記作

(1.3.6) $$d(x, y) = |x - y|.$$

證明極爲簡單． 若 $x \leq y$, 則 $d(x, y) = y - x$ 且 $y - x \geq 0$. 於是 $d(x, y) = |y - x|$. 若 $y \leq x$, 則 $d(x, y) = x - y$ 且 $x - y \geq 0$. 於是又得 $d(x, y) = |y - x|$. □

習 題

1.* 試求下列各數的絕對值 $0, 3, -3, 6 - 5\sqrt{2}, \pi - 3, 3\pi - 10$.
2. 解 $|x - 1| = 0$.
3.* 解 $|x - 1| + |x - 2| = 0$.
4. 解 $|2x - 1| = 0$.
5.* 解 $|1 - 2x| = 0$.
6. 試證，對每一實數 x

$$\max\{x, -x\} = \begin{cases} x & 若\ x \geq 0, \\ -x & 若\ x \leq 0. \end{cases}$$