

高等学校教材

工程电磁场与电磁波

陈国瑞 华荣喜 李春晖 编

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书为高等航空院校通信和电子类有关专业的技术基础课统编教材之一,内容符合国家教委1986年审定的电磁场与电磁波课程教学基本要求。

本书共八章,重点为麦克斯韦方程组及其应用、边界条件、静态场典型解法、平面电磁波的传播、反射和折射、波导和电磁波辐射等。主要章节均配有例题和习题。

本书可作为高等工科院校通信和电子类的教材或教学参考书,也可供电磁场与微波技术学科领域工作的科学技术人员参考。

高 等 学 校 教 材
工 程 电 磁 场 与 电 磁 波

陈国瑞 等编
责任编辑 柴文强
责任校对 耿明丽

西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路127号)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0253-9/TM·2(课)

开本 787×1092毫米 1/16 22.625印张 550千字
1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷
印数 1—1420册 定价: 4.47元

前 言

本书是根据航空航天工业部航空高校第一教材委员会规划、审定后编写出版的,课程内容符合国家教委审定的“电磁场与电磁波”课程教学基本要求。

“工程电磁场与电磁波”是通信和电子类专业的一门技术基础课。在“高等数学”、“普通物理”中的电磁学和“电路”课程的基础上,学习本课程,将使学生对宏观电磁场和电磁波的基本规律有更深入和完整的理解,具备定量计算简单工程电磁问题的能力,建立场和路的统一认识。本课程也为学习“微波技术”等专业课程或从事电磁工程研究准备必要的基础,因此本课程具有承上启下的某种作用。

本书在章节编排上和同类教材中采用的传统模式有所不同,书中对一般静电场和恒定电磁场的知识只作概括性归纳总结,没有分章讲授,静态场问题主要突出边值问题的求解,全书侧重于交变电磁场和电磁波,并尽量结合工程应用实例。为配合课程教学,本课程编者之一李春晖副教授还开发了一套“工程电磁场与电磁波”计算机辅助教学软件包。编者几年来的教学实践初步表明,上述点滴改革,对于节省学时,激发学生学习兴趣,培养学生分析问题及解决问题的能力 and 提高本课程教学质量是有益的。

本书内容可供一学期教学之用,参考学时范围为70—80学时。第一章为矢量和场,第二章为麦克斯韦方程组,第三章为媒质的电磁性质和边界条件,第四章为静态场的解,第五章为场论和路论的关系,第六章为平面电磁波,第七章为规则波导和空腔谐振器,第八章为电磁波的辐射,书末提供全部习题答案。采用本教材的老师,可根据具体情况对教学内容作适当取舍。

本书由西北工业大学电子工程系陈国瑞教授编写第一和第五章,李春晖副教授编写第二至第四章,南京航空学院电子工程系华荣喜副教授编写第六至第八章,最后由陈国瑞统编全稿。

本书编写出版过程中得到西北工业大学教材科的同志们不少帮助,还得到两校有关系和教研室领导及同事的合作与支持。承蒙西安电子科技大学梁昌洪教授对本书原稿进行审阅,并提出了不少宝贵意见,在此谨表示衷心的感谢。

由于本书编写时间比较仓促,加之编者水平所限,书中难免存在错漏或不当之处,切望使用本书的师生及读者们批评指正。

编 者

一九八九年四月

目 录

第一章 矢量和场	1
§ 1.1 矢量	1
§ 1.2 矢量乘积	5
§ 1.3 正交坐标系	10
§ 1.4 标量场和矢量场	17
§ 1.5 标量场的梯度	21
§ 1.6 矢量场的散度	23
§ 1.7 矢量场的旋度	27
§ 1.8 重要场论公式	34
§ 1.9 电场强度 电位	36
§ 1.10 磁感应强度 磁位	45
习 题	51
第二章 麦克斯韦方程组	58
§ 2.1 法拉第电磁感应定律	58
§ 2.2 安培环路定律	62
§ 2.3 电流连续性方程	67
§ 2.4 高斯定律	70
§ 2.5 麦克斯韦方程组的积分形式	73
§ 2.6 麦克斯韦方程组的微分形式	75
习 题	81
第三章 媒质的电磁性质 边界条件	87
§ 3.1 导体	87
§ 3.2 电介质	90
§ 3.3 磁介质	96
§ 3.4 媒质中的麦克斯韦方程	101
§ 3.5 电磁场的边界条件	103
习 题	111
第四章 静态场的解	115
§ 4.1 泊松方程和拉普拉斯方程	115
§ 4.2 对偶原理	119

§ 4.3 叠加原理和唯一性定理	122
§ 4.4 镜像法	125
§ 4.5 直角坐标系中的分离变量法	136
§ 4.6 圆柱坐标和球坐标系中的分离变量法	144
§ 4.7 复变函数法	152
§ 4.8 图解法	161
§ 4.9 有限差分法	162
习 题	169
第五章 场论和路论的关系	177
§ 5.1 引言	177
§ 5.2 欧姆定律 焦耳定律	177
§ 5.3 电容	181
§ 5.4 部分电容	184
§ 5.5 电感	187
§ 5.6 克希荷夫定律和麦克斯韦方程	193
§ 5.7 路量和场量的对比关系	198
习 题	200
第六章 平面电磁波	204
§ 6.1 引言	204
§ 6.2 电磁波方程	204
§ 6.3 平面电磁波在无耗介质中的传播	206
§ 6.4 玻印廷矢量	208
§ 6.5 波的极化	213
§ 6.6 平面波在有损耗媒质中的传播	218
§ 6.7 平面波在等离子体中的传播	224
§ 6.8 平面波在旋磁媒质中的传播	229
§ 6.9 均匀平面电磁波的垂直入射	233
§ 6.10 多层介质中波的反射与折射	240
§ 6.11 斜入射平面波的反射与折射	243
习 题	253
第七章 规则波导和空腔谐振器	258
§ 7.1 电磁导波与波导	258
§ 7.2 均匀波导中波的一般特性	258
§ 7.3 矩形波导	261
§ 7.4 TE_{10} 波	270
§ 7.5 圆柱形波导	277

§ 7.6 介质波导	284
§ 7.7 空腔谐振器概说	286
§ 7.8 圆柱形空腔谐振器	287
习 题	295
第八章 电磁波的辐射	298
§ 8.1 辐射的基本概念	298
§ 8.2 滞后位	300
§ 8.3 电偶极子	302
§ 8.4 磁偶极子的辐射	306
§ 8.5 二重性原理	308
§ 8.6 裂缝元的辐射	310
§ 8.7 半波振子	312
§ 8.8 互易定理	314
习 题	316
附 录	318
附录一 公式 $\phi_m = -\frac{I}{4\pi}\Omega + C$ 的推导	318
附录二 有限差分法程序清单	321
附录三 国际单位制 (SI Unit)	322
参考文献	326
习题答案	327

第一章 矢 量 和 场

这一门课程中,我们几乎从头至尾和场打交道,例如位场、时变电磁场等,实际上,人们周围的空间也确实存在着各种各样的场,自由落体现象和重力场有关,室内和室外、天空和地表不同的温度分布是一个温度场,等等。物理场中的每一点都有一个确定的物理量与之对应,例如温度场就由温度 T 描述, T 只是代表温度高低的量,是一个实数,称为标量。还有一种物理量,如描述电磁场的电场强度,不仅需要知道它的数值大小,还要知道它的方向,才能完全确定它,这样的物理量称为矢量,本书所研究的是自由矢量,即矢量的起始点可自由移动的矢量。更一般和复杂的物理量是张量,我们暂且不在这里讨论。一般书写运算时,常用带箭头的斜体字母,如 $\vec{A}$ 表示矢量,在教科书等出版物中,则以斜黑体字母如 $\mathbf{A}$ 表示,本书文字部分采用后一种表示法,但在插图中,为方便起见,仍以前一种方法表示。

§ 1.1 矢 量

矢量有别于标量,矢量代数也有别于标量代数。矢量代数的运算规则有一些是和标量代数类似的,有一些是不同的,甚至于对初学者来说是新奇的。例如,两个矢量的乘积,其结果全然不同于两个标量的乘积,因此,读者要时常留心,以免和标量代数运算发生混淆。

一、矢量加法

矢量加法是矢量的几何和,两个矢量的几何和服从平行四边形规则,如图1-1(a)所示。由此也可以定义矢量:满足加法的平行四边形规则的有向线段的量称为矢量,矢量加法也可用矢量三角形表示(图1-1(b)),矢量 $\vec{A}$ 的头和矢量 $\vec{B}$ 的尾相接,得矢量 $\vec{C}$ 。同样 $\vec{C}$ 也是由矢量 $\vec{B}$ 的头和矢量 $\vec{A}$ 的尾相接而得。

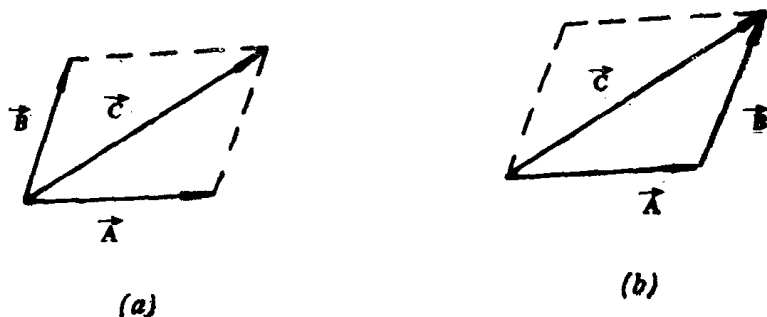


图 1-1 矢量相加

由图1-1可得出:矢量相加和矢量排列的次序无关,即矢量加法服从交换律。

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1.1)$$

矢量相加时,各项矢量可以有不同的组合方式,也就是说,矢量加法服从结合律。

$$\begin{aligned}
 A + B + C + D &= (A + B) + (C + D) \\
 &= A + (B + C) + D
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

该性质的几何表示如图 1-2 所示。

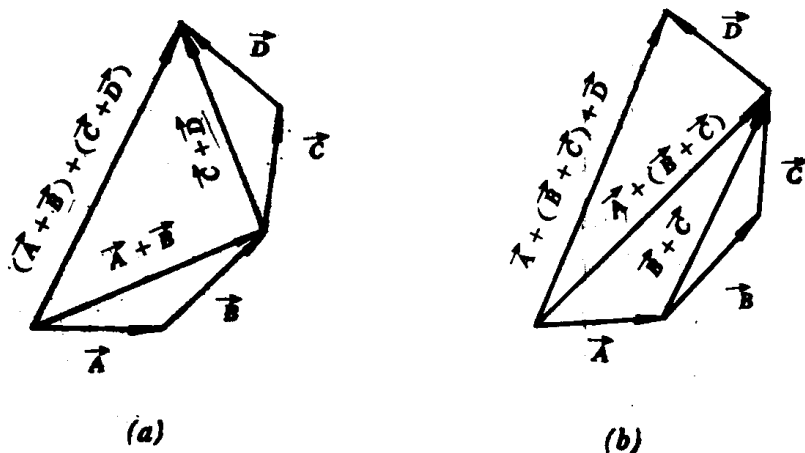


图 1-2 多个矢量相加

矢量减法可视为矢量加法的特例，即

$$A - B = A + (-B) \tag{1.3}$$

通常 $(-B)$ 称为矢量 B 的逆矢量，它的大小和矢量 B 一样，但指向相反，如图 1-3 所示。

由矢量加减法运算规则和几何表示，可知 $D = A + B + C = 0$ 的条件为三个矢量 A 、 B 和 C 头尾相连组成封闭三角形，如图 1-4 所示，请读者注意图 1-4 和 1-1b 的差别。

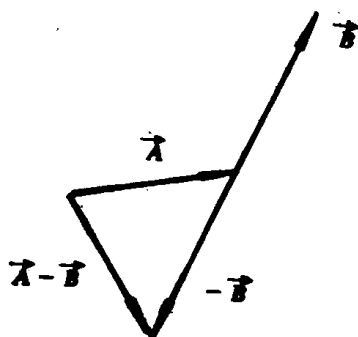


图 1-3 矢量相减

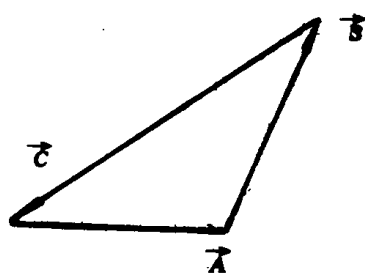


图 1-4 合矢量为零的几何表示

同理可推断，若多个矢量组成封闭多边形，其矢量和必为零。封闭三角形或封闭多边形是静力学中力的平衡条件。

二、矢量和标量的乘法

矢量 A 和标量 k ($k \neq 0$) 相乘得 kA ，仍为一矢量，该矢量的模变为矢量 A 模的 k 倍，而方向不变，标量 k 可以是大于 1 或小于 1 的数。进一步，标量 k 也可负，只是此时矢量 kA 将与矢量 A 反向。矢量 A 被某一标量 k 相除，相当于矢量 A 和标量 $1/k$ 相乘。矢量和

标量的相乘也满足结合律和分配律。

$$\begin{aligned}(m+n)(A+B) &= m(A+B) + n(A+B) \\ &= mA + mB + nA + nB\end{aligned}\quad (1.4)$$

式中 m 和 n 为标量。

矢量和矢量的乘法将在下一节讨论，至于矢量与矢量的除法，迄今还无合适的算法和物理意义。

三、单位矢量和矢量分量

所谓单位矢量是模等于 1 的矢量，单位矢量可以确定矢量的方向，任何矢量 A 可以用该矢量的模 $|A|$ 和它的单位矢量 a 的乘积表示，即

$$A = |A|a \quad (1.5)$$

根据式(1.5)也可得到

$$a = A/|A| \quad (1.6)$$

矢量加法是几个矢量的合成问题，反过来，一个矢量也可以分解为几个分矢量。

设
$$A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$$

式中 i_1 , i_2 及 i_3 分别为任意选定的不在同一平面的三个参考方向上的单位矢量；则 $A_1 i_1$ 、 $A_2 i_2$ 和 $A_3 i_3$ 分别为矢量 A 在这三个参考方向上的分矢量。为方便起见，一般选取的三个参考方向是互相正交的，如人们最为熟悉的直角坐标系。在直角坐标系中， x 、 y 和 z 轴的三个方向符合右螺旋法则，相应地，三个方向上的单位矢量也可以 a_x 、 a_y 和 a_z 表示，而各分量的模 A_x 、 A_y 和 A_z ，是矢量 A 分别在 x 、 y 和 z 轴方向上的投影，如图 1-5 所示。

设有三个矢量 A 、 B 和 C

$$A = A_1 a_x + A_2 a_y + A_3 a_z$$

$$B = B_1 a_x + B_2 a_y + B_3 a_z$$

$$C = C_1 a_x + C_2 a_y + C_3 a_z$$

则三个矢量相加为

$$\begin{aligned}A+B+C &= (A_1+B_1+C_1)a_x \\ &\quad + (A_2+B_2+C_2)a_y \\ &\quad + (A_3+B_3+C_3)a_z\end{aligned}\quad (1.7)$$

读者还可根据式(1.7)自己写出矢量相减的分量表达式。

在直角坐标系中矢量 A 的模为

$$|A| = |A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z|$$

或
$$|A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

于是，根据式(1.6)和(1.8)可得单位矢量 a 为

$$a = \frac{A}{|A|} = \frac{A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \quad (1.9a)$$

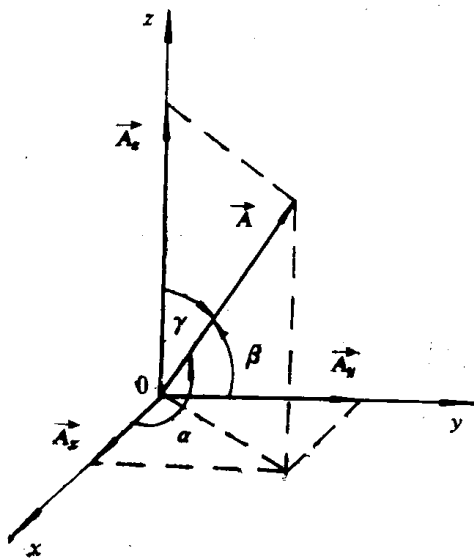


图 1-5 直角坐标中的矢量

或

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = & \frac{A_x}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \boldsymbol{a}_x + \frac{A_y}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \boldsymbol{a}_y \\ & + \frac{A_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \boldsymbol{a}_z \end{aligned} \quad (1.9b)$$

由图 1-5 可知

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{A_x}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \\ \cos \beta &= \frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{A_y}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \\ \cos \gamma &= \frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{A_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

式中 α 、 β 、 γ 分别为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向角； $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦。

由式(1.9)和(1.10)可知，直角坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{a}$ 的关系式为

$$\boldsymbol{a} = \cos \alpha \boldsymbol{a}_x + \cos \beta \boldsymbol{a}_y + \cos \gamma \boldsymbol{a}_z \quad (1.11a)$$

以及

$$|\boldsymbol{a}| = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)^{1/2} = 1 \quad (1.11b)$$

由式(1.7)至(1.11)，读者会认识到，选取合适的坐标系，把矢量分解成在该坐标系所规定的方向上的分量，可以使运算方便，这也是人们常选用直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系的缘故。但是需要提醒的是，矢量的定义和运算并不一定需要参考坐标系，换句话说，矢量本身不因坐标系的不同而变化。

【例 1-1】 已知矢量 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_x + 4\boldsymbol{a}_y - 5\boldsymbol{a}_z$
 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z$

求与合成矢量 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 平行的单位矢量。

解 设合成矢量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \\ &= (2\boldsymbol{a}_x + 4\boldsymbol{a}_y - 5\boldsymbol{a}_z) + (\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z) \\ &= 3\boldsymbol{a}_x + 6\boldsymbol{a}_y - 2\boldsymbol{a}_z \\ |\boldsymbol{C}| &= |3\boldsymbol{a}_x + 6\boldsymbol{a}_y - 2\boldsymbol{a}_z| \\ &= \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7 \end{aligned}$$

所以该合成矢量的单位矢量为

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|} &= \frac{3\boldsymbol{a}_x + 6\boldsymbol{a}_y - 2\boldsymbol{a}_z}{7} \\ &= \frac{3}{7} \boldsymbol{a}_x + \frac{6}{7} \boldsymbol{a}_y - \frac{2}{7} \boldsymbol{a}_z \end{aligned}$$

【例 1-2】 设 $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}_x + 3\boldsymbol{a}_y - 2\boldsymbol{a}_z$, $\boldsymbol{r}_3 = -2\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 3\boldsymbol{a}_z$, $\boldsymbol{r}_4 = 3\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y + 5\boldsymbol{a}_z$

求: $\boldsymbol{r}_4 = a\boldsymbol{r}_1 + b\boldsymbol{r}_2 + c\boldsymbol{r}_3$ 中的标量 a , b 和 c 。

解 依题意有

$$\begin{aligned} 3a_x + 2a_y + 5a_z &= a(2a_x - a_y + a_z) + b(a_x + 3a_y - 2a_z) + c(-2a_x + a_y - 3a_z) \\ &= (2a + b - 2c)a_x + (-a + 3b + c)a_y + (a - 2b - 3c)a_z \end{aligned}$$

$$\text{故有} \quad 2a + b - 2c = 3 \quad (1)$$

$$-a + 3b + c = 2 \quad (2)$$

$$a - 2b - 3c = 5 \quad (3)$$

联立解(1),(2)和(3)得: $a = -2, b = 1, c = -3$, 即 $r_4 = -2r_1 + r_2 - 3r_3$

讨论: 矢量 r_4 与 r_1, r_2, r_3 线性相关, 换句话说, r_1, r_2, r_3, r_4 构成一个线性相关组, 另一方面, 这些矢量中的任何三个(或少于三个)矢量是线性无关的。

一般而言, 如果能找到一组不全为零的标量 $a, b, c, \dots$, 使得 $aA + bB + cC + \dots = 0$, 便称矢量 $A, B, C, \dots$ 是线性相关的。

§ 1.2 矢 量 乘 积

上一节中, 只涉及矢量和标量的乘积, 而值得深入讨论的是矢量积, 但这样笼统地说还不够, 因为两个矢量相乘可以是一个标量, 也可以是一个矢量, 这完全取决于对乘积的定义。具体地说, 矢量乘法包括标量积和矢量积两种含义不同的乘积。

一、标量积

两矢量的标量积亦称点积, 定义为

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \quad (1.12)$$

θ 为两矢量的夹角(图 1-6)。

由式(1.12)可知, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 标量积变为零, 因此, 两非零矢量 A 和 B 的正交条件为

$$A \cdot B = 0 \quad (1.13)$$

由式(1.12)得出结论, 标量乘积满足乘法交换律, 即:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.14)$$

另外

$$A \cdot A = |A|^2 \quad (1.15)$$

上式说明一矢量本身的标量积等于其模的平方。

在直角坐标系中, a_x, a_y 和 a_z 三个单位矢量互相正交, 根据标量积定义得

$$a_x \cdot a_x = 1 \quad a_y \cdot a_y = 1 \quad a_z \cdot a_z = 1 \quad (1.16a)$$

$$a_x \cdot a_y = 0 \quad a_y \cdot a_z = 0 \quad a_z \cdot a_x = 0 \quad (1.16b)$$

于是在直角坐标系中, 两矢量的标量积可表示为

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \cdot (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.17)$$

说明两矢量标量积等于其对应的分量的乘积之和。

标量积也服从分配律, 即

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (1.18)$$

请读者注意下面的不等式:

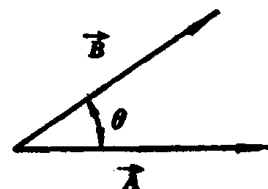


图 1-6 标量积

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (1.19)$$

显然, 式(1.19)等号左边的矢量平行于 $\mathbf{C}$, 而右边的平行于 $\mathbf{A}$ 。此外, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ 的乘法形式是无意义的。

电场力做功是标量积应用的一个实例。

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

式中 $\mathbf{F}$ 为力, $\mathbf{l}$ 为位移, 该式属于曲线积分的问题。

标量积应用的另一个实例是求电通量或磁通量, 例如

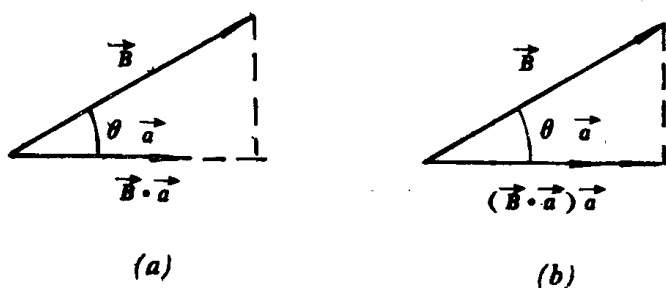
$$\psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 $\mathbf{B}$ 为磁通量密度, $d\mathbf{S}$ 为曲面面积元, 该式属于曲面积分问题, 留在后面讨论。

标量积很重要的一个应用是求解矢量在给定方向上的分量。如图 1-7(a) 所示, 设给定方向的单位矢量为 $\mathbf{a}$, 则矢量 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的分量或投影为

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta = |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1.20)$$

而矢量 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的分矢量为 $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$, 如图 1-7(b) 所示。



矢量 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向的投影

矢量 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向的分矢量

图 1-7

二、矢量积

两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积仍是矢量, 以 $\mathbf{C}$ 代表, 矢量积也称叉积, 其数学表达式为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \mathbf{a}_e \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.21)$$

式中 θ 为矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角; $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ 为矢量积 $\mathbf{C}$ 的模; $\mathbf{a}_e$ 为单位矢量, 且垂直于矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 构成的平面, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 三者符合右手螺旋法则, 如图 1-8 所示。

根据式(1.21)的矢量积定义和右手螺旋法则, 可以看出

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.22)$$

说明矢量积不服从交换律, 但服从分配律, 即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.23)$$

显而易见, 矢量积不服从结合律, 即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.24)$$

式(1.24)的形式称为矢量三重积, 等号左边三重积的矢

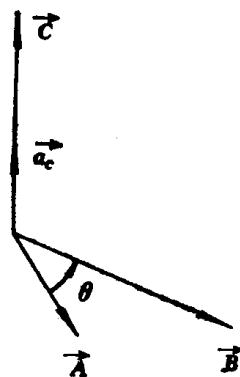


图 1-8 矢量积

量和矢量 A 垂直, 并且位于矢量 B 和 C 构成的平面内; 而右边三重积的矢量和矢量 C 垂直, 且位于矢量 A 和 B 构成的平面内, 可见左右两边的结果不一样, 式中括号不是可有可无的, 括号代表优先进行矢量运算的部分, 由式(1.21)可以得到非零矢量 A 和 B 平行的条件为

$$A \times B = 0 \quad (1.25)$$

其特例是 $A \times A = 0$

对于直角坐标系来说, 单位矢量可由式(1.21)得到

$$a_x \times a_x = 0 \quad a_y \times a_y = 0 \quad a_z \times a_z = 0 \quad (1.26a)$$

$$a_x \times a_y = a_z \quad a_y \times a_z = a_x \quad a_z \times a_x = a_y \quad (1.26b)$$

于是矢量积在直角坐标系中可表示为:

$$A \times B = (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \times (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z)$$

利用式(1.26)最后得到

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z \quad (1.27a)$$

若用行列式表示, 也许更便于读者记忆, 对直角坐标系

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.27b)$$

矢量积的例子很多, 如力学中的力矩 $T = R \times F$, 式中 R 为力臂, F 为作用力, 见图 1-9。

又如质点作旋转运动的线速度。

$$v = \omega \times R$$

式中 ω 为质点的角速度, R 为矢径, 见图 1-10。

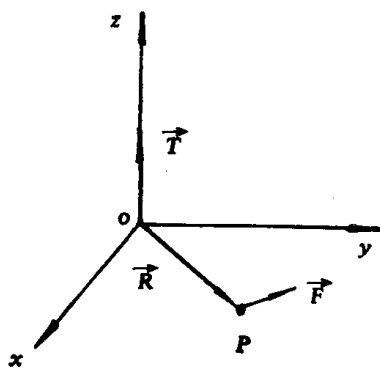


图 1-9 力矩的矢量表示

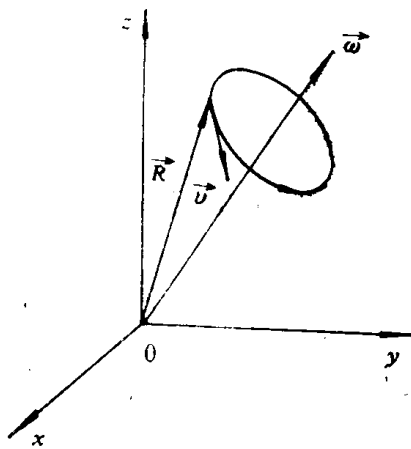


图 1-10 线速度的矢量表示

电磁学中磁场作用在载流导体上的力

$$F = \int I d\mathbf{l} \times B$$

式中 $I d\mathbf{l}$ 为电流线元, B 为磁感应强度。矢量积在几何学中的应用, 是求平行四边形面积, 式(1.21)中, A 和 B 可视为平行四边形的相邻两个边, θ 为夹角, 则平行四边形的面积为

$$|C| = |A \times B| = |A| |B| \sin \theta$$

三、三重积

三个矢量 A 、 B 和 C 相乘, 可以有 $(A \cdot B)C$ 、 $A \cdot (B \times C)$ 和 $A \times (B \times C)$ 三种形式, 我们已知道:

$$(A \cdot B)C \neq A(B \cdot C)$$

和

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

这里作进一步的讨论, $A \cdot (B \times C)$ 称为标量三重积, $A \cdot (B \times C)$ 也可以写成 $A \cdot B \times C$, 此处括号是无关紧要的, 因为矢量运算规定先算矢量积而后算标量积, 所以三重标量积是一个标量。

由图 1-11 可以看出, 矢量 A 、 B 和 C 构成一平行六面体, $B \times C$ 组成一平行四边形, 为平行六面体的底面, 其底面积为 $|B \times C| = |B||C|\sin\theta_1$, 平行六面体的高为 $|A|\cos\theta_2$, 它是矢量 A 在 $B \times C$ 上的投影, 所以三重标量积的大小等于该平行六面体的体积。

$$V = A \cdot B \times C = |A||B||C|\sin\theta_1\cos\theta_2$$

不难看出, 平行六面体体积也可由 $B \cdot (C \times A)$ 或 $C \cdot (A \times B)$ 表示, 即

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1.28)$$

也就是说, 若按 $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A)$ 次序循环改变时, 标量三重积的值不变, 这种代换称为轮换法。

在直角坐标系中, 标量三重积也可以用行列式表示为

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \cdot (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

根据行列式的规则, 用轮换法变换行的位置, 行列式不变, 式(1.29)和式(1.28)是一致的。

若 A 、 B 和 C 三矢量位于同一平面, 意味着平行六面体的体积为零, 即

$$A \cdot (B \times C) = 0 \quad (1.30 a)$$

$$\text{或} \quad \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1.30 b)$$

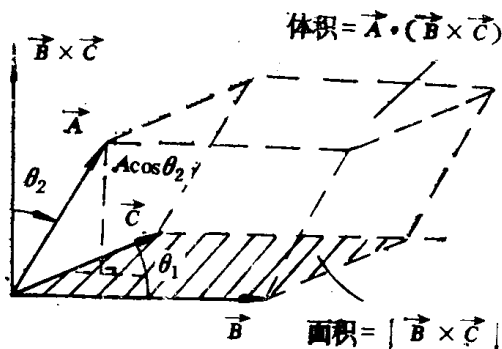


图 1-11 标量三重积

式(1.30)为三个线性无关的非零矢量共面的条件。

$A \times (B \times C)$ 称为矢量三重积, 记作 $D = A \times (B \times C)$, 它仍是一个矢量, 三重矢量积中的括号是必不可少的, 括号部分需先进行运算。矢量 D 垂直于矢量 A 和矢量 $(B \times C)$, 因此 D 位于由 B 和 C 组成的平面内, 于是矢量 D 一定可以用与矢量 B 和 C 成比例的两个矢量之

和来表示, 下列关系式反映了这一点。

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.31)$$

将矢量在直角坐标系中展开, 可证实式(1.31)的正确性, 当然不借助于任何坐标系, 进行严格的证明也是能做到的, 感兴趣的读者可参阅有关参考书*。

【例 1-3】 确定垂直于 $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ 和 $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ 所在平面的单位矢量。

解法 1 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 是垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所在平面的矢量。有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z$$

于是垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所在平面的单位矢量是

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{15\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{a}_x - \frac{2}{7}\mathbf{a}_y + \frac{6}{7}\mathbf{a}_z$$

另一个方向相反的单位矢量是 $(-3\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z)/7$ 。

解法 2 令矢量 $\mathbf{C} = C_1\mathbf{a}_x + C_2\mathbf{a}_y + C_3\mathbf{a}_z$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所在平面, 那么 $\mathbf{C}$ 既与 $\mathbf{A}$ 垂直, 也与 $\mathbf{B}$ 垂直, 因此

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = 2C_1 - 6C_2 - 3C_3 = 0$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = 4C_1 + 3C_2 - C_3 = 0$$

即

$$2C_1 - 6C_2 = 3C_3 \quad (1)$$

$$4C_1 + 3C_2 = C_3 \quad (2)$$

联立(1)和(2)解得:

$$C_1 = \frac{1}{2}C_3, \quad C_2 = -\frac{1}{3}C_3$$

故

$$\mathbf{C} = C_3 \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}_x - \frac{1}{3}\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \right)$$

则 $\mathbf{C}$ 的单位矢量是:

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{C_3 \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}_x - \frac{1}{3}\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \right)}{\sqrt{C_3^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 1^2 \right]}} = (3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z)/7$$

另一个单位矢量是

$$-\mathbf{a}_c = -\frac{1}{7}(3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z)$$

【例 1-4】 设 $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{a}_x + y_3\mathbf{a}_y + z_3\mathbf{a}_z$ 是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 和 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 三点的位置矢量, 求通过点 P_1 , P_2 , P_3 的平面方程, 见图 1-12 所示。

* David K. Cheng Field and Wave Electromagnetics Addison-Wesley Publishing Company PP17-18, 1983

解 假定 P_1, P_2, P_3 不在同一直线上, 因此它们决定一平面。

令 $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ 表示平面内任意一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量, 考虑矢量

$$\overline{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \overline{P_1P_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad \text{和} \quad \overline{P_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1,$$

它们都在同一平面内, 根据三矢量共面的条件, 有

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = 0$$

即 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$

于是所求平面方程为:

$$\begin{aligned} & [(x-x_1)\mathbf{a}_x + (y-y_1)\mathbf{a}_y + (z-z_1)\mathbf{a}_z] \\ & \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \\ & \times [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \\ & = 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

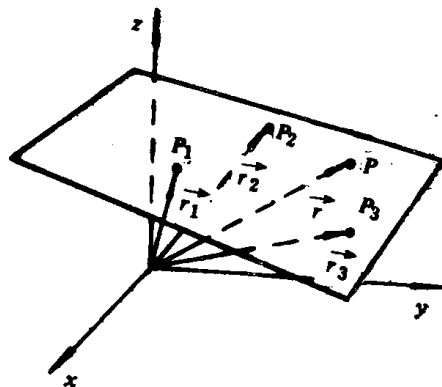


图 1-12 例 1-4 图

§ 1.3 正交坐标系

一、正交曲线坐标系

在场论的基本概念中, 一些矢量如电位梯度等, 有完全确定的物理意义, 无需引入坐标系, 但在求解具体物理问题时, 却常常需要引入坐标系, 也许大家最熟悉的是笛卡尔坐标系, 即直角坐标系, 另外两个常用的坐标系是圆柱坐标系和球坐标系。它们都是所谓广义正交曲线坐标系的特例, 在广义正交坐标系中, 坐标变量用 u_1, u_2 和 u_3 表示, 相应地, 空间一点 P 的坐标为 $P(u_1, u_2, u_3)$, 它是 $u_1 = c_1, u_2 = c_2$ 和 $u_3 = c_3$ 三个常数的曲面的交点。曲面间互相正交, 两曲面间的交线称为坐标曲线。如图 1-13 所示。

正交曲线坐标系中, 单位矢量分别为 $\mathbf{a}_{u_1}, \mathbf{a}_{u_2}, \mathbf{a}_{u_3}$, 三者互相正交, 它们分别为坐标曲线的切线, 如图 1-14 所示, $\mathbf{a}_{u_1}, \mathbf{a}_{u_2}, \mathbf{a}_{u_3}$ 也称为基矢量。

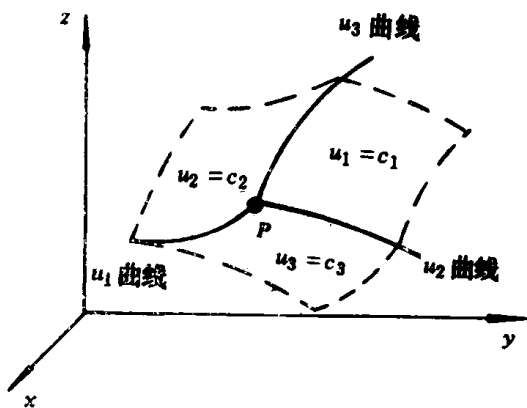


图 1-13 正交曲线坐标系

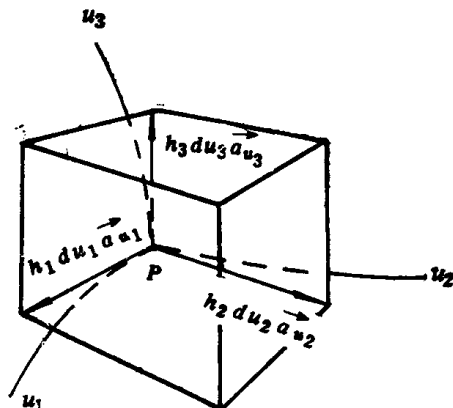


图 1-14 正交曲线坐标单位矢量

根据右手螺旋法则, 正交曲线坐标系的单位矢量 $\mathbf{a}_{u_1}$ 、 $\mathbf{a}_{u_2}$ 和 $\mathbf{a}_{u_3}$ 也满足下列关系

$$\mathbf{a}_{u_1} \cdot \mathbf{a}_{u_2} = \mathbf{a}_{u_1} \cdot \mathbf{a}_{u_3} = \mathbf{a}_{u_2} \cdot \mathbf{a}_{u_3} = 0 \quad (1.32a)$$

$$\mathbf{a}_{u_1} \cdot \mathbf{a}_{u_1} = \mathbf{a}_{u_2} \cdot \mathbf{a}_{u_2} = \mathbf{a}_{u_3} \cdot \mathbf{a}_{u_3} = 1 \quad (1.32b)$$

以及

$$\mathbf{a}_{u_1} \times \mathbf{a}_{u_2} = 0, \mathbf{a}_{u_2} \times \mathbf{a}_{u_3} = 0, \mathbf{a}_{u_3} \times \mathbf{a}_{u_1} = 0 \quad (1.33a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{u_1} \times \mathbf{a}_{u_2} &= \mathbf{a}_{u_3}, \mathbf{a}_{u_2} \times \mathbf{a}_{u_3} = \mathbf{a}_{u_1} \\ \mathbf{a}_{u_3} \times \mathbf{a}_{u_1} &= \mathbf{a}_{u_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.33b)$$

读者会注意到式(1.16)和式(1.26)分别为式(1.32)和式(1.33)的特例。

同样, 矢量 $\mathbf{A}$ 在正交曲线坐标系中可表示为

$$\mathbf{A} = A_{u_1} \mathbf{a}_{u_1} + A_{u_2} \mathbf{a}_{u_2} + A_{u_3} \mathbf{a}_{u_3} \quad (1.34)$$

式中 A_{u_1} 、 A_{u_2} 和 A_{u_3} 为矢量 $\mathbf{A}$ 分别在三个正交方向上的分量, 矢量 $\mathbf{A}$ 的模为

$$|\mathbf{A}| = (A_{u_1}^2 + A_{u_2}^2 + A_{u_3}^2)^{1/2} \quad (1.35)$$

二、线元、面元、体元

矢量积分时, 常常要进行曲线积分、曲面积分和体积分, 相应地, 在积分中出现微分弧长、微分面积和微分体积, 它们分别称为线元、面元和体元。

在广义正交曲线坐标系中, 坐标变量 u_1 、 u_2 和 u_3 的度量不一定是长度。例如, 圆柱坐标系中的 φ 、球坐标系中的 θ 和 φ 就不是长度而是角度(或弧度), 线元和坐标变量微分 du_1 、 du_2 和 du_3 的转换关系为

$$dl_1 = h_1 du_1, \quad dl_2 = h_2 du_2, \quad dl_3 = h_3 du_3 \quad (1.36)$$

如图 1-14 所示, h_1 、 h_2 和 h_3 称为拉梅系数。

一任意矢量线元可表示为

$$d\mathbf{l} = dl_1 \mathbf{a}_{u_1} + dl_2 \mathbf{a}_{u_2} + dl_3 \mathbf{a}_{u_3} \quad (1.37a)$$

或

$$d\mathbf{l} = (h_1 du_1) \mathbf{a}_{u_1} + (h_2 du_2) \mathbf{a}_{u_2} + (h_3 du_3) \mathbf{a}_{u_3} \quad (1.37b)$$

式中 $\mathbf{a}_{u_1}$ 、 $\mathbf{a}_{u_2}$ 和 $\mathbf{a}_{u_3}$ 为广义正交曲线坐标系的单位矢量。除直角坐标系外, 其它坐标系的单位矢量 $\mathbf{a}_u$ 不是常矢量。

由式(1.36)定义的线元组成的体积元为标量

$$d\tau = dl_1 dl_2 dl_3 \quad (1.38a)$$

或

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.38b)$$

流量或通量的计算涉及到微分面元。一空间曲面的矢量面元可表示为

$$d\mathbf{s} = ds \mathbf{a}_n \quad (1.39)$$

式中 ds 是微分面积, $\mathbf{a}_n$ 为该面元的单位法向矢量。在广义正交曲线坐标系中, 单位矢量 $\mathbf{a}_{u_1}$ 对应的微分面元为

$$d\mathbf{s}_1 = (dl_2 dl_3) \mathbf{a}_{u_1} \quad (1.40a)$$

或

$$d\mathbf{s}_1 = (h_2 h_3 du_2 du_3) \mathbf{a}_{u_1} \quad (1.40b)$$

同理, 可得到分别和单位矢量 $\mathbf{a}_{u_2}$ 、 $\mathbf{a}_{u_3}$ 对应的面元为

$$d\mathbf{s}_2 = (h_1 h_3 du_1 du_3) \mathbf{a}_{u_2} \quad (1.40c)$$

$$d\mathbf{s}_3 = (h_1 h_2 du_1 du_2) \mathbf{a}_{u_3} \quad (1.40d)$$

以上为广义坐标系的表达式, 下面给出三种常用的正交坐标系的表达式。

直角坐标系