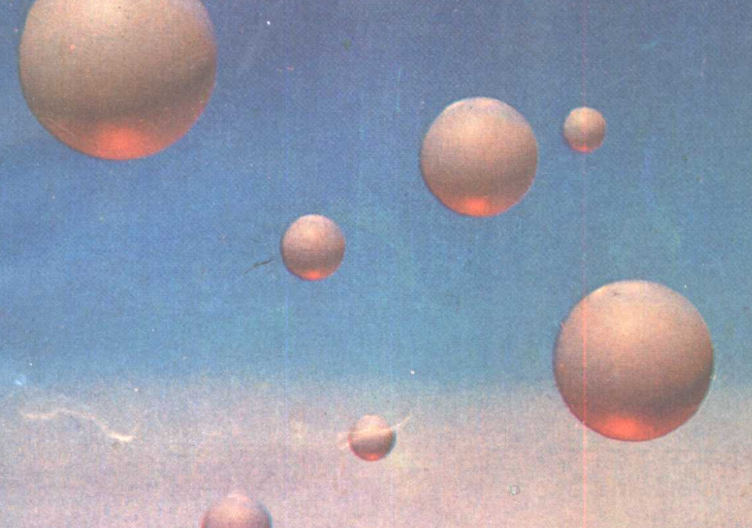
数学灵感何处来

江苏科学技术出版社



本

数学灵感何处来

朱成杰　编著

数学灵感何处来

出版、发行：江苏科学技术出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：淮阴新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 3.75　字数 80,000
1988 年 7 月第 1 版　1988 年 7 月第 1 次印刷
印数 1－5,000 册

ISBN 7—5345—0387—6

O·30　定价：1.25 元
责任编辑　高楚明

前　言

学数学的人常有这样的体会：一个难题百思不得其解，不知什么原因，一个好念头忽然蹦了出来，于是思路被接通，难题迎刃而解。这个“好念头”就是所谓“灵感”。自古以来有多少数学家，正是由于灵感的突然光顾，创造了全新的理论、全新的公式和全新的定理，一举登上事业的高峰。正如著名科学家钱学森所说：“光靠形象思维和抽象思维不能创造，不能突破；要创造要突破得有灵感。”

千百年来，灵感如同幽灵一样，飘忽不定，难以捕捉。她虽然具有迷人的魅力，但终因其神秘的外衣，人们难识其庐山真面目。其实，灵感如同其他一切人们虽已有所接触但尚未认识的事物一样，只要认真探索，还是有踪迹可寻的。笔者根据自己多年研读数学史、数学家传记的心得体会，以及对数学发明创造规律和数学教学规律的求索，写成这本小书，努力从心理学、方法论诸角度探寻数学灵感究竟是什么？她在何种条件下易于被激发出来？试图拨开罩在灵感上面的神秘面纱，还其本来面目。书中例题尽量选自中外名题，同时述说著名数学家的成功经验和失败教训，力图溶趣味性、知识性、启发性于一体，期望收到学习方法、启迪智慧、增强思维的效果，为广大青年学生和知识青年学好数学助一臂之力。

书中各篇的先后顺序，笔者虽然作了一番考虑，但并不是很严格的。读者完全可以根据自己的兴趣爱好，从中挑选若干篇先阅读，然后再读其余部分。只要具有中等文化程度就可读懂全书。限于作者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

一、插上想象的翅膀

大诗人李白用“蜀道之难，难于上青天”形容蜀道之艰难；用“飞流直下三千尺，疑是银河落九天”描绘遥看瀑布的情景。人们无不为诗人丰富而奇特的想象所折服。其实，不只是文学家需要想象，数学家也同样需要想象，甚至更加需要。德国大数学家希尔伯特曾经对人这样说起自己的一个蹩脚学生：“他已当诗人去了。对于数学来说，他太缺乏想象力了。”让我们具体地看两个数学例题。

下面这道题目也许曾在好几个世纪里引起过人们的兴趣。

〔例 1〕 一个农民有若干鸡和兔子，它们共有50个头和140只脚，问鸡和兔子各有多少？

这个题目不算太难，用试探的方法或解二元一次方程组的方法都能得到答案(读者不妨自己试一下)。下面介绍另一个巧妙的解法。

想象鸡兔们正在进行非凡的杂技表演：每只鸡都用一只脚站着，而每只兔子都用后腿站起来。在这种惊人的情况下，总脚数只出现了一半，即70只脚。在70这个数里，鸡的头数只数了一次，而兔子的头数却数了两次，从70里减去总的头数50，剩下来的就是兔子的头数 $70-50=20$。兔子20只，当然鸡就是30只。

好家伙，不用列算式，只用心算就得到了答案。这完全是想象的功劳！借助于鸡兔作杂技表演这一想象，原来比较复

杂的问题就被转化为一个非常简单容易的问题了。

下面再举一个几何例子。

［例 2］ 试证明一个周长为 $2l$ 的封闭曲线一定可以被一个直径是 l 的圆盖住。

这个问题很难，因为周长为 $2l$ 的封闭曲线可以取任意形状，一下子简直不知从何着手。但是，既然问题中的封闭折线没有规定是什么形状，我们何不先从特殊情况试试。假定曲线形状是正方形，这个情况容易证明，把一个直径是 l 的圆形纸片的圆心与正方形的中心 O 重合。要证明这个圆能盖住正方形，只要证得 A、B、C、D 四个顶点都被盖住即可。在图 1 中，

$$由\ OA=\frac{1}{2}AC<\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{l}{2}$$

可知，A 点确被圆纸片盖住。同理可证得 B、C、D 点均被盖住。因此，周长为 $2l$ 的正方形可以被一个直径是 l 的圆盖住。

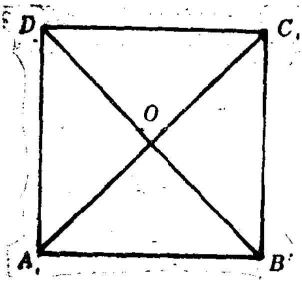


图 1

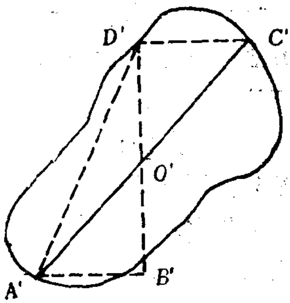


图 2

对于任意形状的曲线P如何证明呢？不妨把这个曲线P想象成是由正方形 $ABCD$ 扭曲而成（见图 2）。既然曲线P是

由正方形变形所得，两者之间必有内在联系，因此可尝试将正方形时用过的方法移植到任意曲线上。对角线 AC 把正方形 $ABCD$ 的周长分为相等的两部分，曲线 P 上也可找到 A'、C' 两点，把曲线 P 的周长分成相等的两部分。O 是 AC 的中点，也取 $A'C'$ 的中点 O'。同样把圆纸片的中心放在 O' 点。设 D' 点是曲线 P 上任意一点，若延长 $D'O'$ 到 B' 点，使 $O'B'=O'D'$，则可得到一个平行四边形，可以证得 $2O'D'\leqslant A'D'+C'D'$，于是有

$$O'D'\leqslant\frac{1}{2}(A'D'+C'D')<\frac{1}{2}A'D'C'\text{的曲线弧长}=\frac{l}{2}.$$

因此 D' 点能被圆盖住。这就证得整个曲线 P 都能被圆盖住。

根据心理学家和生理学家的研究，人的大脑有四个功能部位：感受区，从外部世界接受感觉；贮存区，收集整理和贮存接受到的感觉；判断区，评价收到的信息；想象区，按照新的方式把旧的信息结合起来。人脑不仅能感知眼前的事物，回忆起过去经历过的事物，而且还能在过去认识的基础上，去构成未来可能出现的事物的形象。这种能力称为想象力。想象力是智力活动的翅膀，是构成灵感的重要因素。

列宁曾高度评价想象在科学中的重要作用，他说："幻想是极其可贵的品质。""有人认为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不能发明微积分。"当我们想象在一个无限伸展的平面上，过直线外一点只有一条平行线时，就得到了欧几里得几何学；而当罗巴切夫斯基、黎曼等人想象到在平面上，过直线外一点可以引两条以上平行线或者根本没有平行线时，就创造了非欧几何。在欧几里得几何里，任意

一个三角形的三内角之和都等于180°.但是在非欧几何里，三角形的三内角之和则可以大于180°，也可以小于180°. 例如从地球的同一条纬线上相隔一段距离的任意两点出发，朝同一方向作两条与纬线垂直的经线，它们总会在地球的某一极（南极或北极）相交，构成一个球面三角形。这个三角形的三内角之和就大于180°. 爱因斯坦说得非常对，“想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识进化的源泉。”

丰富的想象能力是从哪里来的？它既不可能从天下掉下来，也不是头脑中固有的，而是在学习和实践中逐步培养和锻炼出来的。例如给你一只空罐头盒，在五分钟内你能列举它有多少种用途？空罐头盒可以做香烟缸、墨水瓶、茶杯、饭碗、玩具汽车的轮子、小鼓、垫块；剪成铁皮后，可以做刀片、垫板、夹子、加盐酸置换出氢气等等。经常进行这样的训练就能发展你的想象力。有些人在学习理论研究问题时，喜欢把抽象的概念构思成一定的形象，然后进行逻辑思维。这也是发展想象力的好经验。许多科学家除了精通本专业外，还对自然界的各种事物和其他学科有浓厚的兴趣，勤学博览，这对于扩大知识面，不断接受各种新的信息，获得新的启发，从而丰富和增强自己的想象力都是非常有益的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

二、数学离不开猜想

1976年，发生了一件震惊世界数学界的大事。三位美国数学家利用三台百万次的电子计算机证明了四色猜想：任何平面上的地图，总可以把它的每一个国家用四种颜色中的一种来染色，并且使得任意两个相邻国家的颜色都不相同．有趣的是，这个结论早在一百多年前就知道了．当时一个名叫格色里的英国人发现，他碰到的所有地图，都可以只用四种颜色来染色．于是，他就根据经验归纳法作出了上面的“四色猜想”．由猜想导致数学发明的事实俯拾皆是．如哥德巴赫关于“任何一个大偶数都可表示成两个质数之和”的猜想，“所有等周长的平面图形中，以圆的面积为最大”的猜想等等．数学通常被人们看作一门论证科学，似乎定理加证明就构成了它的全部内容．殊不知这仅仅是它的一个方面．其实，数学的创造过程与其他任何知识的创造过程一样。在证明一个定理之前，你先得猜想这个定理的内容；在你作出详细证明之前，你先得猜想证明的思路．简言之，一切数学定理及其证明都离不开猜想．如果没有猜想，数学家将寸步难行；如果没有猜想，如今矗立在我们面前的这座雄伟瑰丽的数学宫殿就不复存在．猜想是数学家手中的一支金拐杖．

为了更好地理解猜想的作用，我们举一个初等几何例题．

在各边长度给定的一切四边形中，何时四边形具有最大面积？

因为四边形的各边长度给定，于是面积大小随四边形顶角大小而变化。为了得出一般结论，不妨先取一特殊情况。设四边长相等，则四边形为菱形或正方形，显然当四边形为正方形时面积最大。能否由此推测各顶角均为直角时，四边形面积最大？如设四边长为 a、b、c、d，考虑到当 a、b 夹角为直角时，则斜边为定长，而斜边与其余两边 c、d 不一定恰能构成直角。所以四边形有最大面积时，各顶角不一定都是直角。因此我们可以猜想：四边形对角互补时面积最大。这个猜想可以证明如下：

如图 3，四边形面积 S 为

$$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$$

$$=\frac{1}{2}\left(ab\sin\alpha+cd\sin\beta\right)$$

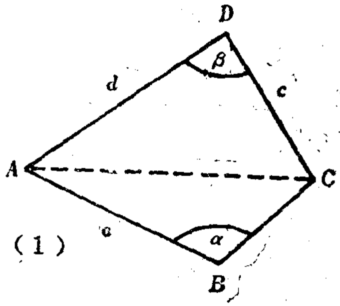


图 3

即 $ab\ \sin\alpha+cd\ \sin\beta=2S$ （1）

又 $AC^2=a^2+b^2-2ab\ \cos\alpha$

$AC^2=c^2+d^2-2cd\ \cos\beta$

两式相减得 $ab\ \cos\alpha-cd\ \cos\beta=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ （2）

把（1）、（2）分别平方、相加，经整理可得

$$S^2=\frac{1}{4}\left[a^2b^2+c^2d^2-2abcd\ \cos(\alpha+\beta)\right]-$$

$$-\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)。$$

上式仅当 $\cos(\alpha+\beta)$ 取最小值 -1，即 $\alpha+\beta=\pi$ 时，S 取最大值。因此我们得到了定理：在各边长度给定的一切四边

形中，当对角互补时面积最大。

数学猜想对数学发展的巨大推动，不仅由于由猜想得到的结论可以作为进一步研究的基础和出发点，而且还在于一个好的猜想往往证明非常困难，因而迫使数学家在探索其证明的过程中创造出新的方法。费尔马是一个业余数学家，他有这样一种习惯：把读书心得，以及发现的定理或证明，随便地写在书页的边上。他在《算术学》这本书的页边写道："任何整数的立方，不能分成两个整数的立方和；任何整数的四次方不能分成两个整数的四次方之和；或者一般地，任何整数的n次方，除平方外，都不能分成两个整数的n次方之和。我想出了一个绝妙的证明方法，但是，这页边太窄，不容我将证明写出来。"也就是说，费尔马猜想方程$x^n+y^n=z^n$，当$n>2$时，永远没有整数解。这个结论，从经验上看似乎不难证明。可是，当费尔马的儿子将这个结论发表之后，世界各国最著名的数学家都想重新给出它的证明方法，但是都没有成功。费尔马猜想成了数学史上一个非常著名的难题。后来，人们干脆称之为"费尔马大定理"。为了征得这个难题的解答，德国科学院和法国科学院不惜重金悬赏。但是，结果只是每年都收到大量错误证明的稿件（其中包括一些著名数学家的稿件）。在科学研究上的失败，绝不会是徒劳的。正是由于众多数学家前仆后继、不畏劳苦地寻求费尔马猜想的证明，其中一些数学家在"数论"方面创造了一系列新的理论和新的数学方法，从而大大推动了数学的发展。费尔马猜想可称得上是一只产金蛋的老母鸡。写到这里，笔者想起一个趣闻：当年大数学家希尔伯特称他已证明了费尔马大定理，然而他不肯发表，因为他舍不得杀掉这只产金蛋的老母鸡。这恐怕是人们编出的一则故事，但确实能

生动地说明数学猜想的作用。

素以严谨著称的数学，怎么会离不开猜想这种不严格的思维形式呢？对这个问题的认识得有点辩证法。对待数学和对待其他科学一样，不仅要会严格，而且要善于不严格。科学就是“严格”与“不严格”的对立统一。过于严格只能循规蹈矩地前进，而善于“不严格”却往往能得到出奇制胜的成功。当初，牛顿、莱布尼茨制定微积分时，也是很不严格的，含有相当的猜测成分。在以后大约两个世纪的漫长岁月中，经过波尔察诺、魏尔斯脱拉斯、柯西等人的巨大努力才奠定了理论基础。至今，数学理论中还有许多不严格的地方，还有许多基本问题尚未找到令人满意的答案。试问，如果不允许不严格的猜想存在，数学到底能走多远？！正是：“不依古法但横行，自有风雷绕膝生”。难怪科学家福克（B．A．Фок）说：“伟大的以及不仅是伟大的发现，都不是按逻辑的法则发现的，而都是由猜测得来；换句话说，大都是凭创造性的直觉得来的。”

三、分析与综合

数学离不开猜想，但是由猜想得到的结论不一定都正确，需要进一步从逻辑上加以论证。如何进行证明呢？分析法与综合法就是最常用的两种思维方法。

所谓分析法，就是“执果溯因”的方法，即从待证的结论出发，一步一步地探索下去，直至最后达到命题的已知条件。

如果要证明的命题是“若 A 则 B ”，那么分析法的思维过程如图 4 所示（由下往上看）：

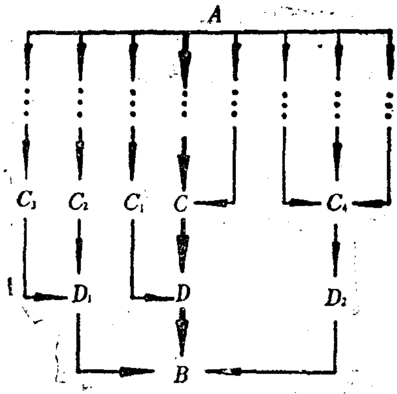


图 4

从图中可见，要证明结论 B，依已知定义、定理、公理等，只要证出 D、D_1、D_2 中一个即可；要证出 D_1 只要证出 C_2、C_3中一个即可；要证出 D 只要证出 C、C_1中一个即可；

要证出 D_2 只要证出 C_4 即可；……如此逐层上溯，只要找到一条由待证结论 B 上接已知条件 A 的通路（如图中粗实线所示），我们就可得到 "$B \Leftarrow D \Leftarrow C \Leftarrow \cdots \Leftarrow A$" 这条证明的思路。

［例 1］ 在 $\triangle ABC$ 中，已知 BE 是 $\angle B$ 的平分线，$EF \parallel BC$，$FG \parallel AC$（见图 5），试证明 $BF = GC$。

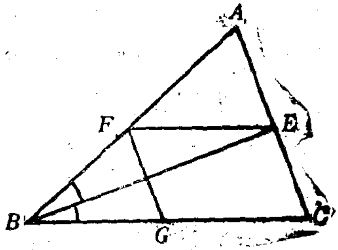


图 5

证明 要证明 $BF = GC$，注意到 $EFGC$ 是平行四边形，有 $EF = GC$，只要证明 $BF = FE$ 就可。要证明 $BF = FE$，考虑到这两条线段在同一个三角形中，只要证明 $\triangle FBE$ 是等腰三角形，即证明 $\angle FBE = \angle FEB$ 就可。由已知 $FE \parallel BC$，有 $\angle FEB = \angle EBC$，因此只要证得 $\angle FBE = \angle EBC$，而这

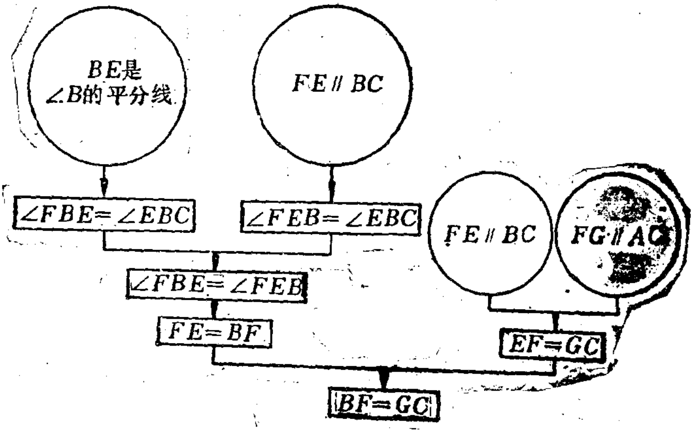


图 6

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com