

内 容 简 介

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著。分为方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及句股等九章。魏、晋时代刘徽、唐初李淳风都对《九章算术》作过注解。本书用现代通俗易懂的语言对《九章算术》及刘徽、李淳风注文详加注释、考证,内容十分丰富。

本书可供数学史工作者、高等学校数学系师生以及中学数学教师参考之用。

《九 章 算 术》注 释

白尚恕 注释

责任编辑 杨贤英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年12月第一版 开本:850×1168 1/32

1983年12月第一次印刷 印张:11 5/8 插页:2

印数:0001—9,200 字数:306,000

统一书号:13031·2448

本社书号:3364·13-1

定价: 2.30 元

序

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，不仅指导着我国数学的发展达两千余年之久，而且对世界数学的发展也有不可估量的巨大影响，线性联立方程组的解法及有关正负数的引入祇其一例而已。我国古代数学有它自己的体系与形式，与西方之以欧几里得几何为代表的所谓公理化体系者旨趣既异，途径亦殊。《九章》与《几何原本》东西辉映，无疑是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉。

《九章算术》的刘徽注是数学上的又一伟大成就。刘徽注不仅提出了丰富多采的创见与发明，并以严密的数学用语描述了有关数学概念，对《九章》中的许多结论给出了严格证明。他所采用的证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。他沿袭我国古代的几何传统，使之趋于完备，形成具有独特风格的几何体系。刘徽的发明、创造对后人有所启发，即使对于现今数学也有不少借鉴之处。从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。

遗憾的是，像传本《九章》与刘徽注这样的伟大著作，由于古今文字迥异，专门名词与现代通用者更大不相同，加上文字简略，用字深奥，使当代有志者难于领略。白尚恕同志博征详考，对全书用现代通俗易懂的语言详加注释，既使国内外对我国古代数学有兴趣的人士易于涉猎了解，也使研究我国古代数学的发展及刘徽与其他人如李淳风等的创见有途可循，为之称便。这是一件十分有意义的事。为此不揣冒昧，谨志数语，聊为此书出版作贺。

系统科学研究所 吴文俊

1980年12月17日

前 言

《九章算术》是我国现存的一部最古老的数学书。作者不详。初步考证,大约成书于东汉初期。此书采用问题集的形式,搜集了二百四十六道与生产实践相联系的应用问题及其解法,依照问题的性质和解法,分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及句股九章。

随着社会的发展,社会生产力的逐渐提高,从而促进了数学的发展。《九章算术》就是记载了古代劳动人民在生产实践中总结出来的数学知识。它不但开拓了我国数学的发展道路,在世界数学发展中也占有极其重要的地位。

魏、晋时代,刘徽对《九章算术》作过注解(以下简称为刘注)。唐初,李淳风(?—714)也作过注解(以下简称为李注)。有刘、李注文的《九章算术》,在宋代有北宋元丰年间的刻本,南宋嘉定年间的刻本。清初,这两种刻本都渐次散失。流传到今的只有上海图书馆保存的南宋残本和故宫博物院所藏这残本的抄本。

清代,戴震(1724—1777)对于由《永乐大典》抄录出来的《九章算术》作过校订(以下简称为戴校本)之后,便依次刊刻成四库馆本、武英殿本以及微波榭本。后来还有万有文库本、丛书集成本和四部丛刊本等。为了恢复隋、唐时期的《九章算术》,一九六三年中华书局出版了天算史专家钱宝琮(1892—1974)校点的《算经十书》本。

刘徽除注解《九章算术》外,还编著《海岛算经》一书。由于资料所限,其籍贯身世、生卒年月则无可详考。只能根据不多的一些记载断定他是魏、晋时代淄乡(今山东临淄或淄川一带)人。

刘徽在《九章算术》注解中,“析理以辞,解体用图”,不但给出明确的概念,导出正确的理论,而且还有很多创造发明。从而取得

了不可磨灭的功绩。可以看出，刘徽在数学方面的成就是十分伟大的、十分辉煌的，他不愧是我国古代一位杰出的布衣数学家。

南北朝祖冲之（429—500）是我国古代伟大的科学家，在数学方面多所发明。他也注解过《九章算术》，正如《南齐书》所称：“注《九章》，造《缀述》数十篇。”可惜的是他的注文全都亡佚。

唐代李淳风注《九章算术》时，除引证祖冲之及其子祖暅对体积理论的贡献外，其他注文多与刘注相类，较刘注似通俗易懂。

宋代杨辉于《详解九章算法》（1261）中选《九章算术》八十道典型问题进行详解，对刘、李注文也作过一番解释。清代李潢（？—1811）于《九章算术细草图说》中对《九章算术》进行了校订，补绘了图形，列出了细草。对刘、李注文也作了解释。在解释中有的固然十分恰当，有的未必符合注者的原意，还有的地方，他采取避而不释的态度。

《九章算术》及刘、李注文的语句简略，用字深奥，阅读起来，十分不便。为了能较确切地理解作者的原意，必须注释。今以钱宝琮校点本（以下简称为钱校本）为蓝本，参考各家之说，用通俗语言、近代数学术语对《九章算术》及刘、李注文详加注释。为方便计只注释与数学有关的语句，凡与数学关系不大的概不注释。前后共写出注释文字四百九十多条。

由于辗转传抄、影摹刊刻，传本《九章算术》有很多错误文字。经过戴震、李潢等人的校勘，一般都文义通顺，易于了解。尤其是钱宝琮在前人的基础上重加校勘，使得《九章算术》文从字顺，上下贯通。这些对于读者都有莫大的裨益。但是，钱校本也有漏校、误校和句点不妥之处。现今，在注释之余，兼及校点。凡认为前人所校点是正确的，便择善而从。凡是与前人有出入的地方，则凭一管之见，加述理由。共写出校订及句读文字百余条。

此外，钱校本说：“商功章阳马术和句股章容圆术的刘徽注中各有意义难于理解而不能句读的文字，无法校订，只能付之缺疑。”对于这些文字，为了抛砖引玉，也做了些试释工作。

由于水平所限，缺点和错误在所难免，尚希不吝指正。

在注释中，曾得到北京师范大学教授程廷熙、钟善基两位先生的指导和协助。初稿之后，承蒙中国科学院系统科学研究所研究员吴文俊先生、中国科学院自然科学史研究所研究员严敦杰先生、内蒙古师范大学教授李迪先生分别先后惠予审阅，并提出宝贵意见。出版之前，又蒙吴文俊先生为本书撰写了序言，中央美术学院教授蒋兆和先生为刘徽绘制了造像。在此一并致以由衷的谢意。

白 尚 恕

一九八〇年十一月于北京师范大学

目 录

《九章算术》书影

刘徽造像

序

前言

刘徽九章算术注原序·····	1
九章算术卷第一 方田·····	12
九章算术卷第二 粟米·····	64
九章算术卷第三 衰分·····	82
九章算术卷第四 少广·····	95
九章算术卷第五 商功·····	136
九章算术卷第六 均输·····	184
九章算术卷第七 盈不足·····	226
九章算术卷第八 方程·····	257
九章算术卷第九 句股·····	306
附录 海岛算经·····	343
主要参考文献·····	364

刘徽九章算术注原序

昔在包牺氏始画八卦^[1]，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术^[2]以合六爻^[3]之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象^[4]精微之气可得而效焉。记称隶首作数^[5]，其详未之闻也。按周公制礼而有九数^[6]，九数之流，则《九章》是矣。

【1】昔在包牺氏始画八卦

包牺亦作伏戏，宓戏，是历史传说中的神化人物。相传曾作结绳，造九九，执规矩，画八卦。

《汉书·律历志》记载：“自伏戏画八卦，由数起。至黄帝尧舜而大备。”颜师古注称：“言万物之数因八卦而起也。”包牺所画的八卦是：乾☰，坤☷，震☳，巽☴，坎☵，离☲，艮☶，兑☱。卦中一称为阳爻，就数说可表示为奇；--称为阴爻，可表示为偶。如沈括（1031—1095）《梦溪笔谈》：“多为阴，如爻之偶；少为阳，如爻之奇。”一卦含有三爻，爻无论阴阳，可以上下重复相叠地排列起来，就叫做卦。这样的卦，其数有八（即 $2^3=8$ ），故称为八卦。

【2】九九之术

“九九”就是九九乘法口诀的称谓。《管子》：“宓戏作九九之数。”我国古代的九九乘法口诀，是由“九九八十一”开始，至“二二如四”终止，共三十六句。以后把“一九如九”、“一八如八”等九句加入，共有四十五句。《孙子算经》（四、五世纪）解释九九算法是由九九迄一一。由于这口诀开始于九九两字，所以称为九九。

到宋、元时代，九九乘法口诀的次序已经颠倒过来，《事林广记》及朱世杰《算学启蒙》（1299）所载都是由“一一如一”至“九九

八十一”，与现今四十五句的九九乘法口诀完全一致。杨辉《算法通变本末》（1274）及程大位《算法统宗》（1592）所载九九的次序也是由小到大。可是在隋、唐时期，九九曾传入日本，日人源为宪《口遊》（970）中还记载了始于九九终于一一的逆序口诀。

刘徽所谓“九九之术”，若以李籍《九章算术音义》引《汉书》颜师古注“九九算术，若今《九章》、《五曹》之辈”来解释，则其意义不止于乘法口诀。在古代可能把九九之术作为当时数学的代名词。

〔3〕六爻

“爻”是组成卦的基本符号。一称为阳爻，--称为阴爻。一卦含有六爻；在阴阳两爻中若重复地任取六爻上下排列起来，其数有 $2^6 = 64$ 。如乾☰，坤☷，屯☳，蒙☶等，每个叫做重卦；也叫做卦。在八卦里，若重复地任取两卦、上下叠置起来，也可得到六十四（ $8^2 = 64$ ）卦。

爻，表示变动或变化的意思。如《易·系辞》说：“爻者，言乎变者也。”

〔4〕两仪、四象

《易·系辞》说：“易有太极，是生两仪。”又说：“两仪生四象。”所谓两仪，一说是指阴阳，阴阳又分老少，故有四象。一说是指奇偶。清代梁章钜（1775—1849）《退庵随笔》称：“夫天地间，不过一奇一偶而已。由此生之，皆奇偶之积耳。于是以奇偶互加而生四象，再加而成八卦矣。”若就重复排列来看，这一说法也通。

明末，熊三拔（Sobathina Urais, 1575—1620）《简平议说》（1611）称：“周天圈，以赤道线、极线分为四圈分，每圈分，分九十度为周天象限，四象限共三百六十为周天度数。”其中象限是拉丁文 Quadrante 的译文，Quadrante 的原意是四分之一。这里译作“象限”，一面取意于四象，一面取意于四分之一。“象限”就是表示两条坐标轴分平面为四部分之一。

〔5〕隶首作数

相传黄帝时代隶首创造了数。实际上这是一种假托。这种假托都是辗转引自不知撰者的《世本》一书。如《唐六典》引《世本》说：

“隶首造数。”此外其他古筭的传述也是本于《世本》。如徐岳《数术记遗》称：“隶首注术，乃有多种。”甄鸾(约535—566)《五经算术》也说：“黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。”李籍《音义》说：“《世本》曰：黄帝时，隶首作数。”

〔6〕九数

《周礼》：“养国子以道，乃教之六艺，……，六曰九数。”《周礼》未列出九数的细目，其具体内容则无法详考。汉代郑玄注《周礼》时引郑众所说：“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，句股也。”

汉武帝曾采用桑弘羊的建议，实行均输法。均输法就是按人口多少，路途远近，谷物贵贱，分配徭役和捐税的制度。《后汉书·朱晖传》说：“武帝时所谓均输也。”可见均输并非《周礼》所说九数的一个细目。李俨(1892—1963)《中国数学大纲》说：“卷六均输记汉代均输制度。汉代均输由桑弘羊开始(公元前110年)。”钱宝琮校点《算经十书》也说：“均输已是汉武帝太初元年以后的赋税制度，决不是《周礼》原有的一个细目。”刘徽原序说：“徽寻九数有重差之名”，而《九章算术》并无重差一章。由此足见《九章算术》的章名与九数原有细目不同。所以刘徽说：“九数之流，则《九章》是矣。”“校其目则与古或异。”九数的细目可能是《九章算术》章名的前身。但是，有人把九数与《九章算术》混为一谈。如王孝通(七世纪)说：“九数即《九章》。”似是武断。也有人把九数理解为“周朝的算卦”。这种理解，更无根据。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补^{〔7〕}。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

〔7〕 汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌，……，各称删补

根据《史记》记载可知：张苍，阳武人，“自秦时为柱下史，明习

天下图书计笈；又善用算律历。”于汉高祖六年(公元前 201 年)从攻臧荼有功而封为北平侯。汉高后八年(公元前 180 年)为御史大夫。汉文帝四年(公元前 176 年)为丞相。曾经“著书十八篇，言阴阳律历事”。

按《汉书》所说，耿寿昌于汉宣帝期间(公元前 73—49 年)“为大司农”。“以善为算，能商功利，得幸于上”。在天文方面，他主张浑天说，于甘露二年(公元前 52 年)曾上奏“以圆仪度日月行，考验天运。日月行赤道”。

张苍及耿寿昌都是以擅长数学著称于世的；虽然《史记》及《汉书》无有记载，但是根据刘徽所说，他们曾删补过旧数学书。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本榦者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩^[8]度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中^[9]。说云：南戴日下万五千里^[10]。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差^[11]之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也^[12]。立两表于洛阳之城，

令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也^[13]。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也^[14]。以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也^[15]。以径寸之筭南望日，日满筭空，则定筭之长短以为股率，以筭径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也^[16]。虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史笈且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下^[17]。度高者重表，测深者累矩^[18]，孤离者三望^[19]，离而又旁求者四望^[20]。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

【8】规、矩

“规、矩”即是圆规、曲尺。

“规、矩”都是象形名称。在甲骨文中，规字作，象征一手拿着规作画图的姿态；矩字作，象征曲尺。

在一些古笈中也有关于规矩的记载。如《周礼》称：“圆者中规，方者中矩。”《尸子》：“古者，倕为规、矩、准、绳，使天下倣焉。”

【9】地中

“地中”就是一国地域的中央。周朝东都洛邑（即洛阳），认为是适中的地域，故称之为地中。

据《周礼》所载：“以土圭（量器，状似直尺，长一尺五寸）之法，测土深，正日景（即影字），以求地中。”“日至（即夏至）之景，尺有五寸，谓之地中。”郑众注称：“土圭之长，尺有五寸，以夏至之日，立八尺之表（即标竿），其景适与土圭等，谓之地中。”

[12] 凡望极高、测绝深而兼知其远者，……，故曰重差也

在测量中，凡是测望不知距离的目的物之高、深或远时，必然使用重差术。即“凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差”。

在两个相似勾股形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中：

$$\text{若 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \text{或 } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'},$$

则

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB - AC}{A'B' - A'C'},$$

或

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB - A'B'}{AC - A'C'}.$$

这就是说，在这比例式中，两条对应边的比率等于两个对应差的比率，所以刘徽说：“句股则必以重差为率，故曰重差也。”由此可知，在重差术的推导过程中，当应用这一原理。

[13] 立两表于洛阳之城，……，即日去地也

在洛阳地面上立两表 BC , DE (如图 1)，各高八尺 ($BC = DE = 8$ 尺)。假定南北都是平地，就是说 $HBFDG$ 在同一水平线上，在同一天日中正午时，测得表的影长为 BF , DG ，以两影的差 $DG - BF$ 为除数，以表高 BC 乘以两表间的距离 $BD (= KE - KC)$ 为被除数。其商 $\frac{BC \cdot BD}{DG - BF}$ 加表高 BC 即得太阳至地面的垂直距离 $AH \left(= \frac{BC \cdot BD}{DG - BF} + BC \right)$ 。这就是利用重差术测算“日高”的方法。这方法就是我国古代测高的重差公式。

刘序所说的“实”是被除数，“法”是除数。“实如法而一”是说实里的数够法数那样多就商得一。也即以法除实，或实除以法。

“实如法而一”是古算中一句术语，有时叙述为“如法而一”，或具体地说“三而一”、“六而一”等。

【14】以南表之景乘表间为实，……，即为从南表至南戴日下也

这段是承上文而言，故将“以景差为法”一语省略，这与上述方法相类：以南表影长 BF 乘表间 $BD (= KE - KC)$ 为被除数，以影差 $DG - BF$ 为除数，相除即得： $BH = \frac{BF \cdot BD}{DG - BF}$ 。这就是前文所说的测远重差公式。

上述方法，都是用重差术测算目的物的高和远的方法。重差术由来已久，我国古笈中只记载其计算方法，却不详其原理。这方法究竟如何形成，很难稽考。魏、晋间赵爽注《周髀算经》中“日高

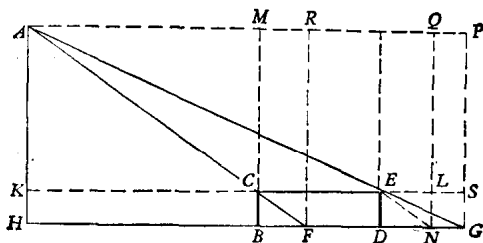


图 2

图”，以矩形面积解释重差术。

在图 2 中，取 $DN = BF$ ，

因 $\square HE = \square EP$ ， $\square HC = \square CR = \square EQ$ ，
相减得： $\square BE = \square LP$ 。 即 $CB \cdot BD = PS \cdot LS$ 。
故有：

$$AH = \frac{CB \cdot BD}{DG - BF} + BC;$$

仿此可得：

$$BH = \frac{BF \cdot BD}{DG - BF}.$$

杨辉于《算法通变本末》中评论说：“《海岛》题法隐奥，莫得其秘。李淳风虽注，祇云下法，亦不曾说其源。”又于《续古摘奇算法》

中说：“唐、李淳风而续算草，未闻解白作法之旨。”杨辉自谓：“尝置《海岛》小图于座右，乃见先贤作法之万一。”于是认为“刘徽以旁要之术，变重差为减积，为《海岛》九问”。便以矩形面积之差解释重差术。杨辉所说的道理与赵爽的道理相同，明代程大位从之，吴文俊也同意杨辉之说，并称：“杨辉对海岛公式的分析……是基本上正确的。”

清代李潢则利用相似三角形解释重差术。如图 2，作 $EN \parallel CF$ ，乃有

$$\triangle ENG \sim \triangle ACE,$$

于是

$$\frac{NG}{DE} = \frac{CE}{AK},$$

故得：

$$\begin{aligned} AH &= AK + KH = \frac{DE \cdot EC}{NG} + KH \\ &= \frac{CB \cdot BD}{DG - BF} + CB. \end{aligned}$$

又因

$$\frac{NG}{DN} = \frac{CE}{KC},$$

乃得

$$HB = KC = \frac{CE \cdot DN}{NG} = \frac{BF \cdot BD}{DG - BF}.$$

沈钦裴、顾观光等都从李潢之说。钱宝琮指出：“图中添线过多，恐不能符合刘徽造术的原意。”李俨认为：“尚不免有牵强之处。”虽然对李潢所说都加以评论，但李、钱两家也都是以相似三角形解释重差术。许莼舫从之。吴文俊说：“牵扯到欧几里得原本之说，是没有任何根据的。”刘徽究竟如何造术，正如钱宝琮说：“关于刘徽重差术的理论根据和他的思想过程，应有进一步探讨的必要。”

唐代王孝通(约 630)《缉古算经》有关各问及宋代秦九韶《数

书九章》(1247) 测望九问都是以相似句股形对应边成比例的理论立说,但是魏、晋时代的刘徽是否能以相似三角形立说,不能不使人发生怀疑。

《九章算术》只有句股测望术,至于重差术则缺而不论。刘徽有鉴于此,乃编造海岛九问,列于《九章算术》之终,以弥补其不足。如刘序说:“苍等为术犹未足以博尽群数也。”乃“辄造重差,并为注解,以究古人之意,缀于句股之下”。“以阐世术之美”。

海岛九问之所以列于句股之下,乃因其与句股有密切关系。《九章算术》句股一章的测望诸问既用相似句股形入算,刘徽的重差术也可能用及相似句股形。虽然杨辉揣测重差术的渊源是矩形面积的差;但,他也不敢自信,他便说:“实《九章》句股之遗法也。”严敦杰也认为“这九题都是用相似句股形比例入算”。因此,可以看出重差术造术之源可能是利用两组相似句股形($\triangle EDG \sim \triangle AHG$, $\triangle CBF \sim \triangle AHF$)对应边的比等于对应差的比推导出来的。

[15] 以南戴日下及日去地为句、股,为之求弦,即日去人也

如图 3, 以“南戴日下”即日“远” BH 为句, 以“日去地”即日“高” AH 为股, 求得弦为 $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$, 即是“日去人”的距离。

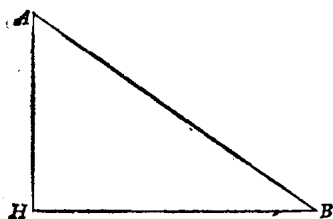


图 3

[16] 以径寸之箛南望日, …… , 大股之句即日径也

如图 4, 以内径为 1 寸的空

竹箛, 观察太阳的直径。设其直径为 DE , 当 C, A, D 及 C, B, E 正好分别在一直线上时, 以竹箛长 CF 及内径 AB 之半 FA 作为小句股形的两边; 再以日至人的距离 CG 及太阳直径 DE 之半 GD 为大句股形的两对应边。依

比例, 可得太阳的直径。即: $\frac{DE}{2} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot CG}{CF}$ 或

$$DE = \frac{AB \cdot CG}{CF}。$$

刘序说：“以筭径为句率”，“大股之句即日径”。事实上似应分别是“以筭径之半为句率”，“大股之句即日半径”。

〔17〕辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下

刘徽感到《九章算术》中测望问题仅须测望一次，而没有用重差术所解的稍复杂的测望问题。他乃编撰《重差》一卷，列于卷九句股之后，以弥补《九章算术》的不足。唐初，将《重差》摘出，另行单本。因《重差》第一问是“望海岛”，以后遂称为《海岛算经》。

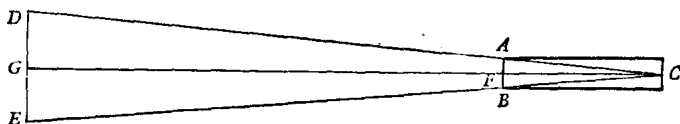


图 4

〔18〕度高者重表，测深者累矩

要测量不可到达目的物的高和远时，必须使用重差术。即是刘序说：“凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差。”犹如徐光启（1562—1633）于《测量异同》中说：“以重表兼测无远之高、无高之远。”“以重矩兼测无广之深、无深之广”。

注文“重表”、“累矩”就是用表或矩测望两次的意思。

〔19〕孤离者三望

如上注所说，凡是“无远之高”或“无广之深”，必须测望两次，才能求得其高或深。如果有一目的物在“无远之高”上，或在“无广之深”下，而且总有一处无所依旁、孤离无着，则须测望三次。这就是刘序所说“孤离者三望”的意思。如《海岛算经》第二问即是三次测望的问题。

〔20〕离而又旁求者四望

如果所测望的目的物在“无远之高”上或“无广之深”下，不仅孤离无着，又需旁求他处者，则必须测望四次。这就是“离而又旁求者四望”的意思。如《海岛算经》第七问即是四次测望的问题。