

上編 經濟學說史之發展與批判

第一章 經濟學說史之發展

經濟學說史之發展，可分為古典經濟學說、新古典經濟學說、社會主義經濟學說、以及現代經濟學說四種。古典經濟學說之代表人物為亞當·斯密、大衛·李嘉圖、及約翰·斯圖亞特·密爾。新古典經濟學說之代表人物為里昂·瓦拉華、及阿爾弗雷德·馬歇爾。社會主義經濟學說之代表人物為卡爾·馬克思、及弗拉基米爾·伊里奇·列寧。現代經濟學說之代表人物為約翰·梅納德·凱恩斯、及約翰·福斯特·納什。古典經濟學說之特點在於強調個人利益之追求，以及市場之自由競爭。新古典經濟學說之特點在於強調個人利益之追求，以及市場之自由競爭。社會主義經濟學說之特點在於強調社會利益之追求，以及市場之自由競爭。現代經濟學說之特點在於強調社會利益之追求，以及市場之自由競爭。

§ 1.1 古典經濟學說

§ 1.1.1 亞當·斯密之經濟學說

亞當·斯密之經濟學說，可分為「國富論」及「道德情操論」二種。其「國富論」之特點在於強調個人利益之追求，以及市場之自由競爭。

其「道德情操論」之特點在於強調社會利益之追求，以及市場之自由競爭。

目 录

序
引言

上篇 波动理论基础及其应用

第一章 波动概念和波谱方法	(1)
§ 1.1 运动微分方程	(1)
§ 1.1.1 建立运动微分方程的纲要	(1)
§ 1.1.2 标准波动方程的建立	(3)
§ 1.2 标准波动方程的解答及其物理意义	(6)
§ 1.2.1 波动自变量	(6)
§ 1.2.2 标准波动方程适用范围	(8)
§ 1.3 波阻抗和波动能量	(11)
§ 1.3.1 一个简单的初边值问题	(12)
§ 1.3.2 波阻抗	(14)
§ 1.3.3 波动能量	(15)
§ 1.4 波谱方法	(17)
§ 1.4.1 简谐波	(17)
§ 1.4.2 波谱方法的要点	(19)
§ 1.4.3 波群与群速度	(25)
§ 1.5 非弹性介质的阻尼效应	(29)
§ 1.5.1 一般线性体本构模型	(30)
§ 1.5.2 频域本构和复阻尼理论	(36)
§ 1.5.3 时域本构和复阻尼理论	(42)
第二章 非均匀介质中的波动	(51)
§ 2.1 反射与透射	(52)
§ 2.1.1 在分界面上的反射与透射	(53)

§ 2.1.2	层间波幅系数转换关系	(57)
§ 2.2	成层介质中的稳态波动	(58)
§ 2.2.1	线弹性土层的稳态地震反应	(58)
§ 2.2.2	线性及非线性土层稳态地震反应	(62)
§ 2.3	波谱综合及土层暂态地震反应	(63)
§ 2.3.1	离散傅里叶变换和输入波动的转换	(64)
§ 2.3.2	线性土层暂态地震反应	(67)
§ 2.3.3	非线性波动问题的等效线性化解法	(69)
§ 2.4	非线性波动问题	(72)
§ 2.4.1	问题的表述	(72)
§ 2.4.2	直接数值模拟方法	(75)
§ 2.5	土的非线性本构方程	(78)
§ 2.5.1	经验函数模型	(79)
§ 2.5.2	宏观物理模型	(82)
第三章	结构动力反应分析	(87)
§ 3.1	封闭系统动力反应的振动解法和行波解法	(88)
§ 3.1.1	封闭线弹性系统的固有振动	(89)
§ 3.1.2	振型叠加解法	(94)
§ 3.1.3	行波解法及其与振型叠加解法的对比	(99)
§ 3.2	开放系统的混合解法与行波解法	(104)
§ 3.2.1	混合解法	(105)
§ 3.2.2	行波解法及其与混合解法的对比	(109)
§ 3.3	建筑结构内波动的简化分析	(111)
§ 3.3.1	力学模型与基本公式	(111)
§ 3.3.2	结构顶部与基底水平运动的关系	(117)
§ 3.4	伸臂结构水平地震反应的混合解法	(120)
§ 3.4.1	基本公式	(120)
§ 3.4.2	结构与地基相互作用的若干概念	(125)
§ 3.5	烟囱的竖向地震反应	(127)
§ 3.5.1	行波分析	(127)
§ 3.5.2	行波转换系数	(131)
§ 3.5.3	结构竖向地震输入和辐射阻尼效应	(135)

§ 3.6 空间结构的动力反应分析	(139)
§ 3.6.1 封闭系统动力反应的振动解法	(142)
§ 3.6.2 开放系统动力反应分析之要点	(146)
§ 3.6.3 空间结构-多个基础-弹性地基的动力反应分析	(154)
上篇参考文献	(159)

下篇 近场波动的数值模拟

第四章 人工边界条件和波动的有限元模拟	(165)
§ 4.1 无限域和人工边界条件	(165)
§ 4.1.1 非局部人工边界条件	(167)
§ 4.1.2 局部人工边界条件	(171)
§ 4.2 多次透射公式	(177)
§ 4.2.1 多次透射公式的导出	(177)
§ 4.2.2 几何解释和微分形式	(180)
§ 4.2.3 反射系数	(183)
§ 4.3 近场波动的有限元模拟	(189)
§ 4.3.1 波动的解耦有限元模拟	(190)
§ 4.3.2 多次透射公式的实用形式	(199)
§ 4.3.3 近场波动的时域模拟	(201)
§ 4.3.4 近场波动的频域模拟	(212)
第五章 离散网格中的波动	(220)
§ 5.1 一维离散网格中的波动	(220)
§ 5.1.1 频散和寄生振荡	(223)
§ 5.1.2 波动离散模拟的精度	(225)
§ 5.1.3 稳定性条件	(226)
§ 5.1.4 非均匀离散网格中的波动	(226)
§ 5.1.5 解耦离散模型的合理性	(228)
§ 5.2 出平面离散网格中的波动	(231)
§ 5.2.1 稳定性条件	(233)
§ 5.2.2 波动类型	(234)
§ 5.2.3 平面波的频散	(235)

§ 5.3	平面内及三维离散网格中的波动	(238)
§ 5.3.1	平面内波动的频散方程	(238)
§ 5.3.2	稳定性条件	(240)
§ 5.3.3	平面内波动的特点	(241)
§ 5.3.4	三维离散网格中的波动	(242)
第六章	近场波动数值模拟的稳定性和精度	(244)
§ 6.1	人工边界条件数值积分的稳定性	(244)
§ 6.1.1	高频失稳的物理机理	(244)
§ 6.1.2	稳定实现多次透射公式的措施	(249)
§ 6.1.3	建立稳定性准则的方法	(256)
§ 6.2	推广的多次透射公式	(263)
§ 6.2.1	基于空间外推的推广	(263)
§ 6.2.2	基于引入多个人工波速的推广	(266)
§ 6.2.3	两种推广的对比	(268)
§ 6.2.4	统一的法线外推公式	(270)
§ 6.3	多向透射边界条件	(272)
§ 6.3.1	入射 SH 波动的多向展开	(273)
§ 6.3.2	多向透射公式	(276)
§ 6.3.3	固定基底弹性层中的 SH 波动	(279)
	下篇参考文献	(282)
	后记	(286)
	附录 近场波动数值模拟综述	(287)

上篇 波动理论基础及其应用

第一章 波动概念和波谱方法

连续介质的运动微分方程是波动理论的基础. 工程中的波动问题大多涉及常规的宏观运动, 即介质的特征尺寸和波长均远大于介质微观离散构造的线度, 同时, 这些波动涉及的速度远小于光速. 因此, 对于范围广大的工程中的波动问题, 其运动微分方程可以依据牛顿力学原理建立. 我们首先讨论依据这一原理建立运动微分方程的思路及主要环节, 并通过一维标准波动方程的建立过程加以说明. 然后讨论标准波动方程一般解的物理意义, 着重阐明它的自变量所表达的波传播概念. 这个将空间和时间坐标组合起来的自变量称为波动自变量(The wave motion argument)或行进特征(The forward characteristic), 它是任何行波的本质特征. 接着, 用一个简单的边值问题引入波阻抗及波动能量的概念, 它们从另一个侧面描述波传播现象的基本特征. 简谐波概念和在其基础上建立的波谱方法是研究波动问题的有力手段, 贯穿本书对线性波动问题的讨论. 本章主要介绍波谱方法的基本知识, 并用以讨论弹性波频散概念以及一般线性介质的本构方程和阻尼效应.

§ 1.1 运动微分方程

§ 1.1.1 建立运动微分方程的纲要

连续介质的运动微分方程可以根据经典力学建立, 其要点如图 1.1 所示.

连续介质内任一点在任一时刻 t 的动力状态包括它的运动状

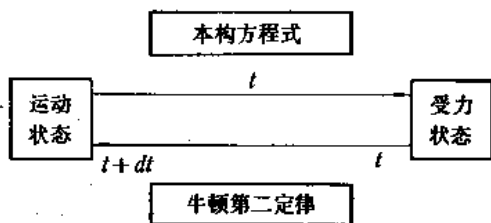


图 1.1 建立运动微分方程的纲要

态和受力状态两个方面。前者一般用位移、速度、应变、应变速度等参数描述，后者则用应力、体积力等参数描述。动力状态的这两个方面是相互转化的，这一转化通过本构方程和牛顿第二定律实现。本构方程表示介质的内部结构和物理性质所规定的运动状态和受力状态的对应关系，一旦确定了某一时刻 t 的运动状态及其历史，则在 t 时刻的受力状态由本构方程决定。另一方面，一旦确定了 t 时刻的受力状态，则在邻近时刻 $t+dt$ 的运动状态则由第二定律确定。反映动力状态时空变化规律的运动微分方程就是上述运动和受力两状态相互转化的数学表达。事实上，这一相互转化关系使连续介质内任一微分体积元在 $t+dt$ 时刻的动力状态完全取决于它在 t 时刻的状态及其历史。因此，若已知某一时刻的动力状态及其历史，则以此时刻为起点，便可以确定下一个以至连续不断一个个时刻的状态，从而规定了连续介质运动变化的规律性。综上所述，运动微分方程的建立在于综合以下四个环节：运动状态的规定，受力状态的规定，本构关系的建立和应用牛顿第二定律。前面三个环节合起来就是所谓力学模型。建立力学模型时需要注意以下两点。第一，这三个环节的特殊性。除去关于受力状态的规定受到作用力等于反作用力的一般性约束、运动状态受到某种可微分性约束以及本构关系受到若干一般原理的约束之外，这三个环节中的每一个均具有极强的特殊性，因此，建立特定问题的力学模型需要具体情况具体分析，这是建立合理的运动微分方程的关键所

在. 第二, 本构方程是这三个环节的核心, 本章及第二章将分别讨论建立线性和非线性本构方程的基本线索, 以期有助于读者研究和了解从工程应用观点出发建立本构方程的基本思路. 最后一个环节具有普遍性, 学习者应熟练掌握和灵活应用各种表达牛顿第二定律或与其等价的原理的数学方法. 本章及第二、第三章均将讨论这样的数学方法. 因此, 为了建立适用于特定情况的运动微分方程, 首先要研究前面三个环节的特殊性, 建立有针对性的既能模拟实际情况又简便实用的力学模型, 然后用牛顿第二定律列出运动微分方程. 牛顿第二定律和其他三个环节中的一般性原则构成了建立运动微分方程的骨架, 而力学模型的特殊性则构成环绕这一骨架的柔性层, 这一具有伸缩性的研究纲要能够以极大的灵活性概括各种运动规律, 并将实际工程力学问题“翻译”为数学问题. 这一纲要对于建立连续模型或离散模型、线性模型或非线性模型、固体或流体以及微分元或有限体系的运动微分方程都适用. 如果考虑介质所处物理状态(如温度、电磁场等)与运动状态、受力状态和本构关系的相互影响, 上述思想也是建立更广泛的应用物理运动微分方程的基础. 这一纲要是全书写作的基点, 它将体现于书中各个主要部分, 下面先以一个简单例子说明建立运动微分方程的纲要.

§ 1.1.2 标准波动方程的建立

我们考虑均匀剪切变形直杆的横向运动. 所谓剪切变形直杆是指杆的横截面仅在与杆轴垂直的方向上平移, 同时在平移过程中截面形状和大小保持不变(图 1.2). 因此, 杆的运动状态完全由直杆轴线横向位移 u 描述

$$u = u(x, t) \quad (1)$$

式中, 空间坐标 x 固定在未变形状态的杆轴上, t 为时间坐标. 剪切变形直杆的运动学参数可以由式(1)导出. 例如, 剪应变 γ 由下式定义(见图 1.2)

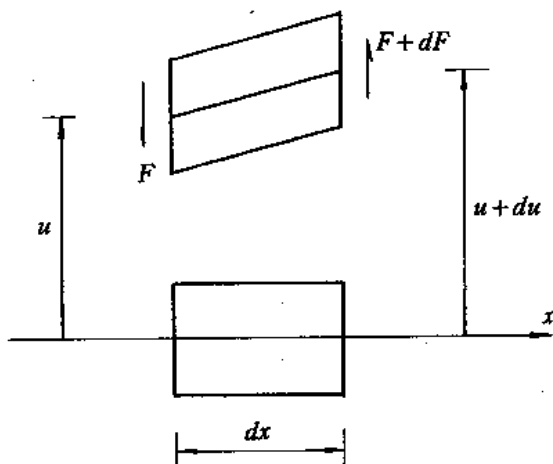


图 1.2 匀直剪切杆的横向运动

$$\gamma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

由于直杆只有剪切变形,它的受力状态可以用作用于横截面上的剪力 F 描述(图 1.2),它也是一维空间坐标 x 和时间 t 的函数

$$F = F(x, t) \quad (3)$$

对于弹性剪切变形杆,本构方程可用剪力 F 和剪应变 γ 的对应关系表示

$$F = C(\gamma) \quad (4)$$

把式(4)右端按泰勒(Taylor)级数展开,并保留到一阶小量 γ

$$F = K\gamma \quad (5)$$

这是应力与应变成正比的线性本构关系,是胡克(Hooke)定律的一维表达式.式中弹性系数 K 具有力的量纲,称为直杆的剪切刚度.式(5)成立的条件是

$$|\gamma| \ll 1 \quad (6)$$

即小应变情形。

将牛顿第二定律应用于上述匀直剪切变形杆力学模型, 对于单元 dx (图 1.2) 得到

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F = m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

式中 m 为直杆单位长度的质量. 将本构关系式(5)代入式(7)并利用式(2)可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

其中

$$c = \sqrt{K/m} \quad (9)$$

方程(8)即为一维标准波动方程. 参数 c 是描述波动的重要参数, 称为波速, 其物理意义在下节讨论. 一维标准波动方程(8)及其赖以建立的力学模型很简单, 但是, 很有用. 因为, 在一定条件下, 这个简单模型抓住了问题的关键. 例如, 研究在水平地震地面运动作用下多层框架房屋的整体地震反应时可以采用这一力学模型. 严格地说, 水平地震动引起的框架房屋的变形很复杂: 不仅有楼层间的错动, 而且楼层的横梁和楼板要变形, 立柱也会发生纵向变形. 然而在许多情况下层间柱子的抗剪刚度远小于其纵向刚度, 而楼板及横梁变形对结构整体变形的影响不大, 因此, 框架房屋的整体变形主要受层间错动控制. 由于作用在房屋上的水平地震力主要取决于整体运动, 因此, 就估计作用在多层框架房屋上的水平地震力而言, 剪切变形杆是一个合理的模型. 对多层框架房屋自振周期的实测结果表明, 实测整体自振频率非常接近于理论模型的推测值. 因此, 这个简单模型就估计房屋整体水平方向的运动而言具有相当高的精确性.

§ 1.2 标准波动方程的解答及其物理意义

§ 1.2.1 波动自变量

方程(8)的一般解可以用初等方法求出. 作变量代换

$$\begin{aligned}\xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct\end{aligned}\quad (10)$$

用链式微分法则容易证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)\end{aligned}$$

将这些表达式代入式(8)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (11)$$

上式的一般积分为

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (12)$$

一般解(12)中 f 和 g 是两个任意函数. 文献中称式(12)为达朗贝尔(D'Alembert)解. 函数 f 和 g 的特定形式需要由边界条件和初始条件确定, 这将在 § 1.3 用一个简单例子说明. 函数 f 和 g 的自变量是空间坐标 x 和时间坐标 t 的特殊组合, $x - ct$ 和 $x + ct$ 称为波动自变量或波的行进特征, 它是任何波动现象的本质表征, 透彻地理解波动自变量的运动学含义极其重要. 下面将利用波动自变量分析标准波动方程一般解的含意. 首先考虑式(12)中的第一项, 设 $u(x, t) = f(x - ct)$. 图 1.3 示出相对于静止坐标轴 x 在两个不同时刻 $t = 0$ 和 $t = t_1$ 时的波形, 即位移 u 相对空间坐标 x 变化的图形. 设想一位观察者以均匀速度 c 沿着 x 轴正方向移动, 假定在观察者身上固定一条与静止轴 x 指向相同的坐标轴 x' , 且 x' 轴的

原点固定于观察者. 设观察者正好在 $t=0$ 时刻到达静止坐标轴 x 的原点 $x=0$, 此时观察者看到的波形就是 u 随坐标 x' 的变化 $f(x')$. 这是因为, 在 $t=0$ 时刻, x' 轴与 x 轴原点重合, $x'=x$; 在 $t=t_1$ 时刻, 观察者移动了距离 ct_1 , 静止轴上任一点的坐标在观察者看来为 $x'=x-ct_1$, 因此, 观察者看到的波形仍是 $f(x')$, 即观察者在不同时刻看到的波形是不变的. 换言之, 固定的波形 $f(x')$ 随着观察者以相同速度 c 向着 x 轴正方向移动. 用类似方法可以看出, $g(x+ct)$ 表示沿着负 x 轴方向以速度 c 传播的波动. 由此可见, 波动方程(8)中的常数 c 表示波形传播速度.

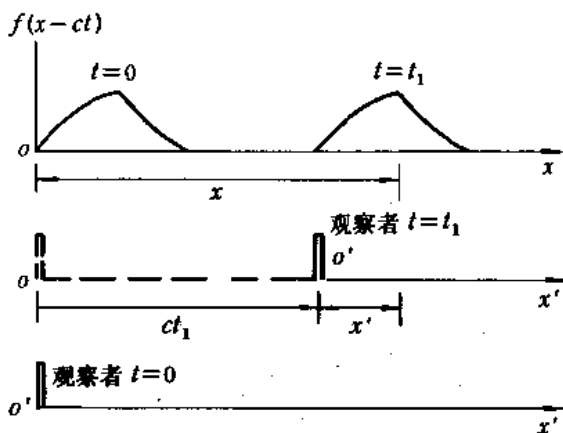


图 1.3 波形以速度 c 传播的示意图

波动也可以理解为振动的传播. 考虑在固定点 $x=x_1$ 上质点的运动

$$u(x_1, t) = f(x_1 - ct)$$

在另一固定点 $x=x_2 (> x_1)$ 上质点的运动可以写成

$$\begin{aligned} u(x_2, t) &= f(x_2 - ct) \\ &= f\left[x_1 - c\left(t - \frac{x_2 - x_1}{c}\right)\right] \end{aligned}$$

上式表示在点 x_2 和点 x_1 处 u 随时间的变化规律完全相同, 仅在

时间上滞后 $(x_2 - x_1)/c$, 即波穿过点 x_2 和 x_1 这段距离需用的时间. 因此, 波速 c 亦表示质点振动的传播速度. 任何一点的振动要传到另一点需要一定时间, 这是波动现象所具有的本质特征. 这一特征就是用波动自变量来反映的. 只要一个物理量可以表示成波动自变量的函数, 那么, 该量的振动和波形就以波速 c 传播. 波动自变量是今后常用的概念. 由于 f 和 g 为任意函数, 波动自变量也可以写成其他形式, 例如, $\frac{x}{c} \pm t, t \pm \frac{x}{c}$, 等. 因此, 一维标准波动方程的一般解式(12)也可以写成其他形式, 例如

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

§ 1.2.2 标准波动方程适用范围

虽然式(8)是从匀直杆的剪切横向运动导出的, 它也适用于一系列物理性质极为不同的波动问题. 作为一个例子, 我们考虑图 1.4 所示的正截锥形弹性杆的纵向运动. 作为一级近似, 杆的纵向运动可以用杆的横截面沿杆轴平行移动描述, 且截面在平移过程中不变形. 也就是说用截面纵向位移 $u_x = u_x(x, t)$ 可以完全描述杆的运动状态. 相应的受力状态可以用作用在截面上的轴向力 $F_x = F_x(x, t)$ 描述. 根据线弹性本构方程

$$F_x = A(x)E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (13)$$

式(13)中 E 为直杆介质的杨氏模量, $A(x)$ 为截面面积, 参照图 1.4 将牛顿第二定律应用于杆元 dx , 可得变截面直杆的如下纵向运动微分方程

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{A(x)} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (14)$$

其中

$$c = \sqrt{K/\rho} \quad (15)$$

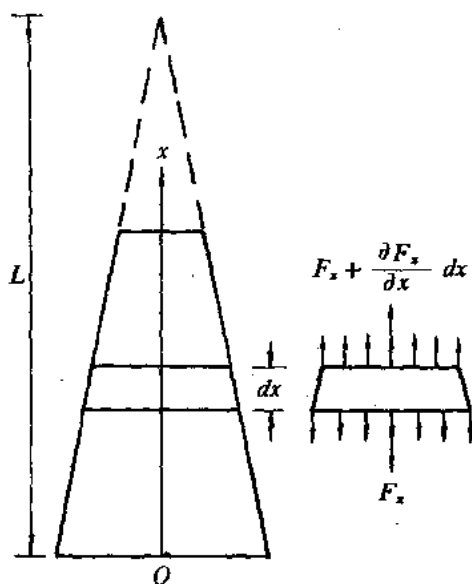


图 1-4 正锥形杆的纵向运动

ρ 为直杆介质质量密度. 对正截锥形杆而言,

$$A(x) = A(0) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (16)$$

式中 L 为具有长度量纲的常数, 其几何意义见图 1.4, $A(0)$ 为正截锥形杆底面积. 将式(16)代入式(14)得到

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{2}{x-L} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (17)$$

令

$$u_x = \frac{u}{x-L} \quad (18)$$

式(18)中 u 为 x 与 t 的函数, 具有长度平方的量纲, 则式(17)可化成式(8)类型. 因此, 正截锥形杆中纵向运动的一般解可由标准波动方程的一般解式(1)按式(18)确定. 对于均匀直杆 $L = \infty$ 式

(17)简化为标准波动方程.由此可知,匀直杆中纵向振动的传播和横向剪切振动的传播服从相同的数学规律.虽然两者的物理性质完全不同:前者质点振动方向与传播方向一致,依靠介质的压缩和伸张弹性推动振动的传递,称为纵波,波速由式(15)确定;后者质点运动方向与波传播方向垂直,依靠介质的剪切弹性推动振动的传递,称为横波,波速由式(9)确定.表 1.1 汇集了若干常见的一维波动模型,包括固体介质中的波动,空气中的声波和电磁波等各种物理性质极为不同的波动,它们的运动微分方程均为标准波动方

表 1.1 常见的一维波动模型

波动模型	u 的物理意义	波 速 c
均匀剪切 梁横向运动	横向位移	$\sqrt{K/m}$, K —剪切刚度, m —单位长质量
均匀弦线 横向运动	横向位移	$\sqrt{T/m}$, T —弦内张力, m —单位长质量
均匀直杆 纵向运动	纵向位移	$\sqrt{E/\rho}$, E —杨氏模量, ρ —质量密度
正锥形杆 纵向运动	纵向位移为 $u/(x-L)$	$\sqrt{E/\rho}$, E —杨氏模量, ρ —质量密度
均匀直杆 扭转运动	扭转角	$\sqrt{K_T/J}$, K_T —扭转刚度, J —截面转动惯量
均匀弹性介质 平面剪切波	横向位移	$\sqrt{\mu/\rho}$, μ —剪切模量, ρ —质量密度
均匀弹性介质 平面压缩波	纵向位移	$\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, λ, μ —拉梅常数, ρ —质量密度
平面电磁波	电场强度 或磁场强度	光速($\approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$) (真空)
平面声波	压 力	声速($\approx 332 \text{m/s}$) (标准状态下的空气)

程(8). 如果对波动问题的研究著作稍作调查就会发现, 即使在波动的某一领域的某一方面(例如, 固体中弹性波的散射)就可能吸引某些科学家的全部注意力. 有趣的是这些在不同研究领域内工作的专家常常能够很容易交流, 而且这一沟通常有助于研究工作的重要突破, 其原因就在于数学物理模型和相应的波动概念上的共通性.

最后, 我们可以利用一般解(12)对线弹性理论的适用条件提供一个判据. 设质点运动位移为 $u=f(x-ct)$, 则质点运动速度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{df}{d\xi}$$

由于 $\partial u/\partial x = \partial f/\partial x = df/d\xi$, 则由上式得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

众所周知, 线弹性理论的适用条件是 $|\partial u/\partial x| \ll 1$, 将上式代入这一条件得

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \ll c$$

因此, 只有当质点速度远小于波速时线弹性理论才能用于分析波动现象. 这是判断标准波动方程适用条件的一个有用的判据. 例如, 依据这一判据可以作出地壳岩石中的地震波至少在一级近似的意义上能够用标准波动方程解释. 这是因为地壳岩石中波速达每秒几公里量级, 而当地震波穿过地球介质时质点运动速度通常不超过每秒1米量级.

§ 1.3 波阻抗和波动能量

波动传播的物理量既可以是运动学参数, 如位移、速度和加速度, 也可以是其他物理量, 如应力、能量等. 本节将从应力和能量传播的角度进一步讨论波传播概念和各个物理量之间的联系. 此外,

为了确定式(8)的一般解(12)中函数 f 和 g 的具体形式, 必须考虑问题的初始条件和边界条件. 本节将通过一个简单的边值问题的求解展开讨论.

§ 1.3.1 一个简单的初边值问题

我们来分析图1.5所示的边值和初值问题. 假定在 $t < 0$ 时均匀、各向同性的弹性半空间 ($x \geq 0$) 内介质为静止, 当 $t = 0$ 时突然在界面 $x = 0$ 处加上不随时间变化的均匀分布剪应力 τ_0 , 求解由此

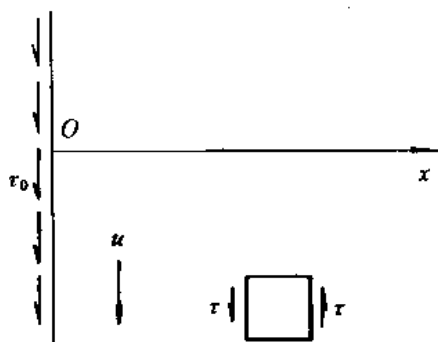


图 1.5 均匀剪应力作用于均匀弹性半空间的表面

产生的弹性波位移场 $u(x, t)$. 显然, 依据这一问题的几何和物理特点, 在边界面上作用的剪应力将在半空间内产生一维弹性剪切波, 其控制方程为标准波动方程(8). 一般解式(12)中波动函数 f 和 g 的具体形式应由如下边界条件和初始条件决定.

边界条件:

$$\tau(0, t) = \tau_0 H(t) \quad (20)$$

其中 $H(t)$ 为单位阶跃函数: $t < 0$ 时, $H(t) = 0$; $t > 0$ 时, $H(t) = 1$.

初始条件:

$$u(x, 0) = 0 \quad (21)$$

由于没有波动能量来自右方 ($x = \infty$), 因而一般解(12)中第二项 g