北京市中学生数学竞赛试题解析

（修订本）

周春荔　李延林　等编

气象出版社

写 在 前 面

北京市中学生数学竞赛有着悠久的历史. 在1988年以前的各届试题及解答,都已经先后出版过专门的小册子,广为流传.

近年来,北京市中学生数学竞赛是在初二和高一两个年级进行. 从1990年起分为初试与复试,初试以普及为主,复试则适度提高. 命题紧密结合中学数学教学实际,活而不难,趣而不怪,巧而不偏,力求体现出科学性、知识性、应用性、启发性、趣味性的综合统一. 试题具有一定特色,受到广大师生欢迎. 多年的实践证明:数学竞赛活动是备受青少年喜爱的一种数学课外活动. 通过有趣味、有新意、有水平的题目,开发智力,引导学生提高数学素质. 数学竞赛活动是落实数学素质教育的一种好形式. 1997年,全国初中联赛因故停办,经北京市教委批准,由北京数学会恢复了(自1985年第一届全国初中联赛开始,北京市初三竞赛停办)北京市初中三年级的数学竞赛.

我们将1989～1997年北京市中学生数学竞赛试题及解答加工整理奉献给读者,供广大的青少年数学爱好者学习时参考.

九年来的北京市中学生数学竞赛,是由前任北京数学会副理事长、普及工作委员会主任杨守廉教授主持的. 北京数学会普及工作委员会副主任周春荔教授和李延林副教授负责命题的组织工作和试题整理工作. 王尚志、王燕春、齐东旭、乔家

瑞、何裕新、余炯沛、吴建平、明知白、赵大悌、欧阳东方、胡大同、唐守默、唐大昌、陶晓永、陶文中、陶懋颀、莫颂清等老师先后参加过这九届竞赛的部分或全部的命题工作. 其中何裕新同志于 1993 年 6 月 10 日,陶懋颀同志于 1997 年 9 月 3 日先后病逝. 出版这本书也是对这两位老师数十年来为北京市数学普及工作所作贡献的纪念.

北京数学会普及工作委员会副主任、中国数学奥林匹克高级教练员周春荔教授和李延林副教授对试题及解答进行了加工整理. 解答详细,重在分析,适合广大中学数学爱好者研读. 参加整理工作的还有唐守默、乔家瑞、唐大昌等同志. 乔赤兵老师参加了插图设计、编辑和版面设计工作. 现任北京数学会副理事长、普及工作委员会主任王尚志教授对本书的编辑与出版给予了指导与支持.

值本书问世之际,谨向北京市各区(县)负责数学竞赛组织领导工作的同志们表示衷心的感谢,向北京市各中学积极从事并支持数学奥林匹克活动的同事们表示衷心的感谢.

编者谨识

1998 年元旦

目　录

北京市 1989 年中学生数学竞赛试题及参考解答

初中二年级

（1989 年 4 月 16 日 8:30～10:30）

一、填空题（满分 40 分，将答案填在试卷纸小题号下面的空格内有效，填在其他地方无效）

小题号	1	2	3	4	5
答案	30°	$\frac{11}{2}$	6	6	3

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$. $AB = 2AC$. CD、CE 分别是 AB 边上的高线及中线. 求 $\angle ECD$ 的度数.

解：如图 1 在直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 AB 等于斜边中线的 2 倍. 又已知 $AB = 2AC$.

$\therefore \quad AC = CE = AE$

即 $\triangle ACE$ 为等边三角形.

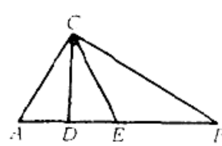

图 1

$\angle ACE = 60°$.

又 $CD \perp AE$ 于 D，所以 CD 平分 $\angle ACE$，

$\therefore \quad \angle ECD = 30°.$

2. 已知 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5}), y = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$. 求 $x^2 - xy + y^2$ 的值.

解:$\because \quad x + y = \sqrt{7}, \quad xy = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \text{原式} = (x+y)^2 - 3xy = (\sqrt{7})^2 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

3. 若 n 是自然数且 $\frac{n^3-1}{5}$ 是一个质数. 求 n 的值.

解:对 n 分类讨论

(1) 若 $n = 5k$,显然 $5 \nmid n^3 - 1$. 所以 n 不能是 $5k$ 型的自然数.

(2) 若 $n = 5k + 2$

$$n^3 - 1 = (125k^3 + 150k^2 + 60k + 8) - 1 = 5(25k^3 + 30k^2 + 12k + 1) + 2$$

$5 \nmid n^3 - 1$,所以 n 不能是 $5k + 2$ 型的自然数.

(3) 若 $n = 5k - 2$

$$n^3 - 1 = (125k^3 - 150k^2 + 60k - 8) - 1 = 5(25k^3 - 30k^2 + 12k - 2) + 1$$

$5 \nmid n^3 - 1$,所以 n 不能是 $5k - 2$ 型的自然数.

(4) 若 $n = 5k - 1$

$$n^3 - 1 = (125k^3 - 75k^2 + 15k - 1) - 1 = 5(25k^3 - 15k^2 + 3k - 1) + 3$$

$5 \nmid n^3 - 1$,所以 n 不能是 $5k - 1$ 型的自然数.

(5) 若 $n = 5k + 1$

$n^3-1=(125k^3+75k^2+15k+1)-1$

$\quad\quad =5(25k^3+15k^2+3k)$

此时$\frac{n^3-1}{5}=25k^3+15k^2+3k=k(25k^2+15k+3)$要为质数，必须$k=1$，此时$n=6$.

当$n=6$时，$\frac{6^3-1}{5}=43$是个质数，合于要求.

4. 设m是不为0的整数，二次方程

$mx^2-(m-1)x+1=0$有有理根，求m的值.

解：方程$mx^2-(m-1)x+1=0(m\neq 0)$是整系数的一元二次方程，有有理根，必须

$\Delta=(m-1)^2-4m=m^2-6m+1$的值是完全平方数.

设　$m^2-6m+1=a^2$　　　　（a为自然数）

则　$m^2-6m+9-a^2=8$

$(m-3)^2-a^2=8$

$(m-3+a)(m-3-a)=8$

又因为$m-3+a$与$m-3-a$奇偶性相同，

$\therefore$　$m-3+a$与$m-3-a$都是偶数，

又$\because$　$m-3+a>m-3-a$

故　$\begin{cases}m-3+a=4\\ m-3-a=2\end{cases}$　或$\begin{cases}m-3+a=-2\\ m-3-a=-4\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a=1\\ m=6\end{cases}$　　或$\begin{cases}a=1\\ m=0\end{cases}$　（不合题意）

$\therefore$　$m=6$.

经验证知，$m=6$时，方程变为$6x^2-5x+1=0$确有二有理根$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{3}$. 合于题意要求.

所以，$m=6$为所求.

5. 凸1989边形的所有内角中锐角的个数为n，问n的最

大值是多少？

解：设凸1989边形中有 n 个锐角，则相应的锐角之邻补角必是钝角，这 n 个钝角恰是1989边形的 n 个外角，设这 n 个外角为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

则 $n \times 90° < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqslant 360°$

$\therefore \quad n < 4.$

因此 n 的最大整数值为3，即凸1989边形中所有内角中锐角个数 n 的最大值是3.

二、(满分15分)

a 为什么整数时，方程

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + \frac{2x-a}{x(x-2)} = 0$$

只有一个实根. 指出所有这样的 a 值并求出与它相对应的方程的根.

解： $$\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + \frac{2x-a}{x(x-2)} = 0 \qquad ①$$

通分后，得

$$\frac{2x^2 - 2x + 4 - a}{x(x-2)} = 0$$

去分母得 $\quad 2x^2 - 2x + 4 - a = 0 \qquad ②$

方程②的实根，若不为0,2则是原方程①的根.

方程①只有一个实根，那么只可能是：

(1) 方程②有二相等实根，且此实根不为0或2.

此时 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4-a) = 0$

解得 $a = \frac{7}{2}$ 不为整数，舍去.

(2) 方程②虽有二不相等实根，但其中之一为0，或2.

(Ⅰ) 方程②有一根为0

则 $\quad 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4 - a = 0$

$a = 4.$

这时原方程变为$\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + \frac{2x-4}{x(x-2)} = 0$

解此方程有唯一实根 $x = 1$

（Ⅱ）方程 ② 有一根为 2

则　$2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 - a = 0$

$a = 8.$

此时方程变为$\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + \frac{2x-8}{x(x-2)} = 0$

解此方程得唯一实根 $x = -1.$

$a = 4$ 时，原方程恰有一个实根 $x = 1.$

$a = 8$ 时，原方程恰有一个实根 $x = -1.$

三、（满分 15 分）

已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，由顶点 A 所引 BC 边的高线恰等于 BC 边长的一半，试求 $\angle BAC$ 的值（要求画出图形）.

解：分情况讨论如下：

（1）若 BC 为等腰三角形的底边，则高 AH 平分 BC，$AH = \frac{1}{2}BC$

$\triangle AHB$ 与 $\triangle AHC$ 都是等腰直角三角形（图 2）.

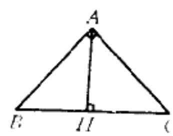

图 2

所以 $\angle BAC = 90°$

（2）若 BC 为等腰三角形的一个腰，此时，

（Ⅰ）若顶角 $\angle ABC$ 为锐角，由 $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$，得 $\angle B = 30°$（图 3）.

所以 $\angle BAC = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°.$

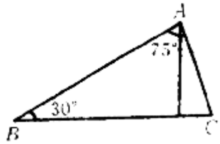

图 3

（Ⅱ）若顶角 $\angle ABC$ 为钝角，$AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$，则 $\angle ABH=30°$，所以 $\angle ABC=150°$(图 4)

$$\angle BAC=\frac{180°-150°}{2}=15°.$$

（Ⅲ）若 $\angle ABC=90°$，此时 $AB=BC=AH$，与 $AH=\frac{1}{2}BC$ 的条件矛盾. 所以此种条件下的三角形不存在.

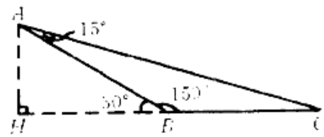

图 4

答：$\angle BAC$ 的度数可以是 90°、75° 及 15° 三个值.

四、(满分 15 分)

已知 a,b,c,d 适合 $a+b=c+d$，$a^3+b^3=c^3+d^3$.

求证：$a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$.

证明　由 $a+b=c+d$　①

　　及 $a^3+b^3=c^3+d^3$　②

若 $a+b=0$，则 $c+d=0$

此时 $a=-b$，$c=-d$

则　$a^{1989}+b^{1989}=0$，$c^{1989}+d^{1989}=0$.

显然成立　$a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$

若 $a+b\neq 0$

① 式两边立方后减去 ② 式可得

$$ab(a+b)=cd(c+d)$$

由 $a+b\neq 0$，知 $c+d\neq 0$

所以　$ab=cd$

从而　$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$$= (c+d)^2 - 4cd = (c-d)^2$$

于是 $\qquad a-b=c-d \qquad ③$

或 $\qquad a-b=d-c \qquad ④$

由 ①、③ 联立可得 $\quad a=c, b=d$

或由 ①、④ 联立可得 $\quad a=d, b=c$

总之 $a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$ 成立.

五、(满分 15 分)

在平面上依次画出首尾相接的 n 条线段，其中第 n 号线段的终端恰与第 1 号线段的始端重合. 其中每一条线段都叫一个"线节". 若一个线节的始端恰是另一个线节的终端，称这两个线节是相邻的. 我们规定：相邻的两个线节不能画在同一直线上，不相邻的任两个线节都不相交. 满足上述条件的图形我们称作"简单折线圈". 如图 5，我们画的简单折线圈的 10 个线节恰分布在 5 条直线上.

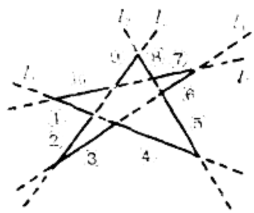

图 5

若一个简单折线圈的全部 n 个线节恰分布在 6 条直线上，试求 n 的最大值，并说明理由.

解：由题意知

(1) 凡共线的两个线节彼此一定不相邻；

(2) 每个线节的端点都是相邻两线节所在直线的交点.

通过画图，我们可以作出"由 12 个线节组成的'简单折线圈'的全部 12 个线节恰排布在 6 条直线上"的例子(如图 6).

下面我们证明，n 的最大值就是 12.

如若不然，$n>12$，则至少是13. 而13个线节的"简单折线圈"，它的13个线节恰分布在6条直线上，则由抽屉原则，至少有一条直线l上要分布有至少3个线节，这3个线节根据(1)，彼此一定不相邻，所以至少有6个端点，由(2)知，这6个端点恰是另外6条直线(其他线节所在的直线)与l相交所得的交点，再加上直线l本身，因此，线节所在直线条数至少为7，与恰有6条直线的已知条件相矛盾.

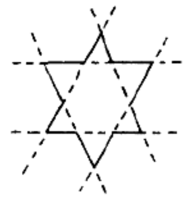

图 6

所以$n>12$不能成立，即应有$n\leqslant 12$. 由上面的例子可知$n=12$的情形存在，所以n的最大值是12.

高中一年级

(1989年4月16日 8：30 ~ 10：30)

一、填空题(满分40分，将答案填在试卷纸小题号下面的空格内有效，填在其他地方无效)

小题号	1	2	3	4	5
答案	55	1	$\frac{1}{6}$	14	6

1. 某中学的教师中，会英语及俄语的人总计100人，据统计，会英语的有70人，会俄语的45人，求该校教师中会英语但不会俄语的人数.

解：设会英语教师集合为Y，依题意$|Y|=70$.

会俄语教师集合为R，依题意$|R|=45$.

会英语及俄语的教师集合为 $Y \cup R$，由题意知 $|Y \cup R| = 100$，用 $Y \cap R$ 表示既会英语又会俄语的教师的集合.

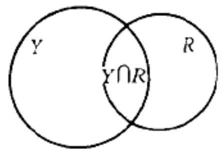

图 7

由图 7 可见.

$|Y \cup R| = |Y| + |R| - |Y \cap R|$

$\therefore \quad |Y \cap R| = |Y| + |R| - |Y \cup R|$

$= 70 + 45 - 100 = 15$

该校教师中会英语不会俄语的人数是

$70 - 15 = 55$(人).

2. 设 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = ?$

解：$[g(x)]^2 - [f(x)]^2$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1.$$

3. 若 $\lg 2x \cdot \lg 3x = m$ 有两个不同的实数解 x_1 和 x_2. 求 $x_1 x_2 = ?$

解：方程 $\lg 2x \cdot \lg 3x = m$ 有意义，显然 $x > 0$，

$\lg 2x \cdot \lg 3x = m$ 有两个不同的实根 x_1, x_2，必是两个不同的正实根.

$\therefore \quad (\lg 2 + \lg x)(\lg 3 + \lg x) = m$ 有两个不同的正实根 x_1, x_2.

即 $(\lg x)^2 + (\lg 2 + \lg 3)\lg x + \lg 2 \cdot \lg 3 - m = 0$ 有两个

不同的正实根 x_1, x_2.

令 $y = \lg x$,正实数 $x_1 \neq x_2$,则 $y_1 \neq y_2$

$\therefore$ $y^2 + (\lg 2 + \lg 3)y + \lg 2 \cdot \lg 3 - m = 0$ 有两个不同的实根 y_1, y_2. 其中 $y_1 = \lg x_1$, $y_2 = \lg x_2$.

依韦达定理,$y_1 + y_2 = -(\lg 2 + \lg 3) = -\lg 6 = \lg \dfrac{1}{6}$

即 $\lg x_1 + \lg x_2 = \lg \dfrac{1}{6}$ $\lg x_1 x_2 = \lg \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $x_1 x_2 = \dfrac{1}{6}$.

4. 给定锐角 $\triangle ABC$ 且 $AC < AB < BC$. 若 $\triangle ABC$ 所在平面上的点 M 使得 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BCM$ 都是等腰三角形,称点 M 为"正则点". 求正则点的个数共有多少个?

解: 所确定的"正则点"应在以下圆与直线的交点中去找(图 8).

画以 A 为圆心 AB 为半径的圆 $\odot(A, AB)$,

画以 B 为圆心 AB 为半径的圆 $\odot(B, AB)$,

画以 B 为圆心 BC 为半径的圆 $\odot(B, BC)$,

画以 C 为圆心 BC 为半径的圆 $\odot(C, BC)$,

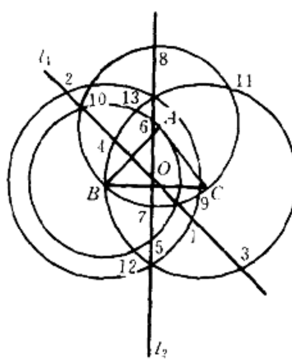

图 8

再画 AB 的垂直平分线 l_1, BC 的垂直平分线 l_2, 由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 l_1 与 l_2 的交点外心 O 在 $\triangle ABC$ 内部.

由于 $AC < AB < BC$,且 $BC < AC + AB$,推得 $AB >$

$\frac{1}{2}BC$. 所以 $\odot(B,AB)$ 不过 BC 中点，$\odot(B,AB)$ 与 BC 应交于靠近 C 点的一侧.

又 $\because$ $AC < AB < BC$

$\therefore$ A 点不在 l_2 上，C 点不在 l_1 上，

直线 l_1 与 $\odot(B,BC)$ 交于两点 1，2 是正则点.

直线 l_1 与 $\odot(C,BC)$ 交于两点 3，4 是正则点.

直线 l_2 与 $\odot(B,AB)$ 交于两点 5，6 是正则点.

直线 l_2 与 $\odot(A,AB)$ 交于两点 7，8 是正则点.

$\odot(B,BC)$ 与 $\odot(A,AB)$ 的交点 9，10 是正则点.

$\odot(B,BC)$ 与 $\odot(B,AB)$ 是同心圆无交点.

$\odot(C,BC)$ 与 $\odot(A,AB)$ 一个交点为 $\triangle ABC$ 的顶点 B，只有另一个交点 11 是正则点.

$\odot(C,BC)$ 与 $\odot(B,AB)$ 的交点 12，13 是正则点.

此外直线 l_1 与 l_2 的交点 O 也是正则点.

总计，共有 14 个正则点.

5. 设 x 是实数，且

$f(x) = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5|$，求 $f(x)$ 的最小值.

解：分区间 $x \leqslant -5$，$-5 < x \leqslant -4$，$-4 < x \leqslant -3$，$-3 < x \leqslant -2$，$-2 < x \leqslant -1$ 及 $x \geqslant -1$ 进行讨论，将 $f(x)$ 表为分段函数

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 15 & (x \leqslant -5) \\ -3x - 5 & (-5 < x \leqslant -4) \\ -x + 3 & (-4 < x \leqslant -3 \\ x + 9 & (-3 < x \leqslant -2) \\ 3x + 13 & (-2 < x \leqslant -1) \\ 5x + 15 & (-1 < x) \end{cases}$$

容易求得 $x=-3$ 时 $f(x)$ 取得最小值 $f(-3)=6$.

注:本题也可采用几何直观分析.

问题的一般提法是,在直线 l 上从左至右顺次有 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$,n 个点,在 l 上求一点 P,使得

$L=PA_1+PA_2+\cdots+PA_n$ 最小.不难分析:

$n=2$ 时,P 取线段 A_1A_2 上任一点均可.

$n=3$ 时,P 取点 A_2 时,使得 $L=PA_1+PA_2+PA_3$ 取最小值.

$n=4$ 时,P 取线段 A_2A_3 上任一点均可.

$n=5$ 时,P 取点 A_3 时,使得

$L=PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5$

取最小值.

…

本题正是 $n=5$ 的情况,在 x 轴上找一点 P 使它到点 $-5,-4,-3,-2,-1$ 的距离之和取最小值,此点应取在 -3 点,最小值是 $f(-3)=6$.

二、(满分 20 分)

已知 $f(x)$ 是定义在实数集上的函数.且

$f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$

(1) 试证:$f(x)$ 是周期函数.

(2) 若 $f(1)=2+\sqrt{3}$,试求 $f(1989)$ 的值.

解: (1) 由 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$ 在 R 上有定义.知 $f(x)\neq 1$

$$\therefore\quad f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

$f(x+4)=f[(x+2)+2]$