萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

# 代數學因數分解

林鶴一　津村定一著

黃元吉譯

商務印書館發行

# 代數學
# 因數分解

林鶴一 津村定一著
黃元吉譯

算學小叢書

# 萬有文庫

第一集一千種

總編集者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

**萬有文庫**

第一集一千種

# 代數學—因數分解

林鶴一　津村定一著

黃元吉譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十八年十月初版



The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

FACTORISATION
By
HAYASHI and TSUMURA
Translated by
HUANG YUAN CHI

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929



A四〇七分

# 目　　次

# 代數學—因數分解

## 第一章

### 根據乘法結果之因數分解.

1. **定義**. 化一整式爲多整式之積者, 謂之**因數分解**。

求若干式之積, 其計算爲乘法; **因數分解法**者, 係知其積, 而計算以求其因數者也。

因數分解法無一定之法則, 祇就乘法之結果, 詳細推勘而已; 故初學對之, 深感困難, 雖然, 習之旣熟, 則覺此法爲必不可少, 蓋代數學中諸演算, 多有以因數分解法之能運用與否而判其巧拙也。

2. **各項公共之因數**.

$$ax+bx+cx=x(a+b+c) \qquad \text{分配法則}$$

多項式之各項，有相同之因數者，以所同之因數，括出於括弧之外。

**例 1.** $ax+bx-x=x(a+b-1)$.

**注意.** 此結果勿誤作 $x(a+b)$.

**例 2.** $2a^3b^2x+4a^2b^3y-6a^2b^2cz=2a^2b^2(ax+2by-3cz)$.

［問 1］ 下列諸式。試分解其因數。

(一) $7a^6-21a^4$.　　　　(二) $-x^3y-2x^2y^2$.

(三) $27x^3y^5+54x^5y^3-81x^2y^6$.

*(四) $x^my^3z^2-2x^4y^mz^n+5xy^pz^q$. 但 $m>4,\ n>2,\ p>3,\ q>2$.

**例 3.**
$$3a(x+y)-4b(x+y)(x-y)+c(x+y)^2$$
$$=(x+y)\{3a-4b(x-y)+c(x+y)\}$$
$$=(x+y)\{3a-(4b-c)x+(4b+c)y\}.$$

**例 4.** $a(x-y)+b(y-x)=(x-y)(a-b)$.

**注意.** $y-x=-(x-y)$ 故第二因數爲 $(a-b)$ 勿誤作 $(a+b)$

或演作 $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)$

$=(x-y)(a-b)$ 亦可。

［問 2］ 下列諸式。試分解其因數。

(一) $a(x-y)+bc(x-y)$,

(二) $(a+b)(x+y)^2-(a+b)^2(x+y)$.

(三) $x(x-y)-y(y-x)$.

(四) $ax^2(b-c)-bx(c-b)$.

(五) $(x+y)(a+b-c)-(x-y)(-a-b+c)$.

**注意.** 分解多項式之因數，先就各項察其有無公共之因數；如有公共之因數，則先括出於括弧之外，乃於其括弧內之式，再爲分解。

### 3. 二項式之平方.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

但若 (1) 改 $b$ 爲 $-b$ 則卽可得 (2), 故 (2) 爲含於 (1) 之中云。

二項式之平方,等於各項之平方與其積二倍之和。

注意. $(a+b)^2$ 勿誤作 $a^2+b^2$, 又 $(a-b)^2$ 勿誤作 $a^2-b^2$

[問 3] 求下列諸式之平方。

$$2x+5,\quad 3x-2y,\quad -ax+by,\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{3},\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

[問 4] 若 $x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b$

則 $$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$$

試證明之。

[問 5] 試取 $a+b$ 或 $a-b$ 等爲一項, 依上公式;

求 $a+b+c,\quad a-b+c,\quad a+b-c,\quad -a+b+c$ 及 $a-b-c$ 之平方, 且就下列之式, 求其等數。

$$(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2-(a+b-c)^2$$

[問 6] 依前題方法, 作 $a+b+c+d$ 之平方, 且推及凡多項式之平方, 考究其作法。

又其逆爲 $$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \quad\cdots\cdots(4)$$

但 (4) 卽含於 (3) 之中, 如前所云。

二數之平方和加其積之二倍,爲二數和之平方;由二數之平方和,減其積之二倍,爲二數差之平方。

**注意.** $a^2+b^2$ 勿誤作 $(a+b)^2$, 又 $a^2-b^2$ 勿誤作 $(a-b)^2$

**例 1.** $4a^6+12a^3b^2+9b^4$

$$=(2a^3)^2+2(2a^3)(3b^2)+(3b^2)^2=(2a^3+3b^2)^2.$$

[問 7] 試就下列諸式, 明其爲若何之平方。

(一) $a^2+10ab+25b^2$. (二) $4a^2-12ab+9b^2$.

(三) $1-8x+16x^2$. (四) $16a^4x^4+8a^2x^3+x^2$.

(五) $\frac{a^2}{9}-\frac{ab}{2}+\frac{9b^2}{16}$. (六) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2$.

(七) $2xy-x^2-y^2$. (八) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$.

**例 2.** $2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4$ 分解其因數。

**解** 各項中 $2ab^2$ 爲公共之因數。

$$2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4=2ab^2(a^2+2ab+b^2)=2ab^2(a+b)^2$$

[問 8] 試就下列諸式, 分解其因數。

(一) $3a^3b^3-6a^2b^4+3ab^5$. (二) $20a^5b^2-60a^4b^3+45a^3b^4$.

[問 9] 下列二式, 爲若何之平方, 試證明之。

(一) $9x^4+25(y+z)^2-30(y+z)x^2$.

(二) $(x-y)^2-6(x-y)(y-z)+9(y-z)^2$.

**例 3.** $a^2+4b^2+9c^2-12bc+6ca-4ab$ 爲若何之平方。

**解** 所設之式, 依 $a$ 整頓之,

$$a^2-2a(2b-3c)+(4b^2-12bc+9c^2)$$
$$=a^2-2a(2b-3c)+(2b-3c)^2$$
$$=\{a-(2b-3c)\}^2=(a-2b+3c)^2.$$

[問 10] 下列各式，爲若何之平方。

(一) $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$ [參照問 5]。

(二) $a^2+4b^2+9c^2-12bc-6ca+4ab$.

(三) $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz$.

**例 4.** $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 爲若何之平方。

**解** 以 $3x^2$ 爲 $2x^2+x^2$ 將所設之式變之如次，

$$x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1$$

$$=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2=(x^2+x+1)^2$$

[問 11] 下列三式。爲若何之平方。

(一) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

(二) $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.

(三) $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

[問 12] 試求下列三式之平方根。

(一) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$ [參照問 5]。

(二) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz$.

(三) $x^4-2x^3-x^2+2x+1$.

## 4. 平方之配成.

**定義.** 等於某有理式之平方者，其式稱之爲**完全平方式**，或簡稱之爲**完全平方**。

某式補以適當之項，俾成爲完全平方者，此稱之爲**配成平方**。

例如 $x^2+8x$ 以 $4^2$ 卽 16 加之，

則爲 $x^2+8x+4^2$ 卽配成 $(x+4)^2$ 平方。

又 $x^2-7x$ 以 $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ 卽 $\frac{49}{4}$ 加之，

則爲 $x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2$ 卽配成 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$ 平方。

推之 $x^2+px$ 以 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 加之，

則爲 $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 卽配成 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ 平方。

是欲使 $x^2+px$ 之式成爲完全平方者，以 $x$ 之係數折半自乘以加之可也。

[問 13] 試就下列諸式，配成平方。

$$x^2-6x,\qquad x^2+7x,\qquad x^2+\frac{b}{a}x,\qquad x^2-2(a-b)x.$$

*[問 14] $x^2+px+q$ 及 $ax^2+bx+c$ 可化爲 $(x+l)^2+m$ 及 $a(x+l)^2+m$ 試依此化法，化下列諸式。但 $l$ 及 $m$ 皆爲不含 $x$ 之項。

$$x^2+8x+5,\qquad x^2-13x-7,\qquad 5x^2+6x-10.$$

又例 $x^2+y^2$ 以 $2xy$ 加減，卽配成平方。又 $16x^2+25y^2$ 以 $2\sqrt{16x^2}\sqrt{25y^2}$ 卽 $2\times4x\times5y$ 卽 $40xy$ 加減，卽配成 $(4x+5y)^2$ 或 $(4x-5y)^2$ 之平方。

推之 $A^2+B^2$ 以 $2AB$ 加減，卽配成 $(A+B)^2$ 或 $(A-B)^2$ 之平方。

[問 15] 下列諸式，配成平方。

$$4a^2-9b^2,\qquad x^4+y^4,\qquad x^8+y^8,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}.$$

**注意.** 由上法所得之完全平方式其與所設之原式不相等可知。

## *5. 二次三項式爲完全平方之條件.

二次三項式 $x^2+px+q$ 若爲完全平方, 則依第 3 節公式 (1) 必

爲 $px=2x\sqrt{q}$.

兩邊以 $x$ 除之, 且各自乘,

$$p^2=4q \qquad \therefore \quad q=\frac{p^2}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

此條件備, 則此三項式之爲完全平方明矣。

故二次三項式 $x^2+px+q$ 若爲完全平方, 其必備之條件爲 $p^2=4q$。

又三項式 $ax^2+bx+c$ 此條件由 $bx=2\sqrt{a}x\sqrt{c}$ 知必爲 $b^2=4ac$。

注意. 依上條件。

$$x^2+px+q=0 \qquad 及 \qquad ax^2+bx+c=0$$

兩二次方程式之根, 係與等根之條件相同。

**例** $x^2+mx+121$ 若爲完全平方, 其 $m$ 之値若何。

**解** 因 $m^2=4\times 121$ 故 $m=\pm 22$

讀者試自驗之。

[問 16] 下列諸式若爲完全平方, 其 $p$ 之値若何。

$$x^2-px+64, \qquad x^2-12x+p, \qquad 4x^4+px^2y+9y^2.$$

[問 17] $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$ 若爲完全平方,

則 $9a^2+14ab+9b^2=0$ 試證之。

---

注意. 凡記 * 之處, 初學者從略可也。

[問 18] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{lx+my}{n}\right)^2$ 若爲完全平方，則得式如次，試證明之。

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2.$$

[問 19] 試依問 14 證明本節之條件。

又由本節之條件，證明前節之法則。

## 6. 二數和與差之積.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

二數和與差之積。等於二數平方之差。

**例 1.** $(2a+b^2)(2a-b^2)=4a^2-b^4$.

[問 20] 下列諸式，試求其積。

$(2x+3y)(2x-3y)$, $(-x-y)(x-y)$, $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{5}b\right)$.

**例 2.** $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$

$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

二式之各項兩兩相同，祇其符號不相同者，欲求其積，將各式同項中符號相同者與符號不相同者分別列之，依上公式求之可也。

[問 21] $a^2+ab-2b^2$ 以 $a^2-ab+2b^2$ 乘之。

[問 22] $(8x^3+8x^2+4x+1)(8x^3-8x^2+4x-1)$ 求積。

[問 23] $\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{6}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$ 求積。

[問 24] 下列各式，試求其積。

(一) $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$.

(二) $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$.

*(三) $\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)$.

*(四) $(e^{-x}+e^{x})(e^{-x}-e^{x})+(e^{x}+e^{-x})^2$

**例 3.** $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{b^2+2bc+c^2-a^2\}\{a^2-b^2+2bc-c^2\}$

$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$

$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

$=4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$

$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

[問 25] 下列各式試求其積。

(一) $(ax+by+cz)(ax-by+cz)(ax+by-cz)(-ax+by+cz)$.

(二) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$.

## 7. 二數平方之差.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

此爲前節之逆。二數平方之差，等於二數和與差之積。

**例 1.** $81a^8-16b^4=(9a^4)^2-(4b^2)^2$

$=(9a^4+4b^2)(9a^4-4b^2)=(9a^4+4b^2)\{(3a^2)^2-(2b)^2\}$

$=(9a^4+4b^2)(3a^2+2b)(3a^2-2b)$.

依上公式，凡如 $a^{2m}-b^{2m}$ 之式，皆得利用之，以分解其因數。

[問 26]　下列諸式，試分解其因數。

(一)　$9x^2-25y^4$.　(二)　$a^8-b^8$.　(三)　$625x^4-256y^4$.

(四)　$\frac{a^4}{81}-\frac{b^4}{16}$.　(五)　$x^5-x$.　(六)　$a^2-b^2-(a^2-b^2)^2$

*[問 27]　$x^4-\frac{1}{x^4}$ 以 $x+\frac{1}{x}$ 除之。

**注意.** 依本章開始所述。整式之因數分解，其各因數以在於整式之範圍內爲限。

例如 $a-b$ 雖可化爲 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$，然此二式非有理式。故 $a-b$ 不能分解其因數。

又如 $a^2-3b^2=(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)$ 其右邊之式含無理數，故 $a^2-3b^2$ 亦不能分解其因數。

然若某式須化爲二以上之式（含無理數與否不論）之積，此或屬於除法之事，與上所言爲另一問題。

例如 $a-b$ 以 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 除之。

因 $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 故得商 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

**例 2.**　$(a+b)^2-(a+c)^2$ 分解其因數。

**解**　$(a+b)^2-(a+c)^2=(a+b+a+c)(a+b-a-c)$

$$=(2a+b+c)(b-c).$$

[問 28]　下列諸式，試分解其因數。

(一)　$(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$.

(二)　$(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2$.

(三)　$(x^2+y^2)^4-x^4y^4$.

(四)　$(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3$.