

# 机构运动学与动力学

[美] B. 保罗 著

汪一麟 董师予 石绍琳 译

上海科学技术出版社

# 机构运动学与动力学

[美] B. 保 罗 著

汪一麟 董师予 石绍琳 译

上海科学技术出版社

KINEMATICS AND DYNAMICS  
OF  
PLANAR MACHINERY

Burton Paul

PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs New Jersey 07632

**机构运动学与动力学**

〔美〕 B. 保罗 著

汪一麟 董师予 石绍琳 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

总发行所上海发行所发行 常熟兴隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 17.75 字数 424,000

1989 年 8 月第 1 版 1989 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—1,700

ISBN 7-5323-0767-0/TH·22

定价: 9.00 元

# 译 序

美国宾夕法尼亚大学机械工程教授 Burton Paul 编写的《平面机构的运动学与动力学》一书,是近年来国外出版的同类书中较好的一本。其特点是,用能上机运算的现代解析法处理机械力学问题,这是对传统方法的一个突破。特别是书中对于位置、速度和加速度分析以及单自由度和多自由度机械系统的解析静力学和解析动力学问题阐述得很有特色。美国哥伦比亚大学机械工程系教授 Ferdinand Freudenstein 给予本书很高的评价,称颂本书对提高机械设计方面的工程教育质量作出了重大贡献(见 Mechanism and Machine Theory, Vol. 15, No. 2, 1980, p145)。

考虑到本书既可供工科大学机械类专业的教师、研究生和高年级学生参考,又可供从事机械研究和机械设计的工程技术人员使用,特将本书译成中文出版。为了节约篇幅,我们仅译出原书的第二部分“解析运动学”和第三部分“解析动力学”以及六个附录,而略去原书的第一部分“几何运动学”。略去的这部分有六章,即 1. 机构的术语和特性, 2. 运动学中的复矢量, 3. 齿轮, 4. 凸轮, 5. 薄片的运动, 6. 图解运动学。可见,这六章的内容极大部分可从国内已出版的同类书中找到。此外,为便于阅读,原书中的英制计量单位已全部改为国际单位制(SI)。

限于译者的水平,译文中难免有错误和不当之处,恳请广大的读者予以批评指正。

译者

1987 年夏于上海交大

# 原 序

## 本书的目的

本书讨论变惯量机械(即在正常运转过程中有效转动惯量发生显著变化的机械,例如往复发动机、纺织机械和一般连杆机构)的运动学、静力学和动力学问题。这方面教科书的特点是大量运用图解法。这种倾向无疑是由于这类系统的基本运动方程具有非线性性质所致。要早期的机械设计人员在求解非线性问题用的数学工具很少的情况下去设法解决这类问题是不适当的。因此,过去很少计算瞬变运动(非稳定飞轮状态),而且也不能精确地计算活动构件中的应力。用这种方法时,设计、制造、试验、改进等过程的周期长而费用多。

目前,数字计算机已获得了广泛应用,求解非线性方程(代数方程或微分方程)已成为一件常事。因此,我们在求解运动学和动力学问题时,已使自己基本上摆脱了徒然浪费时间的绘图工作。近年来已出现了对变惯量机械作动力分析用的通用计算机程序,因而在最后一章中将简述这类程序。然而,作者的意图决不是仅仅提出一套能解决该课题中各种问题的方法(或已存程序)。本书所采取的基本做法是,以更加适合于数值分析而不是传统图解分析的方式重新处理运动学和动力学的有关问题。书中所说明的各种方法可用普通电子计算器来加以论证,但这些方法借助于数字计算机(或可编程程序的计算器)可获得最有效的利用。本书为读者提供了丰富的资料,使之能编制各自所需的不同复杂程度的程序,能利用书中已编好的几种程序或能编制较大较复杂的通用程序。

## 本书的范围和体系

为使本书的篇幅不致过大,决定只讨论平面系统。另一个重要决定是着重介绍与直接综合法相对立的解析法。在某种程度上,计算机解析法的快速性为用试凑法进行综合提供了可能性。至于近几年来所建立的许多直接运动综合法,可查阅本书所引用的参考文献。

本书分成三部分。第一部分几何运动学涉及运动学中的经典内容(例如瞬心线、凸轮和齿轮几何学、四连杆机构分类、曲率关系)。这些内容在一般先修的工程力学课程中通常得不到重视。虽然学机械工程的学生必须掌握第一部分所讨论的运动学方面的许多重要概念,但这些内容对本书后面两部分来说不是必需的,因而可以完全删去或部分地删去。由于图解法起校核解析法的作用,而且阅读这方面的很多文献需要预先具备图解法的某种知识,所以本书简要地讨论速度和加速度分析用的图解法。然而,能用图解法求解的任何问题(和不能用图解法求解的许多问题)都可用第二部分所述的解析法来求解。

第二部分解析运动学用不同于传统教科书的方法来讨论运动学问题。先从单环机构着手,说明如何有系统地导出代数式来求各个未知的位移、速度和加速度。这种方法适用于具有各种连接元素和任何自由度的平面机构。然后,说明如何根据连杆机构网络的某些简单拓扑学特性来求最常用多环机构的活动度。关于拓扑学基础知识,见附录D。由于拓扑学单独不能用于确定机构在某些奇异状态(例如死点、转变点或临界状态)下的活动度,因此需

要研究任意给定机构的基本速度矩阵的秩和线性相关这些经典问题。附录 D 矩阵和线性代数方程组为本书读者提供了所需的一切有关数学和数值计算的基础知识。

我们可用机构的独立环路导出合适方程来求系统中各个从动杆的位置、速度和加速度变量。环路的弱耦合和强耦合概念澄清了过去试图把图解法应用于所谓复杂机构时所遇到的困难。

第三部分机构解析动力学说明如何用一种强有力的系统化方法把第二部分所建立的运动学基本概念应用于各种平面机构的静力学和动力学问题。运动学和静力学之间的桥梁是虚功原理,对此将作详细阐述,并将举许多例子加以说明。此外,还大量利用解析力学的基本概念,例如广义坐标、虚位移、无功约束和广义力,并把这些概念与前面所提出的速度分析结合起来以制定任意平面机构中力平衡分析用的一般方法。

引用了广义坐标和广义力的概念以及速度和向心系数的有效计算方法后,即可建立各种单自由度机械系统的基本广义运动方程。

虽然单自由度机械的分析涉及诸如内燃机、冲压机、四杆机构和普通机床等这类重要系统,但更进一步的应用需要作更全面的分析。已经证实,相应的运动方程可根据拉格朗日形式的达朗贝尔原理(即虚功原理的动力通则)按适合于计算机求解的形式导出。

为了充分利用这样列出的多自由度连杆机构的运动方程,必须采用第二部分建立并用过的解析运动学(例如速度和向心系数)中的全部概念。

### 学生水平和课程计划

本书的水平适合于已学过传统工程力学课程的大学生。许多章节的精选内容适合于研究生进修的机械原理课程。

全书可在一学年内讲完,也可安排得完全适合于一学期连续讲授的运动学或动力学课程,或者简明的机构运动学和动力学课程。例如,在宾夕法尼亚大学只用一学期(三年级或四年级)讲授机械力学的全部内容。在该学期内,作者讲授第一部分(几何运动学)的摘录、第二部分(解析运动学)的大部分和第三部分(解析动力学)中单自由度系统动力学的全部内容。

本书的编排为学生编制和使用计算机程序提供了最大的灵活性。有几年,作者讲授了上述的内容而不指定做任何要用计算机求解的习题。有几年,作者花了一学期上课时间的大约 20% 来讨论数值分析和计算机程序用法。为此,在附录中提供了丰富的阅读材料。

### 计算机程序说明

本书中完全列出了下列 FORTRAN 程序;

NEWTR(NEWTON-Raphson 算法),附录 F

DKINAL(KINematics anAlysis, 即运动分析), §4.43

DYREC(DYnamics of RECiprocating machine, 即往复式机械动力学), §6.83, 附录 I

FLYLOOP(FLYwheel design by enèrgy LOOPmethod, 即用能量环路法设计飞轮), §6.92, 附录 J

有关的通用程序(但未列出)有:

KINMAC(KINematics of MACHines, 即机械运动学), §4.43

DYMAC(DYnamics of MACHines, 即机械动力学), §8.40  
STATMAC(STATics of MACHines, 即机械静力学), §8.45  
CAMKIN(CAM KINematics, 即凸轮运动学), §8.40

**伯顿·保罗**

美国费城宾夕法尼亚大学



## 内 容 提 要

本书突破了传统的研究机构学的方法,用现代解析法通过电子计算机运算来求解机械力学问题。全书分“解析运动学”与“解析动力学”二大部分,共计八章及六个附录。书中对位置、速度和加速度的分析以及单自由度和多自由度机械系统的解析运动学和解析动力学问题作了精辟的阐述。本书是现代研究机构学的一本专著,对从事机构学研究的工程技术人员及师生具有一定的参考价值。

十商店 1001

125-2

# 目 录

## 解 析 运 动 学

<b>第一章 单环机构</b> ..... 2	2.2.4 习题 .....41
1.1 四杆机构 ..... 2	<b>第三章 闭式机构的位置分析</b> .....47
1.1.1 需求的点 ..... 4	3.1 概述 .....47
1.1.2 复矢量的应用 (拉梅定理)..... 4	3.2 用牛顿-拉普森法进行位置分析
1.2 具有滑块的机构 ..... 6	..... 47
1.3 具有齿轮或滚动副的机构 ..... 6	3.2.1 在四杆机构方面的应用 .....49
1.4 凸轮机构 ..... 9	3.2.2 在急回机构方面的应用 .....50
1.4.1 圆盘形凸轮 ..... 9	3.2.3 计算机执行过程 .....51
1.4.2 非圆形凸轮 .....10	3.3 其他的位置分析方法 .....54
1.4.3 凸轮副的基本辅助方程 .....13	3.4 习题 .....55
1.5 多自由度单环系统 .....14	<b>第四章 速度和加速度分析</b> .....59
1.6 习题 .....16	4.1 概述 .....59
<b>第二章 运动学中的自由度和约束</b> .....21	4.2 弱耦合环路 .....61
2.1 拉格朗日坐标和广义坐标 .....21	4.3 强耦合环路 .....63
2.1.1 由离散质点组成的系统 .....21	4.4 运动分析的数值方法 .....65
2.1.2 由刚体组成的系统 .....23	4.4.1 代数方程法 .....65
2.1.3 广义坐标 .....24	4.4.2 微分方程法 .....68
2.1.4 非完整约束 .....25	4.4.3 运动分析用的计算机程序 .....68
2.1.5 习题 .....26	4.5 速度系数和加速度系数 .....76
2.2 活动度分析 .....28	4.5.1 单自由度系统 .....76
2.2.1 格鲁布勒型公式 .....28	4.5.2 多自由度系统 .....82
2.2.2 环路活动度判据 .....33	4.6 习题 .....85
2.2.3 奇异构形 .....38	

## 解 析 动 力 学

<b>第五章 静力学</b> .....90	5.4 有功约束(保守的).....105
5.1 矢量静力学 .....90	5.4.1 弹簧力.....106
5.2 虚功原理的预备概念 .....91	5.4.2 势能.....107
5.2.1 虚位移 .....92	5.4.3 习题.....114
5.2.2 虚功和广义力 .....94	5.5 反力的计算.....116
5.2.3 理想(无功)约束 .....97	5.5.1 惯用的符号.....116
5.2.4 习题 .....98	5.5.2 理想机构中的反力.....118
5.3 虚功原理(陈述).....101	5.5.3 习题.....123
5.3.1 习题.....104	5.6 摩擦的静力效应.....125

5.6.1 滑块的摩擦	127	7.1 刚性转子的平衡——一般结论	199
5.6.2 铰链中的摩擦	131	7.1.1 具有已知不平衡量的转子	202
5.6.3 死区	136	7.1.2 平衡机和平衡装置	211
5.6.4 习题	137	7.2 往复式(曲柄滑块)机械的平衡	214
5.7 虚功原理(证明)	138	7.2.1 单缸发动机的振动力和振动力矩	214
<b>第六章 单自由度系统的动力学</b>	<b>141</b>	7.2.2 多缸发动机的惯性力平衡	219
6.1 引言	141	7.3 平面连杆机构的平衡	230
6.2 符号	142	7.3.1 四连杆机构的惯性力平衡	230
6.3 动能和广义惯量	143	7.3.2 由惯性力引起的支反力	234
6.3.1 动力等效杆	145	7.4 习题	235
6.4 广义运动方程	147	<b>第八章 多自由度机构的动力学和通用</b>	
6.5 保守系统的能量积分法	150	<b>计算机程序简介</b>	<b>242</b>
6.5.1 一般结论	150	8.0 引言	242
6.5.2 定性讨论——平衡的稳定性	151	8.1 拉格朗日形式的达朗贝尔原理	242
6.5.3 例题	153	8.2 运动方程的数值积分	245
6.6 运动方程的积分	158	8.3 适用于机械动力学的通用计算	245
6.6.1 最少微分方程法	159	机程序综述	245
6.6.2 过剩微分方程法	160	8.4 程序 DYMAC 简述	247
6.7 动态静力学	162	8.4.1 程序特性	247
6.8 往复式发动机的动力学	163	8.4.2 建立机构模型	248
6.8.1 发动机的广义惯量和动能	165	8.4.3 建立主动力、弹簧和阻尼器的模型	250
6.8.2 广义力	167	8.4.4 建立运动生成约束条件的模型	251
6.8.3 发动机的瞬态性能——一般情况	172	8.4.5 例题	252
6.8.4 承受与速度无关的载荷时的性能	175	<b>附录 A 格拉斯霍夫定理</b>	<b>255</b>
6.8.5 多缸发动机中的功率修匀	177	<b>附录 B 作为回转算子的复数</b>	<b>256</b>
6.8.6 轴承反力	178	<b>附录 C 双辐角反正切函数</b>	<b>258</b>
6.9 飞轮的计算	181	<b>附录 D 图论(网络拓扑学)的概念</b>	<b>259</b>
6.9.1 用计算机模拟法设计飞轮	183	<b>附录 E 矩阵和线性代数方程组</b>	<b>264</b>
6.9.2 用能量环路法设计飞轮	183	<b>附录 F 牛顿-拉普森算法</b>	<b>271</b>
6.9.3 威顿鲍尔半图解法	189	<b>参考文献(从略)</b>	
6.10 习题	190		
<b>第七章 机械的平衡</b>	<b>199</b>		
7.0 引言	199		

# 解 析 运 动 学

由于运动学就是运动几何学，所以经典的几何论证曾对运动学的发展起了主要作用。然而，把运动学的基本几何内容变换成代数或解析型式是有利的。这种方法可利用代数几何学的各种常见优点，但更重要的是，使我们能定量分析问题，从而能广泛地使用数字计算方法。此外，解析运动学形了解析动力学(第三部分的内容)固有而必要的序幕。

为了以简明、直接和实用的方法说明解析运动学的基本概念，我们在第一章中讨论单闭环机构，在第二章中讨论一般原理，接着制定一种推导任意平面机构基本运动方程的统一而有系统的方法。

可以看出，机构中的位移取决于不能求闭式解的非线性代数方程。然而，即使不能求特定机构中位移的显代数式，也总是能求其数值。还可以看出，速度和加速度取决于能求显解的线性代数方程。

应该记得，图解法对于所谓复杂机构是无能为力的，而解析法对于各种平面机构都完全有效。

# 第一章 单环机构

## 1.1 四杆机构

最简单的闭环机构就是各杆形成单一封闭多边形的那些机构，如图 1 所示。为方便起见，对各回转杆规定一个正的矢量指向，例如从  $A$  到  $B$ ，并从固定轴  $\alpha$  按逆时针方向（在三角学中为正向）取该杆的角度。根据这种规定，图 1(a) 中杆  $CD$  的瞬时角  $\theta_3$  在第四象限内。图 1(b) 中杆  $BC$  的长度  $r_2$  是可变的，而其角度与滑块（杆 3）的角度相同，即  $\theta_3 = \theta_2$ 。

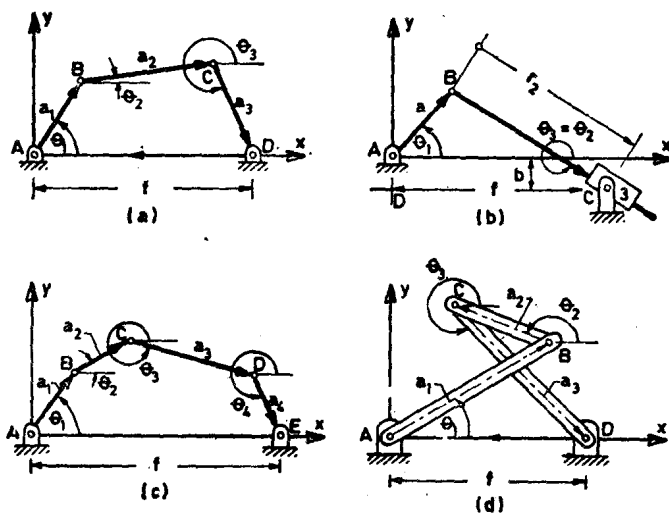


图 1.1-1 单环机构

- (a) 四杆机构(单自由度); (b) 由曲柄滑块机构演化而成的摇块机构(单自由度); (c) 五杆机构(两自由度); (d) 交叉四杆机构(单自由度)

因为封闭矢量多边形的矢量和等于零，所以对于图 1(a) [或图 1(d)] 可以写出：

$$AB + BC + CD + DA = 0 \quad (1)$$

对于图 1 中的各个机构，都可以写出类似的矢量环路方程。现举一些具体例子来说明如何用环路方程来求解位置、速度、加速度或任何其它的运动变量。

矢量方程(1)相当于两个位置环路方程①

$$\begin{aligned} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 - f &= 0 \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

方程(2)仅说明封闭矢量多边形中各矢量在  $x$  轴(和  $y$  轴)上的投影之和等于零；凡是学过静力学的学生无疑都熟悉这一点。

现假定杆 3 是主动杆。因此， $\theta_3$  为已知，而方程(2)提供了两个求未知变量  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的方程，若按照给定的数据该机构确能运动，就能解出这两个未知变量。例如，能定出不形成封闭多边形(若  $a_1 + a_2 + a_3 < f$ )的杆长，或定出所不能形成的  $\theta_3$  角。事实上，大家知道，从

① 有时称为位移环路方程。

方程(2)可以解出以  $\theta_3$  表示的  $\theta_1$  和  $\theta_2$  显代数式。这里只要指出,若规定了一个输入(或主动)变量,由这两个环路方程就足以确定构形。可见,该系统是单自由度系统(1 DOF)。

假定在给定的  $\theta_3$  值( $\theta_3 \equiv q$ )下,可用某种方法(代数法、数值法或图解法)求出相应的  $\theta_1$  和  $\theta_2$  值。这时位置变量为已知,因而当给定了以  $\dot{q}$  表示的主动速度  $\dot{\theta}_3$  的某种数值后,就能设法求出各杆的速度。求方程(2)的微分,可得速度环路方程如下:

$$\begin{aligned} a_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + a_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + a_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 &= 0 \\ a_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + a_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + a_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

因为  $\dot{\theta}_3 = \dot{q}$  为已知,所以方程(3)表示两个求两个未知量的线性方程,可把它写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} a_1S_1 & a_2S_2 \\ a_1C_1 & a_2C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3\dot{q}S_3 \\ -a_3\dot{q}C_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中已引入了缩写符号

$$S_i \equiv \sin\theta_i, C_i \equiv \cos\theta_i \quad (5)$$

对于方程(4),不难解出<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{-a_3a_2\dot{q}(S_3C_2 - C_3S_2)}{a_1a_2(S_1C_2 - C_1S_2)} = \dot{q} \frac{a_3}{a_1} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{-a_1a_3\dot{q}(S_1C_3 - C_1S_3)}{a_1a_2(S_1C_2 - C_1S_2)} = \dot{q} \frac{a_3}{a_2} \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (6)$$

有时为方便起见,以影响系数或速比  $k_{13}$  和  $k_{23}$  表示速度,  $k_{13}$  和  $k_{23}$  的定义为:

$$k_{13} = \dot{\theta}_1/\dot{\theta}_3, k_{23} = \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_3 \quad (7a)$$

若承认杆3是主动杆,就可略去式(7a)中的第二个下标而简写成:

$$\dot{\theta}_1 = k_1\dot{q}, \dot{\theta}_2 = k_2\dot{q} \quad (7b)$$

除非另有说明,后面将假定杆3是主动件,并用单下标符号。

从方程(6)可知

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_3} \equiv \frac{a_3\sin(\theta_2 - \theta_3)}{a_1\sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ k_2 &\equiv \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_3} \equiv \frac{a_3\sin(\theta_3 - \theta_1)}{a_2\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (8)$$

由此可见,一旦知道了位置变量,就不难计算速度了。

为了求加速度,可求速度环路方程(3)的微分,得加速度环路方程如下:

$$\begin{aligned} a_1S_1\ddot{\theta}_1 + a_2S_2\ddot{\theta}_2 &= -a_3S_3\ddot{\theta}_3 - \sum_i a_iC_i\dot{\theta}_i^2 \equiv R_1 \\ a_1C_1\ddot{\theta}_1 + a_2C_2\ddot{\theta}_2 &= -a_3C_3\ddot{\theta}_3 + \sum_i a_iS_i\dot{\theta}_i^2 \equiv R_2 \end{aligned} \quad (9)$$

若  $\ddot{\theta}_3$  的值  $\ddot{q}$  为已知,则只要预先解出了位置变量和速度变量,就可知道方程(9)的右边各项(以  $R_1$  和  $R_2$  表示)。因此,求解方程(9)可得加速度如下:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{R_1a_2C_2 - R_2a_2S_2}{a_1a_2(S_1C_2 - C_1S_2)} = \frac{R_1C_2 - R_2S_2}{a_1\sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{a_1S_1R_2 - a_1C_1R_1}{a_1a_2(S_1C_2 - C_1S_2)} = \frac{-R_1C_1 + R_2S_1}{a_2\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (10)$$

① 对于由两个线性代数方程组成的方程组,用克莱姆法则求解特别方便。

### 1.1.1 需求的点

常常要确定某机构中一个规定杆上  $P$  点的位置、速度和加速度。例如,图 1 所示的四连杆机构连杆上的  $P$  点用固定座标  $\xi_2$  和  $\eta_2$  来表示,而这两个坐标是在固结于杆 2 上的坐标系中测得的。为了表示固定于杆 1 和杆 3 上的各点,可把类似的坐标系  $(\xi_1, \eta_1)$  和  $(\xi_3, \eta_3)$  固结于杆 1 和杆 3 上(见图 2)。

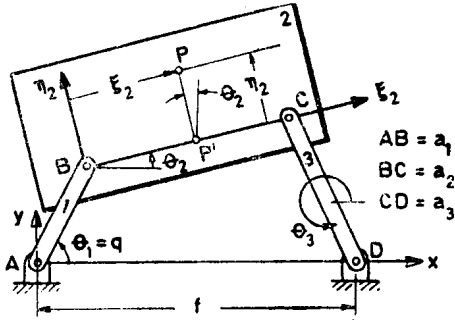


图 1.1.1-1 四连杆机构

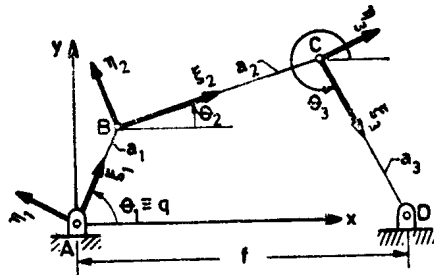


图 1.1.1-2 四连杆机构的局部坐标轴

在固定坐标系  $x, y$  中, 矢量  $AP$  的坐标为  $(x_p, y_p)$ 。以  $P'$  表示  $P$  点在  $BC$  线上的投影, 可写出部分环路① 矢量方程:

$$AP = AB + BP' + P'P \quad (1)$$

方程(1)代表两个标量方程

$$x_p = a_1 \cos \theta_1 + \xi_2 \cos \theta_2 - \eta_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

$$y_p = a_1 \sin \theta_1 + \xi_2 \sin \theta_2 + \eta_2 \cos \theta_2$$

求方程(2)的微分, 可得部分环路速度方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= -a_1 S_1 \dot{\theta}_1 - (\xi_2 S_2 + \eta_2 C_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_p &= a_1 C_1 \dot{\theta}_1 + (\xi_2 C_2 - \eta_2 S_2) \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

若根据前面对完全环路  $ABCD A$  所作的分析求得了  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1$  和  $\dot{\theta}_2$ , 则方程(3)就唯一地确定了所求的速度分量。求方程(3)的微分, 就不难求得连杆上该点的加速度分量, 即:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= -a_1 (S_1 \ddot{\theta}_1 + C_1 \dot{\theta}_1^2) - (\xi_2 S_2 + \eta_2 C_2) \ddot{\theta}_2 - (\xi_2 C_2 - \eta_2 S_2) \dot{\theta}_2^2 \\ \ddot{y}_p &= a_1 (C_1 \ddot{\theta}_1 - S_1 \dot{\theta}_1^2) + (\xi_2 C_2 - \eta_2 S_2) \ddot{\theta}_2 - (\xi_2 S_2 + \eta_2 C_2) \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (4)$$

利用图 2 所示的固结坐标轴  $(\xi, \eta)$ , 可按类似的方法求得连架杆上各点的速度和加速度(见习题 1.60-1)。

### 1.1.2 复矢量的应用(拉梅定理)②

现来说明如何利用复矢量求得上面的结果。

矢量环路方程(1.1-1)可表示为:

$$a_1 e^{i\theta_1} + a_2 e^{i\theta_2} + a_3 e^{i\theta_3} - f = 0 \quad (1)$$

求方程(1)各项的微分, 可得速度环路方程:

① 部分环路一词用于区分方程(1)和考虑完全环路而得的方程, 例如方程(1.10-1),

② 略去本节并不影响全书的连贯性,

$$i[a_1\theta_1 e^{i\theta_1} + a_2\theta_2 e^{i\theta_2} + a_3\theta_3 e^{i\theta_3}] = 0 \quad (2)$$

注意,  $e^{i\theta_1}$ ,  $e^{i\theta_2}$  和  $e^{i\theta_3}$  分别是沿 **AB**, **BC** 和 **CD** 方向的单位矢量(图 1.1.1-2), 因此, 可将方程(2)方括号中的各项表示为:

$$g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_3 U_3 = 0 \quad (3)$$

式中

$$g_k \equiv a_k \dot{\theta}_k, \quad U_k \equiv e^{i\theta_k} \quad (k=1, 2, 3) \quad (4)$$

必须指出, 矢量方程(3)含有两个未知标量  $g_1$  和  $g_2$ 。所有的单位矢量  $U_k$  均为已知, 正如标量  $g_3 \equiv a_3 \dot{\theta}_3$ 。我们将发现, 在以后的运算中会重复出现这类方程。因此, 值得求该矢量方程的通解。借助图 1 不难做到这一点, 图 1 把方程(3)表示为一个封闭的矢量三角形, 其中  $\mathbf{AB} \equiv g_1 U_1$ ,  $\mathbf{BC} \equiv g_2 U_2$ ,  $\mathbf{CA} \equiv g_3 U_3$ , 而  $g_1, g_2, g_3$  表示各边长度。对于三角形  $ABC$ , 应用正弦定律两次, 可得:

$$\frac{g_1}{g_3} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \quad (5)$$

$$\frac{g_2}{g_3} = \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \quad (6)$$

方程(5)和(6)代表矢量方程  $g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_3 U_3 = 0$  的通解。对于  $g_k = a_k \dot{\theta}_k$  这个特例, 方程(5)和(6)复演方程(1.1-8)所示的速比。这就说明了如何根据复数形式的速度环路方程直接求得速比的显式。

方程(5)和(6)称为拉梅定理<sup>①</sup>, 考虑到任意给定一行上的下标都遵循数字的循环排列, 即 (1, 2, 3)、(2, 3, 1)或(3, 1, 2), 就不难记住这两个方程。

方程(2)的另一种用途是指导速度多边形  $abc$  的作图(见习题 1.6-25)。

作为一个习题(习题 1.6-26), 试证明求方程(2)的微分而得到的加速度环路方程:

$$a_1 \ddot{\theta}_1 (iU_1) + a_2 \ddot{\theta}_2 (iU_2) + a_3 \ddot{\theta}_3 (iU_3) - a_1 \dot{\theta}_1^2 U_1 - a_2 \dot{\theta}_2^2 U_2 - a_3 \dot{\theta}_3^2 U_3 = 0 \quad (7)$$

可指导加速度多边形的作图。

另一方面, 可把方程(7)写成:

$$h_1 V_1 + h_2 V_2 + h_3 V_3 = 0 \quad (8)$$

式中

$$h_1 V_1 \equiv a_1 \ddot{\theta}_1 iU_1 - \sum_{i=1}^3 a_i \dot{\theta}_i^2 U_i \equiv h_1 e^{i\phi_1} \quad (9)$$

$$h_2 \equiv a_2 \dot{\theta}_2^2, \quad h_3 \equiv a_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (10)$$

$$V_2 = iU_2 \equiv e^{i\phi_2}, \quad V_3 = iU_3 \equiv e^{i\phi_3} \quad (11)$$

必须指出, 单位矢量  $V_i$  的辐角用  $\phi_i$  表示。

若给定了  $\dot{\theta}_1$  和  $\dot{\theta}_3$ , 而  $\dot{\theta}_2$  和  $\dot{\theta}_3$  已根据前面的速度分析求得, 就可应用拉梅定理解方程

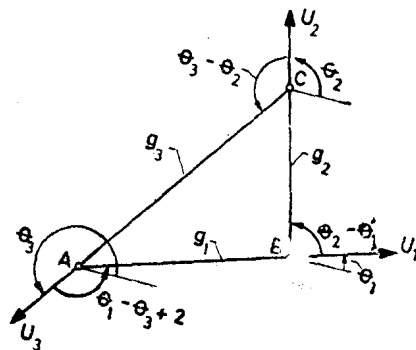


图 1.1.2-1 用图表示矢量方程:  $g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_3 U_3 \equiv \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = 0$

<sup>①</sup> Bernard Lamy(1645~1715年)在他所著的“Traite de Mecanique”[1679年]一书中曾引用方程(5)和(6)来描述三个力矢量的平衡。



(8)而求出未知的加速度  $\ddot{\theta}_2$  和  $\ddot{\theta}_3$ ,

$$\frac{a_2 \ddot{\theta}_2}{a_1 \ddot{\theta}_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\sin(\phi_3 - \phi_1)}{\sin(\phi_2 - \phi_3)}, \quad \frac{a_3 \ddot{\theta}_3}{a_1 \ddot{\theta}_1} = \frac{h_3}{h_1} = \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\sin(\phi_2 - \phi_3)} \quad (12)$$

计算了方程(12),就可按方程(9)求得  $h_1$  和  $\phi_1$ , 同时从方程(11)可知,  $\phi_2$  和  $\phi_3$  只不过是  $\theta_2 + 90^\circ$  和  $\theta_3 + 90^\circ$ 。

## 1.2 具有滑块的机构

举一个例子就足以说明具有滑块的机构的分析方法。图1中连杆机构的位移环路方程为:

$$a \cos \theta + r \cos \phi - d = 0 \quad (1)$$

$$a \sin \theta - r \sin \phi = 0 \quad (2)$$

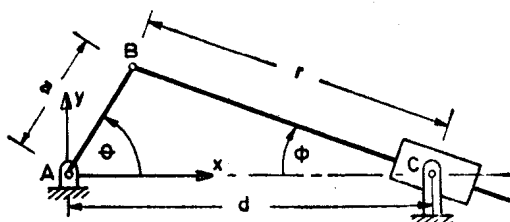


图 1.2-1 摇块机构

若将  $\theta$  作为输入变量,则位移的解可简明地写成:

$$\phi = \arctan_2(r \sin \phi, r \cos \phi) = \arctan_2(a \sin \theta, d - a \cos \theta) \quad (3)$$

$$r = \frac{a \sin \theta}{\sin \phi} \quad (4)$$

求方程(1)和(2)对时间的微分,可得速度环路方程

$$-a\dot{\theta} \sin \theta + \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi = 0 \quad (5)$$

$$a\dot{\theta} \cos \theta - \dot{r} \sin \phi - r\dot{\phi} \cos \phi = 0 \quad (6)$$

方程(5)和(6)的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \end{bmatrix} = a\dot{\theta} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

不难用克莱姆法则解方程(7)而求出:

$$\dot{r} = \frac{-(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)}{-(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} a\dot{\theta} = a\dot{\theta} \sin(\theta + \phi) \quad (8)$$

$$r\dot{\phi} = \frac{-\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta}{-1} a\dot{\theta} = a\dot{\theta} \cos(\theta + \phi) \quad (9)$$

求方程(8)和(9)的微分,可得加速度  $\ddot{r}$  和  $\ddot{\phi}$ 。

## 1.3 具有齿轮或滚动副的机构

当具有齿轮或滚动副时,必须给环路方程加一些辅助方程以表示接触点上的无滑动条件。现举两个例子来说明其分析方法。