立信财经丛书

财会数学续编

蔡　芷●编写

封面设计：范一辛

立信财经丛书

财会数学续编

蔡 芷 编著

立信会计图书用品社出版发行

（上海中山西路2230号）

新华书店经销

立信梅李印刷联营厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 10.75 插页 2 字数 263,000

1988 年 9 月第 1 版 1988 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5429-0028-5 / F·0028

定价：3.30元

编写说明

《财会数学续编》是以“线性规划”为内容。它在数学体系上与《财会数学》中的“线性代数”紧密衔接；在财会管理方面应用较广，效果较好，具有较高的实用价值。

本书选材有一定的广度和深度。对于具体方法，广采博纳，诸如图上作业法、表上作业法、几何图解法、代数方程法、单纯形法、对偶方法等，都有全面的介绍，以期读者融会贯通。对于数学理论的基本定理、判别准则等也都作了扼要论证，以期读者深刻理解原理。为了使读者能顺利地阅读本书，书中举述例题较多，阐述内容力求详细明白。在有关章次特别列述经济解释一节，以加强它的实用性。

本书可供财经院校有关专业作为教材，学习时间约一个学期。由于各章之间的独立性较强，在教学时可根据具体情况酌选章节。对于已经学过线性代数的财会、经济工作者，可用本书作为自学读物。本书每章之后列有习题，书末附有答案，以供练习、参考之用。

最后，编者衷心地希望读者对本书的错误、缺点，提出批评意见。

编　者

1984年10月

目　　录

第一章　线性规划问题的类型与数学模型

线性规划是寻求某类问题最优解答的一种数学方法。它从萌芽以来，虽然只有四十余年的历史，但由于其数学理论比较成熟，计算方法颇为成功，因此在生产活动和企业管理等方面的应用较为广泛，是应用数学的一个重要部分。

所谓线性，是指问题的数学表达式是变量的一次式，也就是线性式；所谓规划，是指对未来的工作、行动的决策、计划。所以，线性规划是研究经济、技术等问题的线性表达式的最优方案。下面举一些例子说明线性规划的内容、类型和数学模式。

第一节　线性规划问题的类型

线性规划所研究的问题有最小值与最大值两种类型。

一、最小值问题

若工作任务已经确定，要在完成任务的前提下，使经济上的耗费最省。例如，要完成某种物资的运输任务，如何使运输费用最小；再如，要完成计划的生产数量，如何使生产成本最低；又如，要完成若干项工作，如何分配工作人员（或机器设备）使所花费的工时最省。这类问题都是寻找最小值问题。

例 1　某种商品在 A_1、A_2 两地的产量分别为 100 吨和 150 吨，在 B_1、B_2、B_3 三个销地的需求量分别为 50 吨、80 吨和 120 吨。

从每个产地到每个销地的单位运价(元/吨)如下：

产地	销地		
	B_1	B_2	R_3
A_1	5	6	3
A_2	4	2	1

要求在完成运输任务，把商品从产地运往销地，使产销数量平衡的条件下，达到总运费最小。

讨论(一) 问题的解

我们的目标是使总运费最小，如果不考虑完成运输任务这一条件，则最小的总运费是零，即不调运商品；如果只考虑完成运输任务这一条件，不考虑运费的多少，则可以有许多调运方案，即问题有许多解。例如：

调运方案(一) 单位：吨

产地	销地			供给量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	50	50		100
A_2		30	120	150
需求量	50	80	120	250

调运方案(二) 单位：吨

产地	销地			供给量
	B_1	B_2	B_3	
A_1			100	100
A_2	50	80	20	150
需求量	50	80	120	250

调运方案(三) 单位：吨

产地	销地			供给量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	20	30	50	100
A_2	30	50	70	150
需求量	50	80	120	250

按照各地间的单位运价，计算各个方案的总运费如下：

方案(一)的总运费

$$50\times5+50\times6+30\times2+120\times1=730(\text{元})$$

方案(二)的总运费

$$50\times4+80\times2+100\times3+20\times1=680(\text{元})$$

方案(三)的总运费

$$20\times5+30\times4+30\times6+50\times2+50\times3+70\times1=720(\text{元})$$

三个调运方案的总运费各不相同，而且还可以写出千百个不同的调运方案。怎样确定一个最优方案，使总运费最小，这就是线性规划问题。

讨论(二) 问题的数学模式

我们假设从产地 A_1 运到销地 B_1 的商品数量为 x_{11} 吨，从产地 A_i 运到销地 B_j 的商品数量为 x_{ij} 吨。于是有一般的调运方案如下：

调运方案 单位：吨

产地	销地			供给量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	100
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	150
需求量	50	80	120	250

因为供给量与运出数量平衡，所以有方程

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}&=100 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}&=150 \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

因为需求量与调入数量平衡，所以有方程

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}&=50 \\ x_{12}+x_{22}&=80 \\ x_{13}+x_{23}&=120 \end{aligned}\right\} \qquad ②$$

因为运输量 x_{ij} 是正数或是零，不可能是负数，所以有

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2 \quad j=1,2,3) \qquad ③$$

我们要求这个调运方案的总运费(Z)最小(min)。按运价列出总运费的表达式

$$\min Z = 5x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+4x_{21}+2x_{22}+x_{23} \qquad ④$$

上面的 ① ② ③ 式是本例的限制条件，④ 式是本例的目标函数，它们构成了本例的数学模式。

例 2 有甲、乙两种肥料，价格分别为 2 元/公斤和 1.5 元/公斤。每种肥料都含有 A、B、C 三种成分，其含量如下：

成　　分	[illegible]	
	甲	乙
A	50%	10%
B	30%	20%
C	20%	70%
合　　计	100%	100%

对 A、B、C 三种成分的最低需要量各为 20 公斤、30公斤、35 公斤。在满足需求的条件下，应购买两种肥料各几公斤，使总成本最低？

讨论(一)　问题的解

我们的目标是使总成本最低，如果不考虑最低需要量这一限制条件，则最低总成本是零，即不购买肥料。如果只考虑满足最低

需要量这一条件，不考虑成本多少，则可以有许多购买方案，即问题有许多解。例如：

方案(一) 购买甲种肥料 175 公斤。

成本

$$175\times 2=350(\text{元})$$

含有 A 成分 87.5 公斤，B 成分 52.5 公斤，C 成分 35 公斤。

方案(二) 购买乙种肥料 200 公斤。

成本

$$200\times 1.5=300(\text{元})$$

含有 A 成分 20 公斤，B 成分 40 公斤，C 成分 140 公斤。

方案(三) 购买甲种肥料 20 公斤，乙种肥料 120 公斤。

成本

$$20\times 2+120\times 1.5=220(\text{元})$$

含有 A 成分 22 公斤，B 成分 30 公斤，C 成分 88 公斤。

三个购买方案都能满足最低需要量，但成本各不相同，而且还有写不完的购买方案。怎样确定一个既能满足对各种成分的需求，又使总成本最低的最优方案，这就是线性规划问题。

讨论(二) 问题的数学模式

两种肥料的购买量是变量。设甲、乙两种肥料的购买量分别为 x 和 y，则对三种成分的需求写成限制条件是

$$\left.\begin{array}{ll} A\ \text{成分的需求} & 0.5x+0.1y\geqslant 20 \\ B\ \text{成分的需求} & 0.3x+0.2y\geqslant 30 \\ C\ \text{成分的需求} & 0.2x+0.7y\geqslant 35 \end{array}\right\} \quad ①$$

肥料的购买量 x、y 不可能是负数，所以有

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0 \quad ②$$

我们要求总成本(Z)最低(min)，按价格列出总成本的表达式

$$\min Z=2x+1.5y \quad ③$$

上面的①、②式是本例的限制条件，③式是本例的目标函数，它们构成了本例的数学模式。

二、最大值问题

若人力、物力、财力等资源有限，要在资源的限制条件下，获取最大的经济效益。例如，原料的供应有限，如何充分利用有限原料，使利润最大；又如，机器设备的加工能力有限，如何合理安排生产，使产量最高。这类问题都是寻找最大值问题。

例 3 某工厂生产甲、乙两种产品，每种产品都需耗用A、B、C三种原料。每一单位产品对原料的耗用量（公斤/件）如下：

原料	产品	
	甲	乙
A	2	1
B	2	3
C	4	3

A、B、C三种原料的供应数量有限。它们的最高供应限量分别为100公斤、180公斤、210公斤。在原料供应的限制下，如何安排产品生产计划，使总产量（件数）最高？

讨论（一） 问题的解

我们的目标是总产量最高，如果不考虑原料供应的限制，则可以无限制生产，总产量达到无穷大，当然，这实际上是不可能的；如果只考虑原料的限制，不考虑产量多少，则有许多生产方案。例如：

方案（一） 生产甲产品 50 件。

方案（二） 生产乙产品 60 件。

方案（三） 生产甲产品 15 件，乙产品 50 件。

每个方案耗用原料的情况：

原料	供应限量	耗用数量		
		方案(一)	方案(二)	方案(三)
A(公斤)	100	50×2=100(完)	60×1=60	15×2+50×1=80
B(公斤)	180	50×2=100	60×3=180(完)	15×2+50×3=180(完)
C(公斤)	210	50×4=200	60×3=180	15×4+50×3=210(完)
总产量(件)		50	60	65

三个生产方案耗用原料都没有超过限量，但总产量各不相同。还可以订出许多生产方案。怎样确定一个既不超过原料的限量，又使总产量最高的最优方案，这也是线性规划问题。

讨论(二)　问题的数学模式

两种产品的生产量是变量。设甲、乙两种产品的生产量分别为 x_1 和 x_2，则三种原料的供应限制条件是

$$\left.\begin{array}{ll} A\ \text{原料的限制} & 2x_1+x_2\leqslant 100 \\ B\ \text{原料的限制} & 2x_1+3x_2\leqslant 180 \\ C\ \text{原料的限制} & 4x_1+3x_2\leqslant 210 \end{array}\right\} \quad ①$$

因为生产量 x_1、x_2 不可能是负数，所以有

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0 \quad ②$$

我们要求生产总数量(Z)最高(max)，列出总产量的表达式

$$\max Z=x_1+x_2 \quad ③$$

上面的①、②式是本例的限制条件，③式是本例的目标函数，它们构成了本例的数学模式。

例 4　有 A_1、A_2、A_3 三名工人，分派去担任 B_1、B_2、B_3 三项工作。每名工人只可担任一项工作，每项工作只需一名工人。由于每人的特长不同，担任各项工作所创造的产值也不同，具体如下表，如何分派工作，创造的总产值最大？

产值表 单位：元

工人	工作		
	B_1	B_2	B_3
A_1	9	7	5
A_2	8	2	3
A_3	6	4	3

讨论(一) 问题的解

我们的目标是获得最大总产值，在一名工人干一项工作的条件限制下。全部分派方案是三个元素的全排列，共有 3！= 6 种分派方案。例如：

单位：元

方案（一）			方案（二）		
工人	工作	产值	工人	工作	产值
A_1	B_1	9	A_1	B_2	7
A_2	B_2	2	A_2	B_3	3
A_3	B_3	3	A_3	B_1	6
总产值		14	总产值		16

写出全部 6 个方案进行比较，可以选出总产值最大的最优分派方案。

如果有 5 名工人分派 5 项工作，则就有 5！= 120 种分派方案，要对所有方案进行比较选择，将费时很多。如果人数更多，要写出所有方案，简直不大可能。但是，应用线性规划方法可以比较容易地得出最优的分派方案。

讨论(二) 问题的数学模式

我们假设第 1 名工人（A_1）干第 1 项工作（B_1）的人数为 x_{11}，第 i 名工人干第 j 项工作的人数为 x_{ij}。于是有一般的分派方案如下：

分派方案 单位：人

工人	工作		
	B_1	B_2	B_3
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

因为一名工人只能派一项工作，所以 x_{ij} 的取值只有两种情况，即

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij}=1 \quad \text{（表示被分派）} \\ x_{ij}=0 \quad \text{（表示未分派）} \end{array}\right\} \qquad ①$$

因为每名工人只派一项工作，所以有方程式

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 & \text{干一项工作} & x_{11}+x_{12}+x_{13}=1 \\ A_2 & \text{干一项工作} & x_{21}+x_{22}+x_{23}=1 \\ A_3 & \text{干一项工作} & x_{31}+x_{32}+x_{33}=1 \end{array}\right\} \qquad ②$$

因为每项工作只需一名工人，所以有方程式

$$\left.\begin{array}{lll} B_1 & \text{有一名工人} & x_{11}+x_{21}+x_{31}=1 \\ B_2 & \text{有一名工人} & x_{12}+x_{22}+x_{32}=1 \\ B_3 & \text{有一名工人} & x_{13}+x_{23}+x_{33}=1 \end{array}\right\} \qquad ③$$

我们要求总产值（Z）最大（max），按产值表列出表达式

$$\max Z = 9x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+8x_{21}+2x_{22} + 3x_{23}+6x_{31}+4x_{32}+3x_{33} \qquad ④$$

上面的①、②、③式是本例的限制条件，④式是本例的目标函数，由它们组成本例的数学模式。

寻求目标的最小值和最大值的两种不同类型的线性规划问题具有以下共同的特征：

1．规划者有一组可以控制的变量，称为可控变量或决策变量。例如商品的调运数量，肥料的采购数量，产品的生产数量等等。

2. 由于经济、技术等方面的原因，存在着一系列的限制条件(也称约束条件)，这些条件可以用可控变量的一组线性方程式或者线性不等式来表达。例如商品供需的平衡方程、原材料消耗受供应限制的不等式等等。

3. 规划者有一个明确的目标，要求这个目标能达到最优化(最大值或最小值)，而且这个目标能用可控变量的线性函数(称做目标函数)表示。例如最小的运输费用、最高的生产数量等等。

这三个特征(可控变量、约束条件、目标函数)是构成线性规划问题的要素。而所谓线性规划问题就是寻求可控变量的一组数值，使它既满足约束条件，又达到目标函数的最优值（即最大或最小值)。

第二节 线性规划问题的数学模型

根据线性规划问题的特征，我们可以把它的具体数学模式写成一般的数学模型。

一、最大值类型

求变量$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$的一组数值，使它满足约束条件线性不等式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

并使目标函数(Z)达到最大值

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

上述数学模型可以用和式记号 Σ 简化

求变量X的一组数值，使目标函数(Z)达到最大值，即

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

且满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

上述数学模型还可以用矩阵形式表达，设

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{1\times n} = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

$$\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则数学模型是

求变量 $\boldsymbol{X}$ 的一组数值，使目标函数(Z)达到最大值

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

且满足约束条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

二、最小值类型

求变量$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$的一组数值，使它满足约束条件线性不等式