$$\delta U=\iiint(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dxdydz$$
$$+\iint(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v+\bar{Z}\delta w)dS$$

弹性力学专题教材

弹性力学中的变分方法

丁学成

高等教育出版社

弹 性 力 学 专 题 教 材

弹性力学中的变分方法

丁 学 成

高 等 教 育 出 版 社

弹性力学专题教材

弹性力学中的变分方法

丁学成

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
二二〇七工厂印装

开本850×1168 1/32 印张4 字数 99,000
1986年8月第1版 1987年2月第1次印刷
印数 00,001— 3,630
书号 15010·0753 定价 0.74 元

前　言

变分原理是力学中的重要原理，是许多近似解法包括近些年来蓬勃发展起来的有限元法的理论基础。在弹性力学课程中变分原理和方法历来是学习上的难点，本书作者力图在较短的篇幅中尽可能清晰地阐明这些原理及其实际应用，并在书中给出了一定数量的应用例题和习题，以便读者较容易地理解和掌握这些原理的基本概念和应用。

全书共分四章，前三章为基本内容，第四章简要地介绍了广义变分原理并将全书介绍的几种变分原理作了小结。为了便于不熟悉变分法的读者阅读本书，在书末附有变分法简介，以供参考。

本书是与《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材，亦可作为选修课教材使用，也可作为本科高年级学生、研究生、教师、工程技术人员的参考书。

熊祝华、吴家龙同志审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，作者在此对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，错误和不妥之处敬希读者指正。

作者

1985 年 11 月

目　　录

第一章　位移变分方法

§ 1-1　弹性力学的基本方程[1]*)

平衡方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y=0,\\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+Z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}
$$

几何方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{1-2}
$$

从几何方程中消去 3 个位移分量，可以得到下列 6 个相容方程：

*) 符号[1]表示书末所列参考书目的序号。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z},\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1\text{-}3)
$$

物理方程：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)],\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)],\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)],\\
&\gamma_{yz}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz},\ \gamma_{zx}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx},\ \gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.
\end{aligned}
\right\}
$$

$$(1\text{-}4)$$

物理方程的另一形式是：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e+\varepsilon_x\right),\\
&\sigma_y=\frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e+\varepsilon_y\right),\\
&\sigma_z=\frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e+\varepsilon_z\right),\\
&\tau_{yz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz},\ \tau_{zx}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx},\ \tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.
\end{aligned}
\right\}
$$

$$(1\text{-}5)$$

以上各式中 σ_x、σ_y、σ_z、$\tau_{yz}=\tau_{zy}$、$\tau_{zx}=\tau_{xz}$、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 为应力分量；ε_x、ε_y、$\cdots$、γ_{xy} 为形变分量；u、v、w 为位移分量；X、Y、Z 为体力分量；E 为弹性模量，μ 为侧向收缩系数，又称为波松系数；$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ 称为体积形变。

边界条件：

S_1 上：

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}&=\bar{X},\\ m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy}&=\bar{Y},\\ n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}&=\bar{Z}; \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

S_2 上：

$$u=\bar{u},v=\bar{v},w=\bar{w}. \tag{1-7}$$

式(1-6)为力的边界条件，式(1-7)为位移边界条件。其中 S_1 代表给定力的边界；S_2 代表给定位移的边界；$\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 为边界上给定的面力；$\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{w}$ 为边界上给定的位移；l、m、n 为边界曲面外法线的方向余弦。

弹性力学的空间问题共有 15 个未知量：6个应力分量，6个形变分量和 3 个位移分量。基本方程也是 15 个：3 个平衡方程，6 个几何方程和 6 个物理方程。15 个未知量由 15 个方程再加上边界条件即可以求解。可以证明[2]：满足 15 个基本方程的弹性力学问题的解答是唯一的。就是说，如果能找到解，则解是唯一的。具体解题方法基本上分为按位移求解和按应力求解两种方法。前者归结为在给定的边界条件下求解以位移表示的平衡微分方程；后者则归结为在给定的边界条件下求解以应力表示的平衡微分方程以及相容方程。

弹性力学中的变分方法是把弹性力学方程的定解问题用相应的变分原理来代替。与平衡条件相应的有虚位移原理和最小势能原理；与相容条件相应的有虚应力原理和最小余能原理。以后还会看到：与按位移解法相关的是位移变分方法；与按应力解法相关的是应力变分方法。

§ 1-2 弹性体的形变势能

弹性体受力产生变形，从而在弹性体内储存了弹性变形能，称为形变势能。假设体系按静力方式加载，即加载过程中无动能产生；并且考虑为理想弹性体，即变形过程中没有（内摩擦）热能损耗，于是根据能量守恒定律，外力在变形过程中所做的功将全部转化为形变势能。写成公式便是

$$T=U, \tag{1-8}$$

这就是所谓的功能原理。式中T和U分别为外力功和形变势能。

下面我们来研究计算形变势能的方法。形变势能只与变形状态有关，它又是储存于弹性体内的能量，因而我们可以先计算出任一微体内的势能，然后通过积分求得整个弹性体的形变势能。根据功能原理，微体内储存的形变势能在数值上等于作用于微体上的外力（实际上是弹性体的内应力）在微体变形过程中所做的功。我们来计算微体上的应力功。首先计算正应力σ_x的做功值，与x轴垂直的二侧面上正应力分别为σ_x和$\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$，$x$方向的伸长为$\varepsilon_x dx$。假定二侧面上均作用着应力$\sigma_x$而不计其增量，则拉力$\sigma_x dydz$所做的功为$\dfrac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dxdydz$。同样地，可以算出六面体其它面上的拉力所做的功：$\dfrac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y dxdydz$，$\dfrac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dxdydz$。再来计算剪应力做的功。同样地，微体上剪应力的增量也皆略去不计如图 1-1 所示，左右二侧面上的竖向剪力$\tau_{yz}dxdz$组成一偶矩为$\tau_{yz}dxdydz$的力偶，上下两个面上的剪力$\tau_{zy}dxdy$也组成偶矩为$\tau_{zy}dxdydz$的力偶，这两个力偶在角形变γ_{yz}上所做的功为$\dfrac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}dxdydz$。同样也可计算出其它面上剪力的做功值：$\dfrac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}dxdydz$，$\dfrac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}dxdydz$。于是，微体上总的应力功即

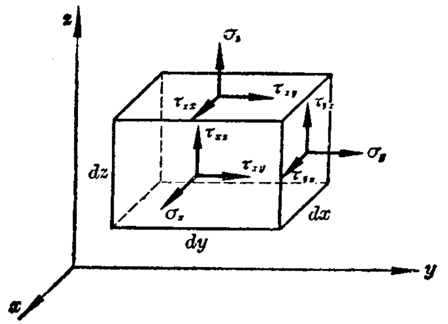

图 1-1

为

$$\frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dxdydz,$$

它在数值上等于微体的形变势能。用 U_1 表示单位体积内的形变势能，称为形变势能密度，或称“比能”，则

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy}), \quad (a)$$

而 $$U = \iiint U_1\,dxdydz$$

$$= \frac{1}{2}\iiint(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dxdydz. \quad (1\text{-}9)$$

将物理方程(1-5)代入式(a)和式(1-9)就得到用形变分量表示的比能和形变势能：

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}e^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)\right], \quad (1\text{-}10)$$

$$U = \frac{E}{2(1+\mu)}\iiint\left[\frac{\mu}{1-2\mu}e^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)\right.$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)\Big]dxdydz. \qquad (1-11)$$

将几何方程(1-2)代入式(1-11),即得到用位移分量表示的形变势能：

$$U=\frac{E}{2(1+\mu)}\iiint\Big[\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Big]dxdydz. \qquad (1-12)$$

将式(1-10)分别对 ε_x、ε_y、$\cdots$、γ_{xy} 求偏导数,并注意到物理方程(1-5),则可得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U_1}{\partial\varepsilon_x}=\sigma_x,\quad \frac{\partial U_1}{\partial\varepsilon_y}=\sigma_y,\quad \frac{\partial U_1}{\partial\varepsilon_z}=\sigma_z,\\ &\frac{\partial U_1}{\partial\gamma_{yz}}=\tau_{yz},\quad \frac{\partial U_1}{\partial\gamma_{zx}}=\tau_{zx},\quad \frac{\partial U_1}{\partial\gamma_{xy}}=\tau_{xy}.\end{aligned}\right\} \qquad (1-13)$$

这表明：弹性体的形变势能密度对于任一形变分量的偏导数等于相应的应力分量。式（1-13）实质上是物理方程的另一种表达形式。

§ 1-3 虚位移原理

在结构力学中我们已经接触到杆系结构的虚位移原理，在那里已经看到，这一原理反映结构处于平衡状态的重要规律。现在来研究弹性力学中空间问题的虚位移原理。

设弹性体存在一组满足相容条件的位移分量 u、v、w 和形变分量 ε_x、ε_y、$\cdots$、γ_{xy}（其对应的应力分量为 σ_x、σ_y、$\cdots$、τ_{xy}），就是说它们满足几何方程(1-2)和位移边界条件(1-7)*)。现在考虑这

组位移和形变在不破坏相容条件的情况下产生虚位移和相应的虚形变：δu、δv、δw；$\delta\varepsilon_x$、$\delta\varepsilon_y$、$\cdots$、$\delta\gamma_{xy}$，即虚位移与其相应的虚形变满足下列条件，在 Ω 内：

$$\left.\begin{aligned}&\delta\varepsilon_x=\delta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\delta u}{\partial x},\quad \delta\varepsilon_y=\delta\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\delta v}{\partial y},\\&\delta\varepsilon_z=\delta\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\delta w}{\partial z},\delta\gamma_{yz}=\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial z},\\&\delta\gamma_{zx}=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial\delta u}{\partial z}+\frac{\partial\delta w}{\partial x},\\&\delta\gamma_{xy}=\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial\delta v}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial y};\end{aligned}\right\}\quad (a)$$

在 S_2 上： $$\delta u=\delta v=\delta w=0. \qquad (b)$$

上式中记号 Ω 代表弹性体的体积域。满足式 (a) 和式 (b) 的虚位移和虚形变即是满足了相容条件，也就是几何上可能的虚位移和虚形变。这种情况下位移和形变与相应的虚位移和虚形变加在一起仍然满足几何方程和位移边界条件，即相容条件仍然满足。

针对上述的虚位移，我们有下面表述的虚位移原理：

弹性体处于平衡状态的必要与充分条件是，对于任意的、满足相容条件的虚位移 δu、δv 和 δw，外力所做的总虚功等于弹性体所接受的总虚变形功。这个必要与充分条件用式子表达就是如下的虚位移方程（或称位移变分方程）：

$$\iiint(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dxdydz+\iint_{S_1}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v+\bar{Z}\delta w)dS=\delta U. \qquad (1\text{-}14)$$

---

*) 在弹性力学中，所谓满足相容条件是指在弹性体内满足相容方程(1-3)，在 S_2 上满足位移边界条件 (1-7)。可以证明[2]：对单连体若 6 个形变分量满足相容方程 (1-3)，则经过几何方程的积分可以求得单值连续的位移分量，就是说几何方程将自动成立。反之，若位移分量 u、v、w 和形变分量 ε_x、ε_y、$\cdots$、γ_{xy} 满足几何方程(1-2)，则通过微分运算消去位移分量从而使 6 个相容方程得到满足。

式(1-14)中等号左边两项积分分别代表体力和面力在虚位移上所做的虚功；等号右边 δU 代表如下的表达式：

$$\delta U=\iiint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdydz, \tag{1-15}$$

称为弹性体所接受的总虚变形功。

以下来证明上述的虚位移原理。

将式(a)代入式(1-15)，有

$$\delta U=\iiint\left[\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\delta v}{\partial y}+\cdots+\tau_{xy}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\right]dxdydz. \tag{c}$$

式(c)右边被积函数共有 9 项，现在来对每一项应用高斯公式*)。例如，对于其中第一项，我们有

$$\begin{aligned}\iiint\sigma_x\frac{\partial}{\partial x}\delta u dxdydz&=\iiint\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x\delta u)dxdydz\\&-\iiint\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta udxdydz\\&=\iint_S\sigma_x\delta uldS-\iiint\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta udxdydz,\end{aligned}$$

其中 S 为弹性体的边界曲面，$S=S_1+S_2$。对于其余各项也都进行同样的处理，经整理则可得到一个恒等式：

$$\begin{aligned}&\iiint\left[\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\delta v}{\partial y}+\cdots+\tau_{xy}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\right]dxdydz\\&=\iint_S[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx})\delta u+(m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy})\delta v\\&\qquad+(n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz})\delta w]dS\end{aligned}$$

---

*) 设 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 及其一阶偏导数在域 Ω 内及边界 S 上连续，则有高斯公式：

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_S(Pl+Qm+Rn)dS.$$

式中 l,m,n 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

$$-\iiint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta u+\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right)\delta v\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)\delta w\right]dxdydz. \qquad (1\text{-}16)$$

由于在给定位移的边界（以下简称位移边界）S_2 上 $\delta u=\delta v=\delta w=0$，因此上式中的面积分只需在给定力的边界（以下简称力的边界）S_1 上进行。注意到式(1-16)左边即是 δU，可进一步将式(1-16)改写为：

$$\iiint(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dxdydz+\iint_{S_1}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v+\bar{Z}\delta w)\,dS$$

$$=\iiint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X\right)\delta u+\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y\right)\delta v+\left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z\right)\delta w\right]dxdydz$$

$$-\iint_{S_1}[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}-\bar{X})\delta u+(m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy}$$

$$-\bar{Y})\delta v+(n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}-\bar{Z})\delta w]dS+\delta U, \qquad (d)$$

现在来证明虚位移原理。

证明：必要性　若弹性体平衡，则式(d)等号右边两个积分号内各个圆括号中的式子都等于零，于是得到虚位移方程(1-14)。这就证明了必要性。

充分性　若对于任意的、满足相容条件的虚位移式(1-14)都成立，则与式(d)比较有下式成立：

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X\right)\delta u\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y\right)\delta v$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z\right)\delta w\right]dxdydz$$

$$-\iint\limits_{S_1}[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}-\bar{X})\delta u+(m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy}$$
$$-\bar{Y})\delta v+(n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}-\bar{Z})\delta w]dS=0. \qquad (1\text{-}17)$$

由于对任意的虚位移 δu、δv、δw 上式都成立，可知上式积分号内各圆括号中的式子都必恒等于零。也就是在弹性体内满足平衡微分方程，在 S_1 上满足力的边界条件，于是弹性体平衡。这就证明了充分性。

以上的推证说明：虚位移方程(1-14)与弹性体的平衡微分方程和力的边界条件是等价的。就是说，虚位移方程的成立与弹性体处于平衡状态等价。

方程(1-14)是空间问题虚位移方程的一般形式。以下分别给出平面问题、薄板弯曲问题以及直梁弯曲问题的相应的虚位移方程。

一　平面问题

在平面问题中，荷载 $Z=0$，$\bar{Z}=0$；剪应力 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。在平面应力问题中还有 $\sigma_z=0$；在平面应变问题中还有 $\varepsilon_z=0$，因而有 $\delta\varepsilon_z=0$。注意到应力、形变等皆与坐标 z 无关，在坐标轴 z 方向取一个单位长度，则虚位移方程(1-14)变为：

$$\iint(X\delta u+Y\delta v)dxdy+\int\limits_{S_1}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v)ds$$
$$=\iint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdy, \qquad (1\text{-}18)$$

式中面积分在弹性体的平面域中进行；线积分沿力的边界 s_1 上进行。

二　薄板弯曲问题

在薄板问题中，可近似地认为 $\sigma_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，因而有 $\delta\gamma_{yz}=\delta\gamma_{zx}=0$。因此虚变形功变为

$$\delta U=\iiint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdydz.$$

但知*)

$$\sigma_x=\frac{12\ M_x}{t^3}z,\quad \sigma_y=\frac{12\ M_y}{t^3}z,\quad \tau_{xy}=\frac{12\ M_{xy}}{t^3}z,$$

$$\varepsilon_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z,\quad \varepsilon_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z,\quad \gamma_{xy}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z,$$

式中 w 为板的挠度，t 为板厚。将它们代入 δU 的表达式中，然后对 z 作积分，则得

$$\delta U=\iint\left[M_x\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+M_y\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+2\ M_{xy}\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy,$$

其中

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\M_y&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\M_{xy}&=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}19)$$

分别为板的弯矩和扭矩。D 为板的弯曲刚度。而 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$、$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$、$-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ 为弹性曲面的曲率和扭率，分别用符号 χ_x、χ_y、χ_{xy} 来表示，即

$$\chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\chi_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\qquad(1\text{-}20)$$

于是 δU 又可写为:

$$\delta U=\iint(M_x\delta\chi_x+M_y\delta\chi_y+2\ M_{xy}\delta\chi_{xy})dxdy.$$

因此，当只有横向荷载 $q(x,y)$ 时，薄板弯曲问题的虚位移方程即为:

---

*) 参考文献[1]第九章。