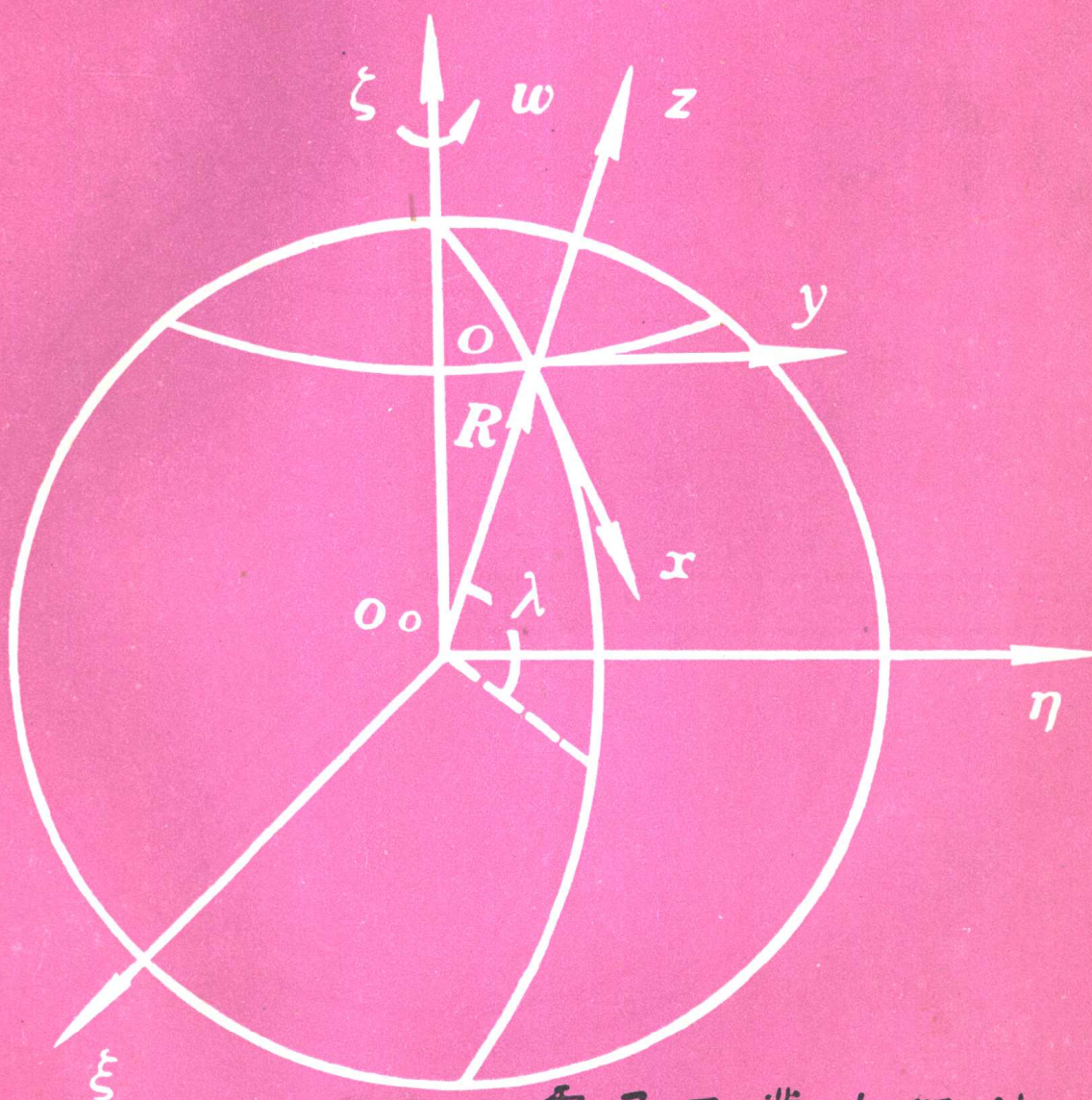


全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会 建议试用教材

理论力学

卢圣治 胡静 管靖 编著



電子工業出版社

《理论物理自学丛书》编委会

主 编	喀兴林	章立源	蔡伯濂		
编 委	卢圣治	宋玉升	吴 哲	郑锡琰	
	胡 静	钱平凯	钱伯初	徐世良	
	梁昆森	彭宏安	惠和兴	管 靖	

(按姓氏笔划为序)

学术秘书 惠和兴

内 容 简 介

本书是为参加高等教育自学考试的考生而编的深浅适度、便于自学的教材。全书共14章，每章后有小结，帮助读者明确要求和重点。书中配有思考题、例题、练习题和题解，以提高读者的独立解题能力。书后附有考试大纲与本书章节对照表。本书适于中学教师、科技人员阅读，也可作为大专院校师生的教学参考书。

理 论 力 学

治 胡静 管靖 编著

责任编辑 宋玉升

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

山东电子工业印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/16 印张：24.5 字数：500千字

1991年1月第1版 1991年1月第1次印刷

印数：1—4000册 定价：9.80元

ISBN 7-5053-0352-X/O·2

自学高考物理专业委员会

致 读 者

高等教育自学考试物理专业本科阶段设有理论力学、热力学与统计物理学、电动力学、量子力学以及数学物理方法等课程。这些课程理论要求较高，全日制高校的学生学习起来，也是不轻松的。对这些课程，国内已先后出版了许多很好的教科书，但这些教科书都是与系统讲授并辅之以其他辅助教学环节这种教学方式相适应的，对自学不尽合用。自学高考的考生及有志于提高自己物理素养的各方面读者，切望有一套与现有教材相比有不同特点的、比较适合于自学的理论物理自学教材供他们使用。值得高兴的是，许多高校有经验的教师、专家和出版社都热情支持理论物理自学教材的出版工作。课程的自学考试大纲只规定了每门课程的自学和考试的要求，不同的作者根据大纲编写的教材，还能反映作者对课程内容的理解和体会，还有自己的讲述方式和自己的特色。我们认为，发动社会力量编写和出版符合大纲要求的，不同风格的理论物理自学教材供读者选用，无疑是有益的。电子工业出版社组织的这套《理论物理自学丛书》将是最早出版的一套，《丛书》的内容符合自学考试大纲的要求，并力求适应自学的特点。

物理专业委员会将这套《理论物理自学丛书》作为自学考试“建议试用”教材之一，愿这套自学丛书对自学考试、成人教育，对工程技术人员和全日制高校的教师和学生都有裨益。

全国高等教育自学考试指
导委员会物理专业委员会
一九八八年四月

前 言

当前,在全国范围内,学习先进自然科学和先进技术科学的热潮正在高涨。这套《理论物理自学丛书》就是为适应广大读者自学的需要而编写的。

理论物理学不仅是物理学的精华,也是很多自然科学如化学、生物学、天文学和地质学等的理论基础。同时理论物理学又是现代许多技术科学如电子学、材料科学、半导体技术和激光技术等的基础。为了学习物理学本身,为了学习有关的自然科学和技术科学,都必须首先掌握一定数量的理论物理学的知识。我们充分认识到当前理论物理学的重要地位,所以我们首先给各界读者提供这套《理论物理自学丛书》。

《理论物理自学丛书》主要是为各界自学读者编写的。它的读者对象有三个方面:第一是需要知识更新的实验物理学工作者和广大物理教师,第二是为了掌握本门学科的现代知识而要求学习理论物理的生物学、化学工作者和技术科学工作者,第三是有志于自学成才的广大青年。这套丛书的取材内容大体上相当于综合性大学物理专业的理论物理课程,包括了全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会颁布的理论物理课程考试大纲的全部内容。《丛书》的编写方法则尽量适应自学的特点。因此我们想,这样一套《丛书》对广大在校学生也可能有所裨益。

《理论物理自学丛书》一共十本,包括理论物理中的四门课程即“理论力学”,“热力学与统计物理学”,“电动力学”和“量子力学”,以及一门数学课程“数学物理方法”,每门课程有一本课本和一本自学指导书。

每门课程的课本是一本完整的和系统的教材。它的内容大体上与综合性大学或师范院校的相应课程内容相同,属于理科教材的性质。我们说适应其他自然科学和技术科学的需要,主要是向这些方面的读者提供他们所需要的理论物理的基础知识,并不涉及这些学科本身的内容。为适应自学的特点,我们力求把课本写得活泼一些,如概念的讲解比较细致周到,对重点和难点部分给予更多的注意,对学习方法加以一定的引导,附有一定数量的例题和习题,有些重要的预备知识以附录的形式给出等等。我们希望在课本中适当地写进一些通常教材中不写而在课堂上要讲的内容。

自学指导书则对于课本的自学给予更为具体的指导。如果说课本中应该突出学科的主线。不宜用过多的题外话去打断主要思路的发展的话,那么自学指导书就不受这个限制。在自学指导书中可以对重点和难点内容给以更多的讲解,对自学方法给以更多的指导,可以用思考题等形式讨论一些疑难问题,可以给出更多的例题和习题,对解题的方法和思路给以更多的指导和训练,也可以给出一些学习中需要的补充材料等等。此外我们还希望自学指导书能适当地具有一定的相对独立性,使利用其他教材作为自学课本的读者,也能从这套自学指导书中得到一定的收获。

学习理论物理学的起点本来应该是学过大学本科物理专业的高等数学和普通物理课程(即力学,分子物理和热学,电磁学,光学和原子物理学)。为适应自学读者的情况,我们把这套《理论物理自学丛书》的起点略为放低一些。我们希望学过工科的高等数学(例如樊映川的书)和工科的普通物理(例如程守洙和江之永的书)的读者也能开始自学这套从

书。为此我们在课本和自学指导书的编写上都作了一些安排，以便使更多的读者能够通过自学掌握理论物理的内容。当然，这也要求读者付出更大的努力和作出一些适当的安排（例如承认某些预备知识中的结论和公式，对课本中的一些内容降低一点要求等等）。

我国实行高等教育自学考试制度，全国高等教育自学考试委员会物理专业委员会已于1984年正式成立，物理专业的考试已经开始，特别是已对具有专科学历的读者已开始本科证书的考试（本丛书中的五门课是这一考试的主要内容）。我们希望自学这套《丛书》的读者踊跃参加单科或系统的考试，取得合格证书。也希望那些具有专科学历的读者和已取得专科合格证书的读者再接再厉，接着自学这套丛书，争取取得本科毕业的资格。

祝大家自学成功！

喀兴林

1988年1月

编者的话

本书的目的是给广大参加高等教育自学考试的读者提供一套深浅适度, 便于自学的理论力学教材; 给广大科技人员、中学教师和高等院校教师提供一份进修提高的自学读物。此外, 还希望此书对正在从事理论力学教学工作的教师和正在大专院校学习理论力学的同学有所帮助, 成为一本好的教学参考书。

基于上述目的, 在编写过程中, 作者力图将北京师范大学物理系在理论力学教学方面多年积累的经验反映进去, 并广泛地参考了国内外有关教材。本书在深度、广度上与自学考试大纲的要求大体上相符。在编写时注意了加强基础, 突出重点, 使读者对基本要求有较明确的理解。为了照顾不同读者的需要和学科内容的完整性, 书中还包括一些选读内容, 以*号标明。本书以读者在数学方面已学过樊映川编的《高等数学讲义》, 在力学方面学过守洙等编的《普通物理学》中力学部分为出发点。如果书中用的数学知识是樊书中没有的, 将以附录形式给出补充, 或者指明参考书籍。

为了取得更好的自学效果, 本套书由教材和自学指导书组成, 教材侧重于基本理论的系统阐述, 自学指导书侧重于结合读者可能发生的问题和可能遇到的困难, 帮助他们掌握基本理论, 和运用理论解决实际问题的方法。编写时, 两本书是有所侧重, 有所分工, 有机配合的, 读者在使用时也需要将两本书适当地配合起来学, 以求得较好的学习效率。

在教材编写方面, 考虑到自学者缺乏教师面对面的指导, 因此在物理概念, 物理思想的阐述和数学推演方面都比较详细, 把教师在课堂中要讲的重要的话, 和有关学习方法也写进去。对初学理论物理时会感到困难的问题, 即数学与物理结合的问题, 则尽量把数学与物理融合在一起, 使读者感到通过数学可以搞清物理过程, 获得清晰的物理图象, 获得更多的物理结果, 认识到数学既是描述物理现象, 物理过程的语言, 又是用来探索、研究物理问题的工具, 数学和物理是密切不可分的。对于教材中的一些难点, 根据我们教学中的经验, 采取适当的方法尽量减少读者的困难。在每章后都有本章小结, 帮助读者明确要求, 明确重点。在适当段落, 书中还提出一系列思考题, 并布置作业。要学好本课程, 这些都必需认真完成。

北京大学物理系蔡伯濂副教授审阅了全书, 并提出许多宝贵的意见, 本书主编北京师范大学物理系喀兴林教授在编写过程中曾给予许多具体指导。北京师范大学物理系汪家华副教授曾参加本书编写的讨论, 我们对他们表示衷心的感谢。

对书中的不足和错误之处, 恳请批评指正。

作者 1987年2月

目 录

自学高考物理专业委员会: 致读者	(1)
前言	(2)
编者的话	(4)

第一篇 质 点 力 学

第一章 质点运动学

§ 1.1 质点运动的描述	(1)
§ 1.2 速度、加速度在几种常用坐标系中的分解	(7)
§ 1.3 自然坐标法	(16)
本章小结	(21)
习题	(21)

第二章 质点动力学

§ 2.1 牛顿运动定律	(25)
§ 2.2 质点运动微分方程及例题	(30)
§ 2.3 质点的约束运动	(39)
§ 2.4 质点的动量定理和动量守恒定律	(42)
§ 2.5 质点的动量矩定理和动量矩守恒定律	(45)
§ 2.6 质点的动能定理和机械能守恒定律	(51)
§ 2.7 质点的平衡和平衡的稳定性	(60)
本章小结	(61)
习题	(62)

第三章 质点在有心力场中的运动

§ 3.1 质点在有心力场中运动的一般规律	(67)
§ 3.2 轨道微分方程—比内公式	(69)
§ 3.3 开普勒三定律和万有引力定律	(70)
§ 3.4 在平方反比引力作用下的运动	(73)
§ 3.5 α 粒子散射	(78)
§ 3.6 散射截面 卢瑟福散射公式 *	(82)
§ 3.7 圆轨道运动的稳定性 *	(84)
本章小结	(89)
习题	(89)

第四章 非惯性系中质点的运动

§ 4.1 两个参考系间速度、加速度的变换关系	(93)
§ 4.2 非惯性系内质点的动力学方程 惯性力	(104)
§ 4.3 相对地球的平衡和运动	(109)
§ 4.4 落体偏东现象	(113)
§ 4.5 傅科摆	(115)
本章小结	(119)
习题	(121)

第二篇 质点组动力学

第五章 质点组的普遍定理

§ 5.1 质点组动量定理与动量守恒定律	(125)
§ 5.2 质点组动量矩定理与动量矩守恒定律	(130)
§ 5.3 质点组动能定理与机械能守恒定律	(136)
本章小结	(142)
习题	(142)

第六章 两体问题

§ 6.1 两体问题 折合质量	(147)
§ 6.2 两体散射 质心坐标系和实验室坐标系	(152)
本章小结	(155)
习题	(156)

第七章 变质量质点的运动

§ 7.1 变质量质点的运动方程	(158)
§ 7.2 火箭的运动	(163)
本章小结	(166)
习题	(166)

第三篇 刚 体 力 学

第八章 刚体运动学

§ 8.1 刚体运动的分析	(168)
§ 8.2 角速度矢量	(170)
§ 8.3 刚体的平动	(172)
§ 8.4 刚体的定轴转动	(173)
§ 8.5 刚体的平面平行运动	(174)
§ 8.6 刚体的定点运动	(179)
§ 8.7 刚体的一般运动	(184)

本章小结	(186)
习题	(187)

第九章 刚体动力学

§ 9.1 刚体动力学基本方程	(190)
§ 9.2 刚体定点转动的动量矩和动能	(192)
§ 9.3 刚体的定轴转动	(200)
§ 9.4 刚体的平面平行运动	(206)
§ 9.5 刚体的定点运动	(210)
§ 9.6 欧勒—潘索情况	(212)
§ 9.7 拉格朗日—泊松情况	(217)
§ 9.8 高速回转器的近似理论	(222)
§ 9.9 拉莫尔进动 *	(226)
本章小结	(227)
习题	(229)

第十章 刚体静力学

§ 10.1 刚体的平衡方程	(233)
§ 10.2 力系简化	(238)
本章小结	(242)
习题	(242)

第四篇 分析力学基础

第十一章 虚功原理

§ 11.1 约束与自由度 广义坐标 坐标变换方程	(246)
§ 11.2 虚位移 自由度的一般定义	(252)
§ 11.3 虚功 理想约束	(254)
§ 11.4 虚功原理	(256)
§ 11.5 利用虚功原理求约束反力 不定乘子法 *	(263)
本章小结	(266)
习题	(267)

第十二章 拉格朗日方程

§ 12.1 达朗伯原理 动力学普遍方程	(272)
§ 12.2 完整系拉格朗日方程的一般形式	(274)
§ 12.3 主动力为保守力的完整系拉格朗日方程	(280)
§ 12.4 广义动量积分和广义能量积分	(283)
§ 12.5 多自由度力学体系在平衡位置附近的微振动	(290)
§ 12.6 与速度有关的广义势 带电粒子在电磁场中的拉格朗日方程 *	(301)

§ 12.7 时空对称性与守恒律 *	(304)
§ 12.8 拉格朗日方程的特点和意义	(306)
本章小结	(307)
习题	(308)

第十三章 哈密顿正则方程

§ 13.1 哈密顿正则方程	(313)
§ 13.2 泊松括号与泊松定理	(323)
本章小结	(328)
习题	(329)

第十四章 哈密顿原理

§ 14.1 变分法简介	(330)
§ 14.2 哈密顿原理	(335)
本章小结	(339)
习题	(340)
附录 1、 矢量场论简介	(341)
附录 2、 矢量代数和矢量分析中常用的公式	(355)
附录 3、 习题答案	(357)
附录 4、 主要参考书目	(371)
全国高等教育自学考试物理专业委员会颁布的本课程考试大纲与本书章节对照表:	(372)

第一篇 质点力学

一切物体都可看作由质点组成，质点是力学中最简单、最基本的研究对象。本篇将用牛顿力学的方法研究一个质点的运动。在第四篇中，还要用分析力学的方法研究质点的运动。

第一章——质点运动学，和第二章——质点动力学，是质点力学的基本理论部分。第四章将在前面理论的基础上导出质点相对非惯性系的运动规律。本篇还包括一个具有重要意义的专题：质点在有心力场中的运动（第三章）。该章内容一方面体现了质点动力学理论和方法的应用，同时又是自然科学和物理学发展的重要基础。

本篇研究的对象虽然简单，但其内容很丰富，不管从理论上，还是从方法上看，本篇都是学习后面几篇的基础。

第一章 质点运动学

要研究质点运动，首先必须学会精确地、定量地描述质点的运动。质点运动学就是研究如何精确地、定量地描述质点的运动。为进一步研究质点的运动与相互作用的关系——质点动力学服务。

我们将引入描述质点运动所必须的物理概念（物理语言）和它们的数学表述（数学语言），研究定量描述质点运动的数学方法。

矢量和矢量导数是描述、研究质点运动的较理想的数学工具，它能直观而贴切地描写运动。由于矢量形式的方程与坐标系无关，因此，这种数学形式十分适宜于理论表述和理论推证。然而，为了获得具体的结果，仍需要把矢量的运算化为我们熟悉的标量的、解析的运算，因此，还必须借助于各种坐标系。

我们将介绍利用各种常用坐标系描述质点运动的方法，导出速度、加速度在这些坐标系中的表达式；并介绍利用轨道描述运动的自然坐标法，使我们有足够的知识和方法来描述质点所作的各种比较复杂的空间曲线运动，这些内容是本章的重点。

矢量导数的概念在普通物理力学中已初步学习过，但要真正理解和掌握这一数学概念仍是一个难点。理解好这一概念是学好本章和本课程的前提，应给以充分的重视。

质点运动的描述与参照系选择有关。原则上可以选取任意的参照系描述质点的运动。有时，采用运动坐标系来分析某些比较复杂的质点运动，常常可以使问题简化，这部分内容将在第四章中讨论。

§ 1.1 质点运动的描述

所谓质点的运动是指质点的空间位置随时间而变化。因此，在运动学中出现的最基本的物理量只有两个：时间和空间。在经典力学中采用的是经典的时空观，即认为空间性质遵从欧几里得几何（如两点间最短的连线是直线，三角形内角之和为 180° 等）；时间是均匀流逝的；时间与空间无关，它们与物质运动也无关。根据相对论理论，我们知道这种

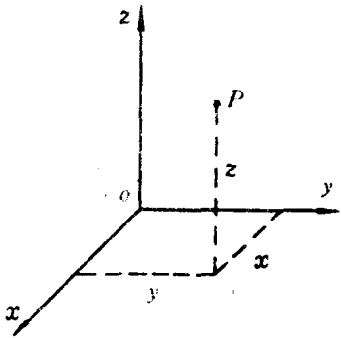
时空观只有在物体运动速度远小于光速的条件下，才比较符合实际。在当今大量工程技术问题中，这个条件一般是满足的，因此，采用这种时空观具有足够的精确性。

为了描述质点运动，我们必须引入一些基本概念：参考系与坐标系，运动学方程与轨道方程，位移，速度，加速度等。研究它们之间的关系以及与它们相应的数学表述。

一、参考系与坐标系

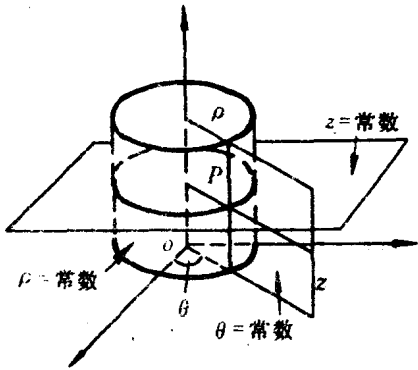
为了确定质点在空间的位置，首先必须选取一个参照物。任何不变形的（实际上是变形很小的）物体，或几个相对位置保持不变的物体，都可以作为参照物。通常称这个参照物为参考系（或参照系）。质点位置以及质点运动的描述只能相对于某一参考系而言。用两个不同的参照物来考察同一物体的运动将得出不同的结论。例如，以地面为参照物，认为坐在行驶着的火车中的人是运动的；若以车厢为参照物，则认为坐在其中的人是静止的。这两种看法都同等正确。这就是机械运动描述的相对性。

从运动学考虑，宇宙中众多的物体，诸如地球，太阳，其他恒星，以及地球上各种物体等等都可作为参考系，它们的地位完全相同，不存在一个特殊优越的参考系。但在具体问题中，可根据实际需要选择适当的物体作为参考系。

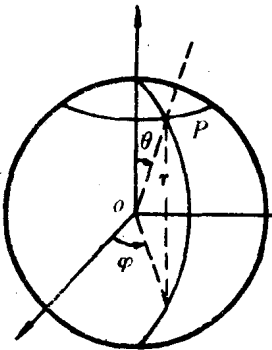


(a) 直角坐标系

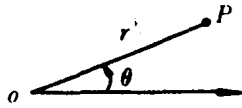
为了定量描述质点的运动，通常是在参考系上建立一种坐标系。常见的空间坐标系有直角坐标系，柱坐标系和球坐标系。对二维的平面运动可采用平面极坐标系。这些坐标系可以看作是由直线或曲线组成的带有标度的空间网格，例如柱坐标的空间网格是由 $\rho = \text{常数}$ 的圆柱面， $\theta = \text{常数}$ 的辐射形平面， $z = \text{常数}$ 的水平面三种曲面相交形成的(图 1-1)。对于柱坐标，球坐标，平面极坐标，组成网格的线既有直线也有曲线，并且各曲线在交点处互相正交，故都属于正



(b) 柱坐标系



(c) 球坐标系



(d) 平面极坐标

图 1-1 常用的坐标系

交曲线坐标系

为了定量描述质点运动, 在参考系上建立坐标系并不是唯一的方法。还可以利用质点运动轨道进行描述和计算, 请参看 § 1.3 中讲的自然坐标法。在分析力学中, 我们将看到还可以更灵活地采用所谓广义坐标。

一般地说, 坐标系与参考系是固连的。但是, 也可以不固连, 即采用动坐标系, 在某些特殊问题中, 还有必须采用动坐标系的情况, 见于后面第九章。

思考题 1 一个点或一根直线能否作为参考系? 一个正在变形的物体能否作为参考系?

二、运动学方程和轨道

确定质点位置的最简单的方法是: 在参考系上选取一个原点 O , 由 O 点到质点所在位置 P 点可作一矢量 $\mathbf{r}$ (图 1-2)

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = r \hat{\mathbf{r}}^\circ$$

$\mathbf{r}$ 的模确定质点离原点的距离 r , $\mathbf{r}$ 的方向, 即它的单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}^\circ$ 可确定质点在空间的位置。矢量 $\mathbf{r}$ 称为位置矢量, 简称矢径, 或位矢。质点位置和矢径有一一对应关系。

随着质点的运动, 矢径 $\mathbf{r}$ 将随时间 t 变化, 质点的运动情况可用矢量函数描述, 在

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1-1)$$

经典力学中, 一个质点在一个时刻只能占有一个位置, 从一个位置到另一位置是连续变化的, 所以这个矢量函数必然是单值、连续的函数。

如果矢径随时间变化的函数给定, 即方程 (1-1-1) 给定, 则质点在空间运动的全部状况都确定: 包括什么时刻到达什么位置, 以多大速率运动, 向什么方向运动, 以及运动变化的情况等等。所以, 方程 (1-1-1) 包含了质点运动的全部信息, 称为质点的运动学方程。

确定一个位置矢量 (或质点在空间的位置) 需要三个标量, 而这三个标量的选择是与选用什么坐标系有关, 如选用直角坐标系, 质点的位置由 (x, y, z)

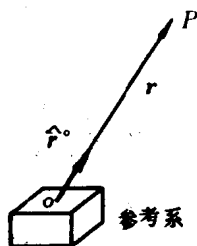


图 1-2

三个变量确定。若以

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ 表示沿 x, y, z 三轴的单位矢量, 则

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z \quad (1-1-2)$$

即方程 (1-1-1) 有三个投影方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-1-2a)$$

如果质点在一个平面内运动,则只需采用二维的直角坐标系 oxy , 变量和方程都减少一个。在这种情况下,有时采用平面极坐标更为适宜,以质点离原点的距离 r 和极角 θ 确定质点的位置。此时位矢的单位矢量 $\hat{r}^\circ$ 仅由极角确定,于是有

$$\mathbf{r} = r\hat{r}^\circ = r(t)\hat{r}^\circ[\theta(t)] \quad (1-1-3)$$

其中符号 $\hat{r}^\circ[\theta(t)]$ 表示 $\hat{r}^\circ$ 是极角 θ 的函数,而极角又是时间 t 的函数,质点的运动由以下两个标量方程确定

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (1-1-3a)$$

如果质点的空间(三维)运动具有轴对称性,可选用柱坐标系。柱坐标系是由平面极坐标加上垂直于平面的 z 轴组成。质点位置由变量 (ρ, θ, z) 确定,若以 $\hat{\rho}^\circ$ 代表矢径在 xy 平面上投影的单位矢量, $\hat{\rho}^\circ$ 方向完全由角度 θ 确定,则

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho\hat{\rho}^\circ + z\hat{k} \\ &= \rho(t)\hat{\rho}^\circ[\theta(t)] + \hat{k}z(t) \end{aligned} \quad (1-1-4)$$

质点的运动由以下三个标量方程确定。

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-1-4a)$$

如果质点空间运动具有球对称性,选用球坐标系更为适宜。此时,质点位置由变量 (r, θ, φ) 确定,而单位矢量 $\hat{r}^\circ$ 由 θ, φ 两个角度确定,则

$$\mathbf{r} = r\hat{r}^\circ = r(t)\hat{r}^\circ[\theta(t), \varphi(t)] \quad (1-1-5)$$

质点的运动由以下三个标量方程确定,

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (1-1-5a)$$

(1-1-2a), (1-1-3a), (1-1-4a), (1-1-5a)等式分别代表在不同坐标系中标量形式的运动学方程。我们看到,在数学上一个矢量方程在三维空间中与三个标量方程等价;在平面中与两个标量方程等价。这一事实,在物理上可以理解为运动可以分解和合成。现以(1-1-2a)式为例加以说明:质点的任何平面曲线运动都可由二种分运动合成:(1)质点沿一直管(假想的)按 $\mathbf{r} = r(t)$ 的规律运动,(2)直管绕原点 o 按 $\theta = \theta(t)$ 的规律在平面内转动。其他几组方程请读者自己设想它们的分运动。

当 t 连续变化时,矢径 $\mathbf{r}$ 的端点在空间画出的曲线就是质点运动的轨道。轨道情况也是人们需要了解的一个方面。轨道的信息自然也包含在运动学方程之中。轨道方程可由标量形式的运动学方程消去时间 t 得出。例如从方程(1-1-2a)中消去 t 可得轨道方程

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, z) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{或} \begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_3(y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f_2(x, z) = 0 \\ f_4(y, z) = 0 \end{cases} \right)$$

此轨道为两个柱面的交线。

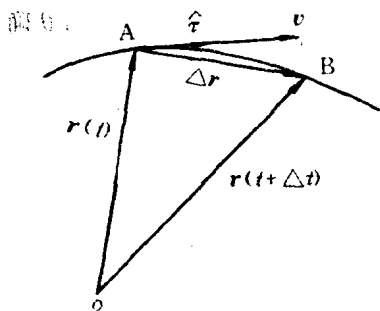


图 1-3

图 1-3

所以，位移是矢量。

路程是质点走过的路线的总长度，它是一个恒正的标量。在上述情况，质点经过的路

程 Δs 为弧长 $\widehat{AB}$ ，即 $\Delta s = \widehat{AB}$ 。

路程与位移是两个不同的概念，不能相混。

四、速度

四、速度

速度是描述质点在某瞬时运动状态的物理量之一，它被定义为位置矢量对时间的导数，即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-1-6)$$

矢量导数 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 也可理解为位置矢量的时间变化率。

速度是矢量，它的大小表示质点运动的瞬时速率（运动快慢程度），它的方向代表运动方向。当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， A 、 B 两点无限邻近，弦长接近于弧长，即 $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$ ，所以速度的大小为

$$v = |\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-1-7)$$

即速度的大小（或速度矢量的模）是路程对时间的导数。是一个恒正的量。由于 A 、 B 两点无限邻近， $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 的方向趋向于 A 点切线方向（见图 1-3），若以 $\hat{\mathbf{e}}_t$ 表示沿 A 点切线并

指向运动方向的单位矢量，则速度的表达式可写成

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{e}}_t \quad (1-1-8)$$

我们从速度概念开始，以后将接触到各种矢量导数。读者可以结合速度的概念，理解好矢量导数这一概念，为以后的学习打下坚实的基础。

五、加速度

事物总是处于发展变化之中，质点的运动状态也总是不断地变化，我们要掌握其运动变化的规律，首先应很好地理解描述质点运动状态变化情况的物理量——加速度。

如图 1-4 (a)，在 t 时刻质点的速度为 $v(t)$ ，在 $t+\Delta t$ 时刻，其速度为 $v(t+\Delta t)$ 。在 t 时刻质点的加速度被定义为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1-1-9)$$

即加速度为速度对时间的导数，或者说加速度是速度矢量的时间变化率。

和速度概念相比，加速度的概念较为抽象，不容易一下子搞清它的大小和方向，往往需要借助于理论思维和数学推演才能把它们大小和方向搞清楚。

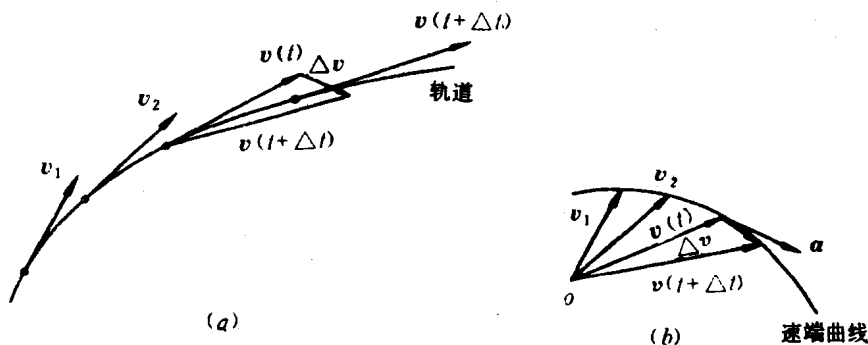


图 1-4

首先，让我们比较 (1-1-9) 式和 (1-1-6) 式，发现它们完全类似，一个是位置矢量对时间的导数，一个是速度矢量对时间的导数，两者都是矢量导数。因此，可以完全仿照对速度的理解来理解加速度，只须以速度 v 代替位置矢量 r 。于是，我们将不同时刻速度矢量的首端都集中于 O 点，再连接各速度矢量的末端，形成速端曲线（见图 1-4b），随着质点的运动，速度矢量的端点沿速端曲线运动。这里的速端曲线相当于前面位置矢量端点的曲线（即轨道），当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，速度的改变量的大小 $|\Delta v|$ （弦长）与速度矢量端点沿速端曲线运动经过的弧长相等，从而加速度的大小 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ 就是速度矢量端点

沿速端曲线运动的速率，同样，加速度的方向是沿速端曲线的切线方向，因此，加速度就是速度矢量端点沿速端曲线运动的速度。这种理解是严格的，并具有普遍意义，以后我们遇到其他矢量的导数，都可以按这种方式理解。

将速度的定义 (1-1-6) 式代 (1-1-9) 式，加速度可以表示为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (1-1-10)$$

所以，若已知运动学方程 $r = r(t)$ ，求一次导数就可以求得速度 $v = v(t)$ ，求两次导数就

可求得加速度 a 。

思考题 2 把速度定义写成 $v = \frac{dr}{dt}$ ；把速度的大小表示为 $v = \frac{dr}{dt}$ ，有何错误？请作详细的分析。

思考题 3 有人说“加速度的大小等于单位时间内速度大小的增量”，请分析这句话是否正确。

思考题 4 在某一时刻速度为零，加速度不为零，这种情况可能吗？

§ 1.2 速度、加速度在几种常用坐标系中的分解

为把矢量的所有运算，包括矢量导数的运算化为我们熟悉的标量运算，必须借助于一个具体的坐标系。正如在上一节中看到的，一个位置矢量在不同的坐标系中可以用不同的一组变量（它们是标量）来确定。这就把一个矢量与一组标量联系起来。

在本节中，我们将学习在几种常用的坐标系中计算速度和加速度的方法。

一、在直角坐标系中速度、加速度的表达式

与参考系固连建立一直角坐标系 $oxyz$ ，则位置矢量可表示为

$$\mathbf{r}(t) = \hat{i}x(t) + \hat{j}y(t) + \hat{k}z(t) \quad (1-2-1)$$

速度的计算可按定义进行

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dt}x + \hat{i}\frac{dx}{dt} + \frac{d\hat{j}}{dt}y + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \frac{d\hat{k}}{dt}z + \hat{k}\frac{dz}{dt} \quad (1-2-2)$$

由于我们站在参考系上观察问题认为坐标系是静止的，所以

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \quad (1-2-3)$$

于是

$$\mathbf{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \quad (1-2-4)$$

速度在三个坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases} \quad (1-2-4a)$$

速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1-2-4b)$$