数学专业大学俄語教本

下 册

北京大学俄語系大学俄語教研室編

商 务 印 書 館

数学专业大学俄語教本

下　　册

北京大学俄語系大学俄語教研室編

商務印書館
1959年·北京

数学专业大学俄語教本

下　册

北京大学俄語系大学俄語教研室編

商　务　印　書　館　出　版

北京东总布胡同10号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第107号）

新华書店北京发行所发行　各地新华書店經售

京华印書局印装

統一書号：9017·134

1959年11月初版　　开本 850×1168　1/32

1959年11月北京第1次印刷　　字数 201 千字

印张 7 10/16　　印数 1—12,000 册

定价（10）1.20 元

目次 Оглавление

第一課　Первый урок

生詞　Новые слова

подгото́вка 准备
предме́т 对象，物体
класс 类，級，組
основополо́жный 首要的，主要的
тео́рия 理論
неоднокра́тно 屡次，再三
то́чно 精确地
действи́тельность〔阴〕現实，实际
удава́ться, уда́ться (уда́стся, удаду́тся) (第一，二人称不用) 順利进行 (十原形动詞) 得以，能以，作到
своди́ть, свести́ *что к чему* 把…归結为…
близлежа́щий 邻近的，附近的
внача́ле〔副〕最初，起初，开始
иллюстра́ция 图解，例証
вещь〔阴〕东西，事物
равноси́льно *чему* 等于…，相当于…
тре́бование 要求，需要
вновь〔副〕更，再，重新
меня́ть, обменя́ть 調换，改变
нале́во〔副〕向左，在左
двусторо́нний 双边的，两面的
уточне́ние 明确化，明确說明
преде́льный 极限的，境界的
сколь〔副〕多么，如何
наруше́ние 破坏，违背
еди́ный 唯一的，联合的
претерпева́ть, претерпе́ть 受（作用）
разры́в 不連續，間断
символизи́ровать 象征，标誌

短語和詞組　Выражения и словосочетания

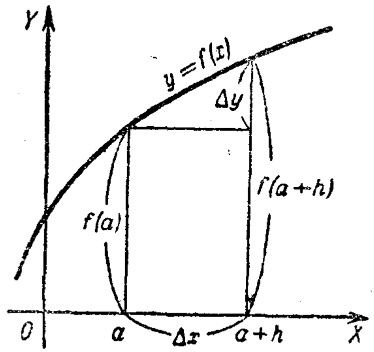
ча́ще всего́ 最經常，最普遍
всё вновь и вновь 总是一次又一次地
преде́льный перехо́д 极限过程
сколь бы ма́ло ни 无論怎么小
ко́ротко говоря́ 簡单地說
тот и́ли ино́й 或此或彼，某种

Определе́ние непреры́вности (I)

По́сле проведённой на́ми подгото́вки мы мо́жем уже́ перейти́ к основно́й зада́че математи́ческого ана́лиза—исследованию различных типов функциональной зависимости. Однако и здесь нам необходимо подойти к предмету систематически, выделив с самого начала те классы функций, которые являются основоположными для теории и вместе с тем важнейшими для практических приложений. История развития нашей науки показала, что в этом плане целесообразно остановиться прежде всего на классе непрерывных функций. Идея непрерывности, непрерывного изменения величины, в наглядном представлении ясна каждому, и мы уже неоднократно пользовались этим термином, не вкладывая в него, однако, никакого точно определённого содержания. Теперь нам необходимо дать понятию непрерывности точное определение и подробно изучить свойства непрерывных функций—не только потому, что с такими функциями мы чаще всего встречаемся в действительности, но и потому, что изучение других, более широких классов функциональных связей в значительной степени удаётся свести к изучению непрерывных функций.

Пусть $y=f(x)$—функция, определённая в некорором отрезке числовой прямой, и a—любая внутренняя точка этого отрезка. В точке a функция $f(x)$ имеет определённое значение $f(a)$. Перейдём теперь от точки a к некоторой близлежащей точке $a+h$, где h—некоторое малое по абсолютному значению, положительное или отрицательное число. Такой переход принято описывать, говоря, что величина x, вначале имевшая значение a, получила приращение h и, следовательно, получила новое значение $a+h$; при этом, как уже сказано, приращение h может быть как положительным, так и отрицательным. Новому значению $a+h$ величины x соответствует новое значение $f(a+h)$ функции $f(x)$; разность $f(a+h)-f(a)$ между новым и старым значениями y мы, естественно, называем приращением величины y, которое она получает при переходе величины x от старого значения a к новому значению $a+h$; разумеется, это приращение может оказаться как положительным, так и отрицательным (а иногда и равным нулю). В анализе принято обозначать приращение, полученное какой-либо величиной u, символом Δu. Мы можем, таким образом, сказать, что если вначале мы имели $x=a$, то приращению $\Delta x=h$ величины x соответствует приращение $\Delta y=f(a+h)-f(a)$ величины y. Геометрическая иллюстрация этого положения вещей дана на черт. 1.

Если мы, оставляя a неизменным, станем изменять приращение h величины x, то, очевидно, будет меняться и приращение $\Delta y=f(a+h)-f(a)$ величины y; каждому значению Δx соответствует некоторое определённое значение Δy. Заставим в частности, величину h стремиться к нулю, т. е. допустим, что новое значение $a+h$ величины x стремится к её старому значению a; если тогда и приращение Δy функции $y=f(x)$ будет стремиться к нулю, то это означает, что при достаточно малом изменении величины x и величина y будет меняться как угодно мало. Именно это и является содержанием нашего наглядного представления о непрерывности. Сущность понятия непрерывности состоит, таким образом, в том, что бесконечно малому приращению независимой переменной соответствует бесконечно малое приращение функции. А так как соотношение



Черт. 1.

$$\Delta y=f(a+h)-f(a)\to 0 \qquad (\Delta x=h\to 0)$$

равносильно соотношению

$$f(a+h) \to f(a) \qquad (h \to 0),$$

то определéние непрерывности мóжет быть формулирóвано слéдующим óбразом:

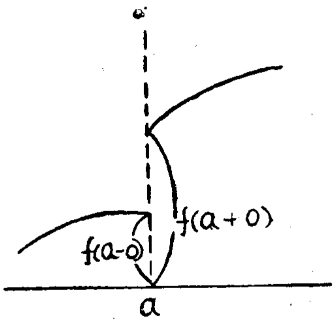
Фýнкция $f(x)$ называется непрерывной при $x=a$ (или «в тóчке a»), éсли

$$f(a+h) \to f(a) \qquad (h \to 0).$$

Таки́м óбразом, для непрерывности фýнкции $f(x)$ в тóчке a необходи́мо и достáточно, чтóбы при $x \to a$ значéние фýнкции $f(x)$ стреми́лось к определённому предéлу и чтóбы предéл этот равнялся значéнию $f(a)$ этой фýнкции в тóчке a. При этом вáжно трéбование, чтóбы соотношéние $f(a+h) \to f(a)$ имéло мéсто, каки́м бы путём h ни приближáлось к нулю́: по положи́тельным значéниям и́ли по отрицáтельным, и́ли всё вновь и вновь меня́я знак; други́ми словáми, мы должны́ имéть $f(x) \to f(a)$ независи́мо от тогó, приближáется ли x к тóчке a спрáва и́ли слéва, и́ли всё вновь и вновь переходя́ спрáва налéво и обрáтно(двусторóнний предéл фýнкции).

Уточнéние поня́тия предéльного перехóда, подрóбно рассмóтренное нáми рáньше, позволя́ет дать определéнию непрерывности ещё слéдующую, во мнóгих слýчаях óчень удóбную формулирóвку: фýнкция $f(x)$ называется непрерывной в тóчке a, éсли, сколь бы мáло ни бы́ло $\varepsilon > 0$, существýет такóе $\delta > 0$, что при любóм h, по абсолю́тной величинé не превосходя́щем δ, мы бýдем имéть $|f(a+h)-f(a)| < \varepsilon$. Кóротко говоря́, фýнкция непреры́вна в дáнной тóчке, éсли достáточно мáлому изменéнию, аргумéнта соответствует сколь угóдно мáлое изменéние фýнкции.

Бóльшая часть слýчаев нарушéния непреры́вности фýнкций в той и́ли инóй тóчке происхóдит так (черт. 2), что $f(x)$ стреми́тся к определённому предéлу, когдá x приближáется к a спрáва $(h > 0)$, и к друго́му определённому преде́лу, когда́ x приближа́ется к a сле́ва ($h<0$), но э́ти два преде́ла не совпада́ют ме́жду собо́й. Еди́ный преде́л $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в э́том слу́чае отсу́тствует, фу́нкция $f(x)$ претерпева́ет разры́в в то́чке a, как э́то нагля́дно пока́зывает черт. 2. То обстоя́тельство, что x стреми́тся к a спра́ва (т. е. принима́я лишь значе́ния, бо́льшие чем a), при́нято, как мы уже́ зна́ем, символизи́ровать за́писью $x \to a+0$; е́сли в э́том проце́ссе $f(x)$ стреми́тся к не́которому преде́лу, то э́тот преде́л обознача́ют че́рез $f(a+0)$, так что



Черт 2.

$$f(a+0) = \lim_{x\to a-0} f(x).$$

Аналоги́чный смысл име́ют си́мволы $x\to a-0$ и

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-o} f(x).$$

第二課 Второй урок

生詞 Новые слова

обя́зан, -а, -о, -ы(+原形动詞) 必須, 应該

ника́к〔副〕怎样也, 无論如何也

обусло́вливать, обусло́вить *что чем* 以…作为条件; *что* 引起, 制約

наступа́ть, наступи́ть 开始, 到来

во́все〔副〕完全, 全然

типи́чный 典型的, 一般的

безграни́чно 无界地, 絕頂地

то…, то…〔連〕忽而…忽而, 有时…有时

хотя́〔連〕虽然, 即使

перечисля́ть, перечи́слить 列举, 点数

разрывно́й 不連續的，間断的
лока́льный 局部的
ме́стный 局部的，当地的
заполня́ть, запо́лнить 塡滿，塡写
бли́зко *к чему* 靠近…，与…近似
односторо́нний 单側的，单方的
левосторо́нний 在左側的，左方的
правосторо́нний 在右側的，右方的
ведь 〔連〕要知道，須知；〔語气〕本来，不是嗎
перви́чный 第一次的，初級的

短語和詞組 Выражения и словосочетания

ме́жду тем 同时，然而
то́лько что 刚才，刚刚
по существу́ 本質上，实質上

Определе́ние непреры́вности (II)

В рассмо́тренном на черт. 2 слу́чае о́ба преде́ла $f(a+0)$ и $f(a-0)$ существу́ют, но разли́чны ме́жду собо́й. Ме́жду тем, для того́ что́бы фу́нкция $f(x)$ в то́чке a была́ непреры́вной, необходи́мо не то́лько совпаде́ние э́тих преде́лов, но и совпаде́ние ка́ждого из них со значе́нием $f(a)$ фу́нкции $f(x)$ в то́чке a (очеви́дно, чи́сла $f(a+0)$ и $f(a-0)$ по своему́ определе́нию не то́лько не обя́заны совпада́ть с $f(a)$, но и ника́к не зави́сят от него́). Таки́м о́бразом, кро́ме причи́ны $f(a+0) \neq f(a-0)$, обусло́вливающей собо́й наруше́ние непреры́вности в рассмо́тренном на́ми приме́ре, то же явле́ние мо́жет наступа́ть и под де́йствием други́х причи́н, а и́менно:

1) $f(a+0)$ и́ли $f(a-0)$ мо́жет не существова́ть во́все. Типи́чными приме́рами э́того ро́да мо́гут служи́ть сле́дующие:

a) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0);\end{cases}$$

при $x\to +0$ $f(x)$ безграни́чно возраста́ет; при $x\to -0$ $f(x)$, будучи отрицательной, безгранично возрастает по абсолютному значению; таким образом, не существует ни $f(+0)$, ни $f(-0)$; функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки 0.

$$\text{б)}\quad f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0);\end{cases}$$

при $x\to+0$ $f(x)$, оставаясь на этот раз ограниченной

$$\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right),$$

не может стремиться ни к какому пределу, так как всё вновь и вновь становится равной то $+1$, то -1 (а также любому числу, заключённому между $+1$ и -1); очевидно, подобным же образом $f(x)$ ведёт себя и при $x\to-0$; таким образом, и здесь не существует ни $f(+0)$, ни $f(-0)$, хотя функция $f(x)$ остаётся ограниченной в окрестности точки 0.

2) Может случиться, что $f(a+0)$ и $f(a-0)$ существуют и равны между собой, но отличны от $f(a)$; пример:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0);\end{cases}$$

при $a=0$ здесь $f(a+0)=f(a-0)=0$, в то время как $f(a)=1$. Во всех перечисленных случаях функция $f(x)$ разрывна (не непрерывна) при $x=a$ (в точке a).

Очень важно всегда иметь в виду, что так определённая непрерывность представляет собой локальное (т. е. «местное») свойство функции: функция, вообще говоря, обладает этим свойством в одних точках и не обладает им в других. Те значения переменной x, при которых функция $f(x)$ непрерывна, называются точками непрерывности этой функции, а те, при которых она разрывна, — её точками разрыва. В тех примерах разрывных функций, которые мы рассматривали до сих пор, фу́нкция всегда́ была́ непреры́вна всю́ду, за исключе́нием одно́й еди́нственной то́чки; мно́жество то́чек разры́ва тако́й фу́нкции состои́т, очеви́дно, из одно́й э́той то́чки. Очень легко́ постро́ить приме́ры фу́нкций, облада́ющих двумя́, тремя́ и т. д. то́чками разры́ва, и да́же таки́х, у кото́рых то́чки разры́ва образу́ют бесконе́чное мно́жество. Но существу́ют и таки́е фу́нкции, кото́рые совсе́м не име́ют то́чек непреры́вности и у кото́рых, сле́довательно, то́чки разры́ва заполня́ют всю числову́ю пряму́ю. Приме́р э́того ро́да даёт нам уже́ рассмо́тренная на́ми вы́ше фу́нкция $D(x)$, ра́вная нулю́ и́ли едини́це, смотря́ по тому́, иррациона́льно и́ли рациона́льно число́ x. В са́мом де́ле, так как любо́й отре́зок числово́й прямо́й соде́ржит бесчи́сленное мно́жество как рациона́льных, так и иррациона́льных чи́сел, то, каково́ бы ни бы́ло число́ a, как уго́дно бли́зко к нему́ найду́тся как рациона́льные, так и иррациона́льные чи́сла; зна́чит, фу́нкция $D(x)$ бу́дет в то́чках, как уго́дно бли́зких к a, принима́ть и значе́ние 0, и значе́ние 1; отсю́да сле́дует, что $D(x)$ при $x \to a$ ни к како́му преде́лу стреми́ться не мо́жет и, сле́довательно, претерпева́ет разры́в при $x=a$; а так как число́ a произво́льно, то фу́нкция $D(x)$ всю́ду разры́вна; бо́лее того́, ни $D(x+0)$, ни $D(x-0)$ не существу́ет, очеви́дно, ни при одно́м значе́нии x.

Иногда́ быва́ет поле́зно различа́ть односторо́ннюю непреры́вность фу́нкции в да́нной то́чке. Фу́нкция $f(x)$ в то́чке a непреры́вна спра́ва, е́сли $f(a+0)$ существу́ет и $f(a+0) = f(a)$; она́ непреры́вна сле́ва, е́сли $f(a-0)$ существу́ет и $f(a-0) = f(a)$; для того́ что́бы фу́нкция была́ непреры́вна в то́чке a, очеви́дно, необходи́мо и доста́точно, что́бы в э́той то́чке она́ была́ непреры́вной как спра́ва, так и сле́ва.

Мы бу́дем говори́ть, что фу́нкция $f(x)$ непреры́вна в отре́зке (a, b), е́сли она́ непреры́вна в ка́ждой то́чке э́того отре́зка (не име́ет в нём ни одно́й то́чки разры́ва). При э́том в ле́вом конце́ a отре́зка тре́буется то́лько непреры́вность спра́ва, а в пра́вом конце́ b—то́лько непреры́вность сле́ва; тако́е соглаше́ние есте́ственно потому́, что фу́нкция $f(x)$ ча́сто быва́ет определена́ то́лько в то́чках отре́зка (a, b), так что вопро́с о её левосторо́нней непреры́вности в то́чке a (и́ли правосторо́нней — в то́чке b) не име́ет смы́сла. То обстоя́тельство, что мы то́лько что определи́ли поня́тие фу́нкции, непреры́вной в отре́зке, коне́чно, ничего́ не меня́ет в на́шем утвержде́нии, что непреры́вность по существу́ явля́ется поня́тием лока́льным; ведь поня́тие непреры́вности в отре́зке определено́ на́ми че́рез поня́тие непреры́вности в то́чке, кото́рое, таки́м о́бразом, в тео́рии непреры́вных фу́нкций остаётся перви́чным и кото́рое име́ет я́рко вы́раженную лока́льную приро́ду.

(选自 А. Я. Хинчин 編: "数学分析簡明教程")

第三課 Третий урок

生詞 Новые слова

значи́тельно 〔副〕大，頗，甚，显著地
уточня́ть, уточни́ть 明确，說明
углово́й 角的，測角的
проведе́ние 引导，画出
приде́рживаться, придержа́ться *чего* 依照，遵循
заме́тно 〔副〕〔插〕显然，显著
пла́вный 流暢的，平稳的
гара́нтия 保証，保障
согла́сие 同意，一致
изгиба́ться, изогну́ться 弯起来，成为弯形
изги́б 弯曲，曲折
обнару́живать, обнару́жить 揭露，显出，发現
рост 增大，生长
погре́шность 〔阴〕誤差，錯誤
моното́нность 〔阴〕单調
вслепу́ю 〔副〕盲目地
науга́д 〔副〕碰侥倖，乱碰
сли́шком 〔副〕太，过于
неожи́данность 〔阴〕意外，突然
поведе́ние 性質，性状
чрезвыча́йно 非常地，特别地
те́сный 紧密的，狭小的

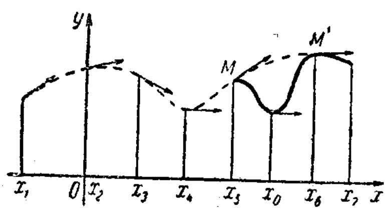
短語和詞組 Выражения и словосочетания

в согла́сии *с чем* 与…一致, 同意…

Построе́ние гра́фика по «элеме́нтам»

Построе́ние гра́фика фу́нкции по его́ то́чкам, соотве́тствующим произво́льно вы́бранным то́чкам на о́си незави́симой переме́нной, мо́жет дать ли́нию, значи́тельно отклоня́ющуюся от и́стинного гра́фика. Одна́ко зна́ние произво́дных чи́сел позволя́ет уточни́ть построе́ние гра́фика. Действи́тельно, вы́числив при да́нном значе́нии незави́симой переме́нной значе́ния фу́нкции и её произво́дной, мы смо́жем указа́ть не то́лько соотве́тствующую то́чку гра́фика фу́нкции, но и то направле́ние, по кото́рому, начина́я от э́той то́чки, ну́жно продо́лжить гра́фик.

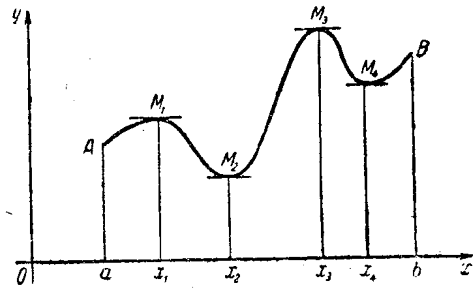
Совоку́пность двух чи́сел: значе́ния фу́нкции и значе́ния её произво́дной, называ́ется элеме́нтом фу́нкции при да́нном значе́нии незави́симой переме́нной. Графи́чески элеме́нт фу́нкции изобража́ется то́чкой на пло́скости и исходя́щим из неё ве́ктором, углово́й коэффицие́нт кото́рого ра́вен произво́дному числу́.



Черт. 1.

Постро́ив элеме́нты фу́нкции, мы при проведе́нии ли́нии, соединя́ющей на́йденные то́чки, смо́жем уже́ приде́рживаться тех направле́ний, кото́рые ука́зываются э́тими ве́кторами (черт. 1). Если како́е-нибудь из них заме́тно отлича́ется от прямолине́йного направле́ния к сле́дующей то́чке гра́фика, то э́то пока́зывает, что в соотве́тствующем интерва́ле фу́нкцию нельзя́ предста́вить пла́вной ли́нией, бли́зкой к прямолине́йному отре́зку, соединя́ющему ука́занные две то́чки.

По́льзуясь построе́нием по элеме́нтам, мо́жно получи́ть бо́лее то́чный гра́фик, чем при построе́нии по то́чкам, но и э́то построе́ние не даёт гара́нтии от суще́ственных оши́бок. Так, наприме́р, у то́чки M (черт. 1) гра́фик фу́нкции мо́жет действи́тельно начина́ться в согла́сии с направле́нием прямо́й MM', но зате́м си́льно изогну́ться, и э́тот изги́б не бу́дет обнару́жен. А он как раз ука́зывает на измене́ние хара́ктера ро́ста фу́нкции. Очеви́дно, что всех таки́х погре́шностей мы избежи́м, е́сли бу́дем зара́нее знать те значе́ния незави́симой переме́нной, при кото́рых фу́нкция изменя́ет хара́ктер своего́ ро́ста. На черт. 2 в то́чках x_1, x_2, x_3, x_4 фу́нкция $y=f(x)$, предста́вленная гра́фиком AB, меня́ет хара́ктер своего́ ро́ста. Интерва́л ме́жду двумя́ таки́ми после́довательными то́чками явля́ется интерва́лом моното́нности фу́нкции, т. е. интерва́лом, в кото́ром фу́нкция и́ли то́лько возраста́ет и́ли то́лько убыва́ет.



Черт. 2.

Таки́м о́бразом, е́сли зара́нее найти́ то́чки, в кото́рых фу́нкция меня́ет хара́ктер своего́ ро́ста, то мо́жно стро́ить её гра́фик не вслепу́ю, науга́д выбира́я то́чки на о́си незави́симой переме́нной, а пре́жде всего́ отмеча́я э́ти осо́бенные то́чки и тем са́мым разбива́я весь интерва́л на интерва́лы моното́нности, в кото́рых не мо́жет встре́титься сли́шком больши́х неожи́данностей в поведе́нии фу́нкции.

Чрезвыча́йно ва́жно, что ука́занные то́чки и интерва́лы моното́нности фу́нкции мо́гут быть на́йдены на основа́нии рассмотре́ния зна́ка её произво́дной. Эта те́сная связь ме́жду хара́ктером ро́ста фу́нкции и зна́ком её произво́дной игра́ет большу́ю роль в вопро́сах иссле́дования фу́нкций.

(选自 А. Ф. Бермант 編: "数学分析教程")

第四課 Четвёртый урок

生詞 Новые слова

знако́мство *с кем-чем* 認識, 熟悉

исключи́тельно 〔副〕例外, 非常; 〔語气〕唯, 只

интегра́льный 积分的

переноси́ться, перенести́сь *на что* 移动, 轉移到

о́бласть 〔阴〕区域, 部分

подро́бность 〔阴〕詳細, 詳尽

принципиа́льно 原則上, 根本上

представля́ться, предста́виться *чем* 是, 假装是

появле́ние 出現, 呈現

моме́нт 頃刻間, 矩, 力矩

усвое́ние 掌握, 精通, 吸收

сосредото́чивать, сосредото́чить 集中

иде́йный 思想的

растра́чивать, растра́тить (-а́чу, -а́тишь) 浪費掉, 消耗尽

форма́льный 形式的, 表面的

напро́тив 〔語气〕相反; 〔副〕相反; 〔前〕*чего* 在...对面, 面向

техни́ческий 技术的, 專門的

справля́ться, спра́виться *с чем* 办得到, 胜任, 作得好

про́чно 坚固地, 結实地

усва́ивать, усво́ить 掌握, 消化

во-пе́рвых 〔插〕首先, 第一

большинство́ 多数, 大多数

коро́че (ко́ротко 的比較級) 較簡短地

во-вторы́х 〔插〕其次, 第二

облегча́ть, облегчи́ть 減輕, 簡化

излага́ть, изложи́ть 叙述, 說明

пра́вда 〔插〕真的, 的确

сравни́тельно 較, 比較

сокраще́ние 簡略, 約

чувстви́тельный 敏感的, 易感应的

短語和詞組 Выражения и словосочетания

по бо́льшей ча́сти 多半

интегра́льное исчисле́ние 积分学

как пра́вило 〔插〕通常, 照例