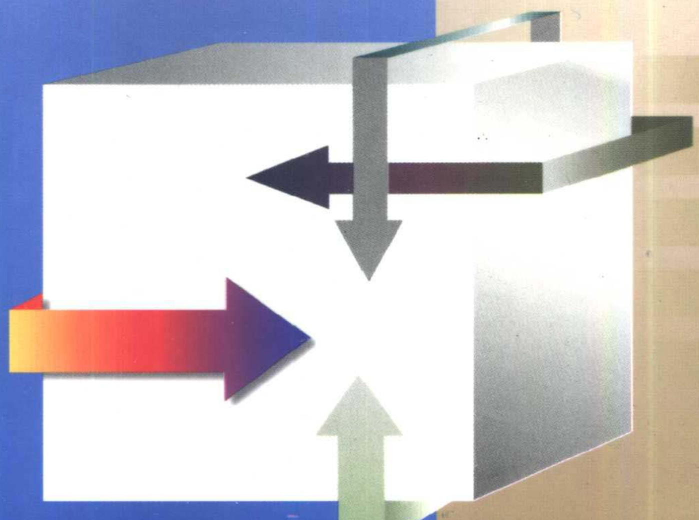
大学数学教程

第1卷 第2册

级数、含参量积分、微分方程

龚冬保 王宁



西安交通大学出版社

大学数学教程

第1卷　第2册

级数、含参量积分、微分方程

龚冬保　王　宁

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 提 要

本书是在作者经过多年教学改革基础上编写而成的。作者以系统论的观点为指导，对原来的高等数学、线性代数、复变函数、数理方程及积分变换五门课的内容进行了优化组合，并为了适应不同专业对数学的教学要求，实行模块式的结构组合。

本册书的主要内容是级数、含参量积分与微分方程。其中在级数部分包括数项级数、幂级数、泰勒级数、洛朗级数及傅立叶级数。本套书可作为理工科院校各专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程．第1卷．第2册，级数、含参量积分、微分方程／龚冬保，王宁编著．—西安：西安交通大学出版社，2001.3
ISBN 7-5605-1378-6

Ⅰ．大…　Ⅱ．①龚…②王…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 88032 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号　邮政编码：710049　电话：(029)2668316)
西安向阳印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787 mm×1 092mm　1/16　印张：9.25　字数：219 千字
2001 年 2 月第 1 版　　2001 年 2 月第 1 次印刷
印数：0 001～3 000　　定价：12 00 元

前　言

作为大学数学教程，本书主要内容是级数，含参量积分与微分方程。

本册教材的主要特点：一是在级数部分，实数、复数值级数同时介绍，泰勒级数与洛朗级数结合介绍；增加了含参量积分，目的之一是重积分化为累次积分时，用到了含参量积分。其二将含参量积分置于函数项级数之前，并介绍了有关一致收敛的概念及其重要性质。这些是现代应用数学的重要的基本理论，同时又为以后介绍特殊函数与积分变换奠定了理论基础。

微分方程部分，主要介绍线性常微分方程解的结构及常系数线性方程与方程组的解法，以及解一般一阶方程的迭代法和微分方程的幂级数解，这一切不仅在实际上很有用，而且也为介绍特殊函数作了准备。

对含参量积分，一般非数学系专业的学生可以不学，因此，我们独立成一章，不学者可以跳过此章。若要学习积分变换，建议最好选择其中的部分内容。

本教程原拟出四册，但考虑到有些内容要在大学二年级上学期讲述。因此，将其中一些数理方程、特殊函数、保角变换、积分变换的内容，另成一册。

本册书中一些内容与第 2 卷第 2 册的相应内容联系密切，最好平行讲述。

从本册教材的内容安排，读者可能已经可以看出本教程的体系了。从旧体系的观点看，本教程有点"乱"。而我们以为这样做正是要学生了解数学各分支间的内在联系，及微积分学、线性代数在其中的基础作用。培养学生综合运用所学数学知识去分析问题和解决问题的能力，是我们的这套教材的目的。当然，这样设计是不是好，还要在教学中不断实践，不断完善。因此十分希望教师和同学能对本书多提宝贵意见。

作　者

2000 年 12 月

目　　录

第 4 章　数项级数

级数是微积分的重要内容之一，级数的理论，在自然科学、工程技术及近似计算中，都有广泛的应用。所谓级数，就是一种无限和式。比如初等数学中讲过的无穷递缩等比数列的和，就是一类收敛级数的和。这一章，我们将讨论数项级数的一些重要性质。

4.1　数项级数的一般概念和基本性质

4.1.1　数项级数及其敛散性的定义

定义 4.1　已知数列 $\{a_n\}$，将该数列的各项依次用加号连接起来的表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.1}$$

称为**数项级数**，简称为**级数**。(4.1) 式中的第 n 项 a_n 称为此级数的通项。

级数(4.1) 的前 n 项的和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 称为该级数的部分和。因此，由级数(4.1) 又可得到一个部分和数列：

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \cdots \tag{4.2}$$

定义 4.2　如果级数(4.1) 的部分和所组成的数列 $\{S_n\}$ **收敛**，就称**级数(4.1) 收敛**。这时称**极限** $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **为级数(4.1) 的和**，记作

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.3}$$

若**数列** $\{S_n\}$ **发散**，就称**级数(4.1) 发散**。

研究级数，主要是研究级数的收敛、发散的性质。由定义 4.2 知，这个问题归结为研究数列 $\{S_n\}$ 的敛散性。因此，收敛的级数具有收敛数列的基本性质。但由于 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是一个特殊的数列，因而级数又有其特性。我们更应当注意级数的这个特点。

例 4.1　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 收敛，并求其和。

证　因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$，故此级数收敛，且其和为 1。

例 4.2　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$ 的敛散性。

解　因为

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在。所以此级数发散。

例 4.3　研究等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

的敛散性。

解　因为当 $|q| \neq 1$ 时，

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

所以，当 $|q| < 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$。故 $|q| < 1$ 时，该级数收敛，且其和为 $\frac{1}{1-q}$。这就是初等数学中所讲的无穷递缩等比数列的求和公式。

当 $|q| > 1$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q}$ 不存在。故此时该级数发散。

当 $q = 1$ 时，$S_n = n$，显然该级数发散。

当 $q = -1$ 时，这就是例 4.2 的情形，级数也发散。

总之，我们得出如下重要结论：

等比级数当公比 q 的绝对值小于 1 时收敛；当公比 q 的绝对值大于或等于 1 时发散。

4.1.2　数项级数的基本性质

由于级数的敛散性归结为其部分和数列的敛散性，由数列收敛的性质，可得级数的下面性质，请读者自行证明。

性质 1　改变级数的有限项，不影响其敛散性。

这里改变级数的有限项指的是对一个级数去掉或添加或改变有限项。当然对一个收敛级数而言，改变有限项后，其和一般会发生变化。

性质 2　若以下两个级数收敛

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A、B 分别表示它们的和，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ka_n + lb_n)$ 收敛（k，l 是两个常数），且其和为 $kA + lB$。即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n + lb_n) = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n + l\sum_{n=1}^{\infty} b_n = kA + lB \tag{4.4}$$

性质3　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则不改变各项的顺序，可以任意添加括号，所得的新级数仍收敛，且其和不变。

注意：这个性质只是对收敛级数而言。对一个发散级数，添加括号后有可能收敛，也有可能发散。如例 4.2 中，如果每两项加括号，则变为一个收敛级数。即

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

性质 4 收敛级数的通项是无穷小量。即若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

证 因为 $a_n = S_n - S_{n-1}$，故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

注意：性质 4 是级数收敛的**必要条件**，不是充分条件。如果某个级数的通项不趋向于 0，则可以断定该级数一定发散。如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ 是发散的。因为$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$。

例 4.4 级数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 称为**调和级数**，证明调和级数发散。

证 因为

$$a_n = \frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} \mathrm{d}x > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln n$$

所以

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k > \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

又 $S_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

故调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散。

由此例可以看出，尽管调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的通项$\dfrac{1}{n}$ 为无穷小量，但却是发散的。

数列收敛的柯西准则，也适用于级数，从而有

定理 4.1（柯西收敛准则） 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，只要 $n > N$，p 是任一正整数，皆有不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

成立。

习题一（A）

1. 用定义判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ 的敛散性。

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项之和 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$，试写出此级数，并求它的和。

3. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ 的敛散性。如果收敛，求其和。（提示：$2n+1 = (n+1)^2 - n^2$）

4. 设数列$\{a_n\}$ 单调递增，且 $0 < a_n < C$，$n = 1,2,\cdots$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛。

4.2 同号级数

同号级数是指级数的各项有相同的符号。由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$同敛散。故我们只须讨论正项级数。所谓**正项级数**,就是指通项$a_n \geqslant 0$的级数。以下我们仅讨论正项级数的敛散性。

4.2.1 正项级数的比较判别法

由于正项级数的部分和是单调递增的数列,结合数列的单调有界原理,可得到下面的定理。

定理 4.2 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是其部分和数列$\{S_n\}$有界。

根据此定理,便可以得到判断正项级数敛散性的主要判别法则——比较判别法。

定理 4.3(比较判别法) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为两个正项级数,如果它们之间满足:

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

则 (1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$必收敛;

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$必发散。

证 (1) 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,由定理 4.2 知,其部分和数列$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$有界。而$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$,故$A_n$也有界,再由定理 4.2 知,级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

(2) 用反证法。假设级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,则由(1) 知,级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。这与已知条件矛盾。故级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散。

由上述定理可知,正项级数如果发散,其部分和必趋于$+\infty$。因此,就正项级数而言,我们常用$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$表示此级数收敛,而用$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$表示此级数发散。又根据级数的性质 1 可知,一个级数,只要当n充分大之后,相应的a_n保持非负,就可以看成是正项级数。因为前有限项可作改变(或去掉)而不影响其敛散性。但为了叙述上的方便,我们以下都设所研究的级数的各项全是非负数。

例 4.5 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$。

解 (1) 因为$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$,而已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$收敛,所以由比较判别法

以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛。从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。(为什么?)

(2) 因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$,而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{10n}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,故发散。

4.2.2 正项级数敛散性的检比与检根判别法

比较判别法的用途在于,要判别一个较复杂的正项级数是否收敛,可以找另一个已知其敛散性的正项级数。如果要判断的级数的通项不超过已知收敛级数的通项,则此级数是收敛的。由于等比级数的敛散性我们已搞清楚了,故可以用等比级数作标准,来判别一些正项级数的敛散性,从而得到两种不同的判别法则。

第一种判别法则,称为达兰贝尔(d'Alembert)[①]准则。这个准则来源于等比级数的后项与前项之比为常数的性质,故也叫检比法。由于讨论的是正项级数,故我们设等比级数的公比为正数。

若对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,总有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1(n=1,2,\cdots)$,则

$$a_{n+1}\leqslant a_nq\leqslant a_{n-1}q^2\leqslant\cdots\leqslant a_1q^n$$

这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}<+\infty$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

又若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$,则 $n\to+\infty$ 时,$a_n\not\to 0$,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$。上面用到了一个级数的后项比前项,具体应用时不一定方便。因此,这一准则常用其极限形式,叙述如下。

定理 4.4(达兰贝尔准则) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,若极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \text{ 存在}$$

则 (1) 当 $q<1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$;

(2) 当 $q>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$。

证 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$,故存在 N,对一切 $n>N$,皆有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1+q}{2}<1$。故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$,所以存在 N,当 $n>N$ 时,总有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$,故 $a_n\not\to 0,n\to\infty$。从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

---

① 前译达郎贝尔。

值得注意的是，当$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$时，达兰贝尔判别法失效，即在这种情况下，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$有可能收敛，也有可能发散。例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$均有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，但它们中前者收敛而后者发散。

第二种判别法也叫做柯西判别法，它来源于等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$的第$n$项的$n$次算术根$\sqrt[n]{q^n}=q$，故也叫检根法。不用极限形式也是非常清楚的。当$\sqrt[n]{a_n}\geqslant q\geqslant 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；当$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。同样，我们叙述其极限形式如定理4.5(请读者自行证明)。

定理4.5(柯西判别法) 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \quad 存在，$$

则 (1) 当$q<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$；

(2) 当$q>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$。

同样，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性需要进一步判定。例如，对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，均有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，但也是前者收敛，而后者发散。

不管是达兰贝尔判别法还是柯西判别法，都有其局限性，当通项中含有阶乘时，用达兰贝尔判别法便于化简求极限。

例4.6 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}(a>0)$的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\bigg/\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0<1$$

由达兰贝尔判别法，此级数收敛。

例4.7 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\bigg/\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}1\bigg/(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$$

所以由达兰贝尔判别法知，此级数收敛。

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故由检根法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛。

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}} = 2 > 1$,故由检根法知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$发散。

4.2.3 柯西积分判别法及与 p - 级数相比较的判别法

我们已经知道,达兰贝尔判别法与柯西判别法当极限为 1 时均失效。产生这样结果的原因大体是这样的,以上两个判别法都是将要研究的正项级数去和等比级数相比较,这就要求所讨论的级数如果是收敛的,其收敛的“速度”应比等比级数收敛的“速度”更快,或相当。如果是发散,则它比等比级数发散的“速度”更快,或相当。但是有些级数,如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$是收敛的,但它收敛的速度与任一递缩等比级数相比,都要缓慢;又如调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散的速度也很缓慢。因而,无论达兰贝尔判别法还是柯西判别法则,对于它们都失效。为了能判别类似于上面的敛散速度缓慢的一类正项级数的敛散性,需要另外寻找一批较易判别其敛散性的级数,以它们作标准,建立一个更精确一些的判别法则。为此,我们先介绍柯西积分判别法则。

柯西积分判别法也是基于比较判别法,它巧妙地将一类级数和与之相应的函数的旁义积分相比较,从而得到此法则。

定理 4.6(柯西积分判别法) 设函数 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上连续,单调减,且对任意 $x\in[1,+\infty)$,均有 $f(x)>0$,则旁义积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$同时收敛或发散。

[分析] 由于旁义积分和正项级数都有比较判别法,故我们可以从图 4.1 看出,$f(n)$ 可看作为 $f(n)\times 1$,其几何意义表示以 $f(n)$ 为高,以 1 为底的矩形面积。若 n 从 1 算起,则$\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$表示比曲边梯形面积$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 更大的阶梯形面积之和,即图中实线所示的阶梯形。若 n 从 2 起来,则$\sum\limits_{k=2}^{n}f(k)$表示比曲边梯形面积$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 要小的阶梯形面积之和,即图中虚线所示的阶梯形。沿着这个思路,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛,则可证明相应的旁义积分有界而收敛;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}f(n)$发散,则相应的旁义积分无界而发散。因此可得到本定理的证明。

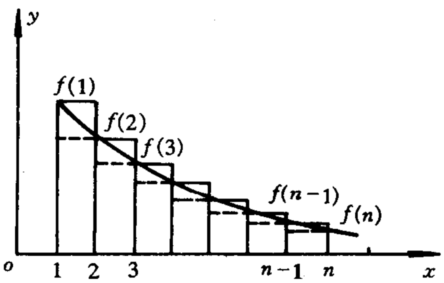


图 4.1

证 按上面的分析,我们先研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}a_n$$

显然 $a_n=\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x>0$。

由于$f(x)$单调减，则$f(n-1)>a_n>f(n)$。由正项级数的比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$同敛散。因此，我们只要证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$与所讨论的旁义积分同敛散即可。为此，记$n=[b]$，$b$是足够大的正实数，则

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x<\int_{1}^{b}f(x)\mathrm{d}x<\sum_{k=2}^{n+1}\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x$$

由于$n=[b]$与b一同趋于$+\infty$，由上不等式知，若级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$收敛，则由比较判别法，旁义积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\int_{1}^{b}f(x)\mathrm{d}x>\sum\limits_{k=}^{n}a_k$无界，也发散。

同理，由旁义积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的敛散性，也可说明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性。

例4.8 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

解 (1) 取$f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$，则$f(x)$在$[2,+\infty)$上满足柯西积分判别法的条件。又

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty$$

故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散。

(2) 取$f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

而
$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$$

即，旁义积分$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$收敛，由柯西积分判别法知，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$收敛。

一般地，正项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^t}$，在$t\leqslant 1$时发散；在$t>1$时收敛。请读者自行证明。

根据柯西积分判别法，立即可得关于$p-$级数敛散性的结论。所谓**$p-$级数**，就是形如

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

的级数。关于$p-$级数，有如下结论：

当$p>1$时，$p-$级数收敛；当$p\leqslant 1$时，$p-$级数发散。

证 当$p\leqslant 0$时，$\dfrac{1}{n^p}\not\to 0(n\to\infty)$，即$p-$级数的通项不趋于0，故发散。因此，我们只要讨论$p>0$的情况。取$f(x)=\dfrac{1}{x^p}$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上满足柯西积分判别法的条件，因此$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$与广义积分$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$同敛散。

我们已经知道广义积分$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，当$p>1$时收敛；当$p\leqslant 1$时发散。因此，$p-$级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,在 $p>1$ 时收敛,在 $p \leqslant 1$ 时发散。

由此可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,因为 $p=\frac{1}{2}<1$。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛,因为 $p=\frac{3}{2}>1$,等等。

在引进 p - 判别法之前,我们先介绍比较判别法的极限形式。

定理 4.7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个正项级数,若极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

存在,则

(1) 当 $A>0$ 时,两级数同敛散。

(2) 当 $A=0$ 时,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

证 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$,由极限定义,当 n 充分大时,总有

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}A$$

成立。即有

$$\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} A b_n$$

由此知,若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$,则 $\frac{3}{2}A\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$,得 $\frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

另一方面,若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$,则 $\frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$,从而有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$。若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,则 $\frac{3}{2}A\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

综上所述,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散。

(2) 由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 知,对某个给定的常数 $\varepsilon_0 > 0$,存在 N_0,当 $n > N_0$ 时,有 $0 < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon_0$,从而有 $a_n < \varepsilon_0 b_n$。因此,如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$,便有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ 成立。

现在,我们将从这个结果导出 p - 判别法。只要令 $b_n = \frac{1}{n^p}$,即将要判别敛散性的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 p - 级数比较,只要看极限 $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ 的情况,从而有以下结论。

定理 4.8(p - 判别法) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,若存在常数 p,使极限 $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = A$($A$ 可以是 0 或 $+\infty$),