世界难题

3N+1猜想

邬家邦 著

湖南大学出版社

3N+1 Caixiang

3N + 1 猜 想

邬 家 邦　　著

湖 南 大 学 出 版 社
2001 年·长沙

内容简介

本书是研究3N+1猜想的一本专著.由于此猜想所涉及的函数最先是由Lothar Collatz于20世纪30年代考察过的,故又称柯雷茨(Collatz)猜想,它是像哥德巴赫(Goldbach)猜想那样既通俗易懂又迄今未能从理论上证明的迷人的数论难题.

本书先介绍3N+1猜想的由来;然后以研究此猜想时所采用的三种迭代方式(通常迭代,伸长迭代和压缩迭代)为主线重点讲述一些迷人的发现和研究成果;最后介绍3N+1猜想的推广.

本书内容深入浅出,雅俗共赏,既可作为中学生和广大数学爱好者的阅读材料,也可作为层次较高读者们的研究参考书.

图书在版编目(CIP)数据

3N+1猜想/邬家邦著.—长沙:湖南大学出版社,
2001.6
ISBN 7-81053-376-2
Ⅰ.3... Ⅱ.邬... Ⅲ.数论—普及读物
Ⅳ.0156-49
中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第036586号

3N+1猜想
3N+1 Caixiang
邬家邦 著

□责任编辑 李立鹏 李 刚
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 1/32 □印张 6.5 □字数 170千
□版次 2001年6月第1版 □2001年6月第1次印刷
□印数 1—3 000册
□书号 ISBN 7-81053-376-2/O·26
□定价 10.00元

序

㊀ 王能超

“3N + 1 之谜”的无限魅力令人陶醉.

这个谜的含义连小学生都能领会. 一个自然数 N_0 可以按下述手续加工成新的自然数 N_1: 当 N_0 为偶数时将它除以 2, 反之, 如果 N_0 是个奇数就将它乘以 3 再加上 1, 即令

$$N_1 = \begin{cases} N_0/2, & \text{若 } N_0 \text{ 为偶数} \\ 3N_0 + 1, & \text{若 } N_0 \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们称这种加工手续为 **3N + 1 法则**. 这样获得的 N_1 依然是个自然数, 因而可将它再依 3N + 1 法则进行加工, 进一步获得新的自然数 N_2. 如此反复地做下去, 即可将所给 N_0 演化成一个自然数序列

$$N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{k-1}, N_k, \cdots$$

这种演化过程当中潜藏着什么样的规律性呢?

随意选取一个自然数——譬如数 11 进行试验. 注意到这是个奇数, 将它乘以 3 再加上 1, 得 34; 34 是个偶数, 将它除以 2 得 17; 继续乘以 3 再加上 1 得 52, 除 2 得 26, 再除 2 得 13. 如此反复地做下去, 结果生成如下自然数序列:

$$\begin{aligned} & 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \\ & \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \\ & \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \end{aligned}$$

这样最终获得的结果是最基本的自然数 1.

这仅仅是偶然的巧合吗? 人们做了许多实验, 发现都遵从这个规律. 据报道, 日本学者米田信夫曾经检验过一万亿之内的所有自然数, 发现 3N+1 猜想全都成立, 无一例外.

任何自然数, 依 3N + 1 法则进行加工, 最终都演化成自然数

1,这就是所谓 3N + 1 猜想.

3N + 1 猜想引起人们广泛的关注. 在小学生们看来,这是个饶有趣味的数学游戏;可在大数学家们的眼里,它却是个高难度的数学猜想,就像费马猜想、哥德巴赫猜想那样.

在最近的半个多世纪内,多少人为之绞尽脑汁,试图破解 3N + 1 之谜,但至今仍未获得令人满意的答案. 大数学家爱尔特希万般无奈地说,数学还没有成熟到足以解决这样的问题!

为什么会有这种"万数归一"的奇异现象呢?

谁都知道,任何自然数都是由单位数的 1 累加生成的,因此只要逐次减 1,总可以使它们再回归到数 1. 不过这种做法是如此地平淡,没有任何趣味可言.

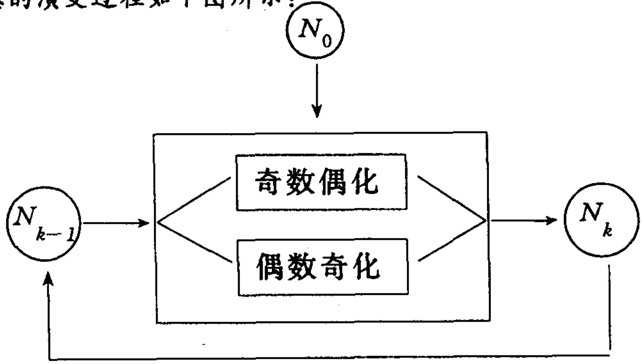
人们喜爱跌荡起伏、变幻莫测的演化过程.

设将自然数区分为奇数与偶数两大类,并采取"奇数偶化、偶数奇化"的交替转化策略:

如果所给的是个偶数,就反复地除以 2 将它转化成奇数;

如果所给的是个奇数,就乘 3 加 1 将它转化为偶数.

显然,所谓 3N + 1 法则就是这两种转化策略的综合. 3N + 1 猜想的演变过程如下图所示:



这种演化过程的最终结果会是什么呢?

由于任何自然数都是由数 1 累加生成的,因而数 1 在自然数

中占据特殊的地位，它是一切自然数的“始祖”，在这个意义上可称之为**原生数**.

我们将除 1 以外的所有自然数划分为奇数与偶数两大类. 很明显，如果碰到奇数就化为偶数，碰到偶数就化为奇数，这样反复演化的最终结果当然既不是奇数，也不会是偶数，而只能是原生数 1.

可见 3N + 1 猜想的提出是很自然的.

问题在于，对于任给自然数 N_0，依 3N + 1 法则将它变成原生数 1，这个加工过程一定能在有限步内完成吗?

我非常欣赏邹家邦同志的豪情壮举，他单枪匹马地向 3N + 1 猜想这个数学难题宣战. 多年来，他不计名利，不畏艰险，孜孜不倦地从事这项探索，并已取得了一系列可喜的成绩. 本书就是在总结前人和他本人研究成果的基础上写成的.

邹家邦同志之所以写这本书，其主要意图是希望向全社会宣传介绍 3N + 1 猜想这个数学难题，以激发人们的兴趣和热情，以鼓动更多的中国人——首先是青少年们参与这项研究. 他殷切期望我国这方面的研究工作能够早日迈进国际先进行列.

衷心祝愿这个良好愿望能早日实现.

2000 年 10 月 28 日

前　言

在中国乃至世界恐怕没有别的数学难题能像哥德巴赫(Goldbach)猜想那样为数学界内外人士普遍关注.为什么这道令数学家们望而生畏的难题对界外人士也有那么大的吸引力呢？也许通俗易懂是首要原因.普通人只需知道什么是自然数和素数就可以随时进行验证.岂止是验证！不少人不管数学家发出的“骑自行车不能登上月球”的告诫，以初生牛犊不怕虎的精神孜孜求证，乐此不疲，着实令人赞佩.

我也是对这样的猜想颇感兴趣的人.不过本书向读者讲述的不是人们早已熟悉的哥德巴赫猜想，而是只需知道什么是偶数什么是奇数的人就会明白的另一个数论猜想——**3N＋1 猜想**：任给一自然数，若它是偶数，就用 2 除；若它是奇数，先用 3 乘，再加 1 变成偶数，再用 2 除.对所得结果视其是偶数还是奇数按照上法同样处理，如此经过有限多次的偶数变奇数奇数变偶数处理后，必能使所给的自然数变成 1.这就是 **3N＋1 猜想**（或称 **3*x*＋1 猜想**，**柯雷茨(Collatz)猜想**）.自从这个猜想提出以来，半个多世纪过去了，数学家们对它进行了深入的研究，取得了一些成果，其中包括已对至少直到 10^{12} 的自然数一一进行了验证而未发现例外.但理论上的证明至今未能获得，成为一道像哥德巴赫猜想那样迷人的数学难题.

本书第 1 节介绍 3N ＋ 1 猜想的由来；然后依照研究 3N ＋ 1 猜想时所采取的三种迭代形式即通常迭代(2 节 ～ 6 节)、伸长迭代(7 节)、压缩迭代(8 节 ～ 9 节)重点讲述研究此猜想时所发现的许多奇妙有趣的现象，所取得的成果；最后讨论 3N ＋ 1 猜想的推广(第 10 节).三种迭代中所讲述的内容有相对的独立性，无因果关

系，都是新的，不是互相移植，读者不必按本书的次序阅读. 书中包含的引理、定理及推论共有 80 多个，普通读者和青年学生不要望而生畏，我在给出它们的证明时注意到了满足不同层次的读者的需要. 对暂时读不懂的内容可以只知其然而不知其所以然，甚至可以跳过，尤其对只是引用而未给出证明的引理、定理等更是如此. 这就如同 $\pi \approx 3.1416$，你承认它就行了，而不必要你去求它一样. 这就是说你读懂了大意，你就可以参加 $3N+1$ 猜想的研究. 而只有在研究中你才能读懂原来读不懂的东西.

自 $3N+1$ 猜想问世以来，国外学者已研究了好多年，并取得了一些成果，而在国内未引起足够的注意，特别是许多青年朋友可能还不知道有此迷人的猜想，这不能不令人感到遗憾. 想当年大力宣传哥德巴赫猜想在我国取得领先的研究成果时，连界外人士都普遍对该猜想着迷，但在数学界内部专心致志从事该猜想研究的人却不多. 之所以如此，也许是因为“猜想”之类的课题属于纯数学的缘故吧. 搞纯数学研究往往枯燥、单调，耗费了精力，既得不到直接经济效益又难见理论上的成果. 尤其是现在，社会热点使得人们看重应用数学而看轻纯数学和基础数学，热衷于搞纯数学的人越来越少. 我认为纯数学和应用数学是数学大厦的两大支柱，好比一个人的两条腿，如果只重视、加强一条腿，而轻视、削弱另一条腿，数学科学能发展得好吗？

我写此书的一个目的对普通读者来说是为了“招兵买马”，因为我觉得本来会令众人着迷的猜想不能因为大家不知道而受到冷落，希望通过这一宣传激发人们像对待哥德巴赫猜想那样对 $3N+1$ 猜想及其研究的兴趣和参与意识；而对专家学者们来说则是抛砖引玉，求得高水平的理论研究在国内的出现. 专家学者们的研究需要群众基础，众星捧月.

根据国内外研究 $3N+1$ 猜想的进展情况，必要时也许我将会作出续写本书的打算.

我写此书时得到了博士生导师王能超教授的肯定、鼓励和帮

助，正因为如此，我为写好本书而倾注了全力.出版社的同志也对出版这样的书籍表示赞赏.作者谨向他们表示衷心的感谢！

限于作者的水平，书中的错误和不当之处在所难免，切望广大读者和专家学者们批评指正.

邬家邦

2000年12月于华中科技大学

目　　次

1 3N+1猜想的由来

1.1 何谓3N+1猜想

众所周知，数论科学中有一个著名的“哥德巴赫(Goldbach)猜想”，或简称为“1+1”，虽然此猜想备受数学界内外人士的广泛关注和研究，但至今没有得出正确与否的结论，成为数学之谜．除此之外，数论界还有一个更易被普通人理解和检验却同样未能从理论上证明的猜想——本书要介绍和讨论的专题——“3N+1猜想”．

何谓3N+1猜想呢？

任给一自然数n，如果n是偶数，就作运算$\frac{n}{2}$；如果n是奇数，则先作运算$3n+1$，再以2除．然后将所得的数视其是偶数还是奇数再作如上所说的处理，如此继续下去，问是否能经过有限次的运算将n变成1?这就是**柯雷茨(Collatz)问题**，或称**3N+1问题**，**$3x+1$问题**．

上述问题用数学语言描述就是：

对于任给$n\in \mathrm{N}$(自然数集合)，定义数论函数$C(n)$(称为**Collatz函数或3N+1函数**)为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n\equiv 0(\mathrm{mod}2)\text{ 时；}\\ \dfrac{3n+1}{2}, & \text{当 } n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\text{ 时．}\end{cases}\tag{1.1.1}$$

依公式$C^0(n)=n, C^k(n)=C(C^{k-1}(n))(k=1,2,\cdots)$进行迭代，得到$n$的**迭代序列**，也称$n$的**轨迹序列**，记为$T(n)$，即

$$T(n)=\{C^k(n)\}_{k=0}^{\infty}$$
$$=\{C^0(n),C^1(n),C^2(n),\cdots\}. \quad (1.1.2)$$

问是否存在有限的(最小)迭代次数 k，使得 $C^k(n)=1$?此问题提出以来虽经一些数学家的努力，但至今仍未得到"是"或"否"的答案. 认为答案为"是"，这便是**柯雷茨猜想**，或称 **3N + 1 猜想**，**3x + 1 猜想**. 此猜想是继哥德巴赫猜想之后的另一著名且有趣的数论难题.

Collatz 问题中各自然数 n 的轨迹序列(1.1.2)可形象地用有向图来表示:以 n 为图的顶点，以从 n 到 $C(n)$ 的箭头表示有向边. 这样的有向图称为 Collatz 图或 Collatz 树，图 1.1 画出了 Collatz 树的一部分. 若 Collatz 猜想正确，则所有的自然数 n 都各自从它所在的顶点出发，沿各自的迭代轨迹运动而最终汇合到 1，形成"落叶归根(1)"之势;或说最终在 1 与 2 之间永远跳动下去(因为 1 的迭代轨迹是圈(1,2,1)). 例如，从图 1.1 看出 7 的迭代轨迹是

$$T(7)=\{C^0(7),C^1(7),C^2(7),\cdots\}$$
$$=\{7,11,17,26,13,20,10,5,8,4,2,1,2,1,\cdots\}. \quad (1.1.3)$$

1.2 3N+1 猜想的由来

3N+1 猜想之所以又称为 Collatz 猜想是因为它与德国汉堡大学应用数学研究所的 Lothar Collatz 教授有密切关系. 它的提出经历了一个过程. 早在 1928 年～1933 年当 L. Collatz 还是汉堡大学的一个学生的时候，由于受到他的老师 Edmund Landau，Oscar Perron 等人讲课的启发，他对数论函数，图论等产生了浓厚的兴趣. 数论与图论之间，有着密切的联系，其中之一是可将数论函数 $f(n)$ 与有向图结合起来:取整数 n 作为图的顶点，用一带箭头的线段将 n 与 $f(n)$ 连结起来. 当时 L. Collatz 画了许多关于数论函数的有向图，并作了如下分类:

(1)单值函数

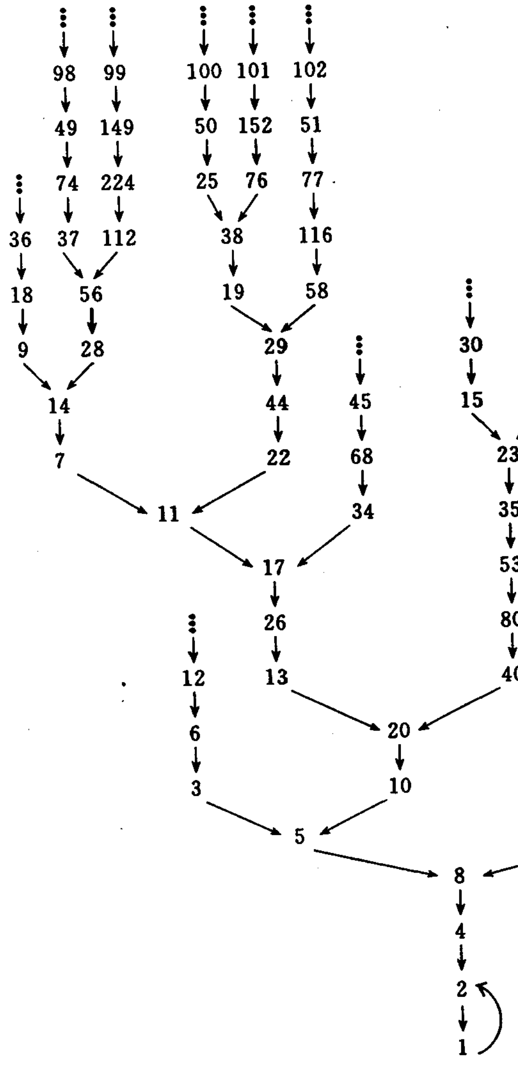


图 1.1 Collatz 树

a)有向图只需画在一根直线上.

例如 $f(n)=n+1$(图 1.2).

$$\cdots\ -4 \to -3 \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4\ \cdots$$

图 1.2

b)有向图为树.

例如 $f(n)=n-g(n)$，其中 $g(n)$ 是除去 n 本身的 n 的最大因数. 例如 $f(21)=21-7=14$. 若 p 是素数，则 $f(p)=p-1$. 图 1.3 画出了该树的一部分.

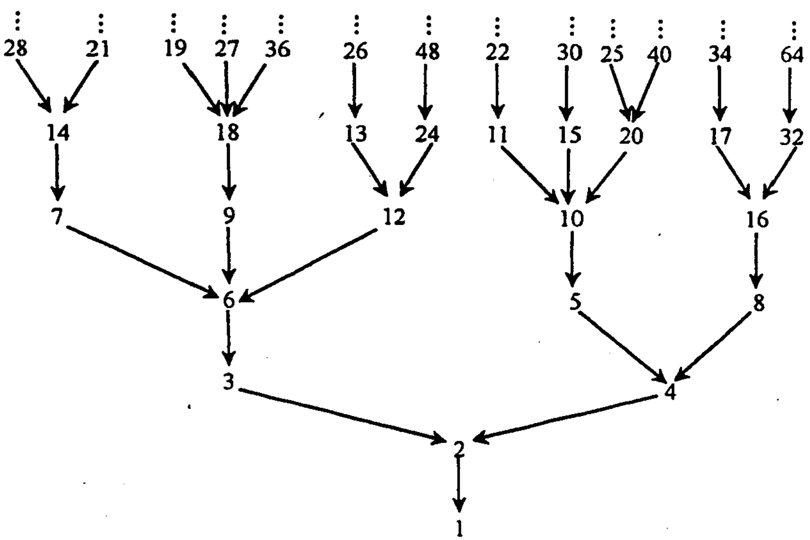


图 1.3

c)有向图为森林.

图由 $k(\geqslant 2)$ 棵互不连通的树构成. 例如 $f(n)=n+n^2$(图 1.4).

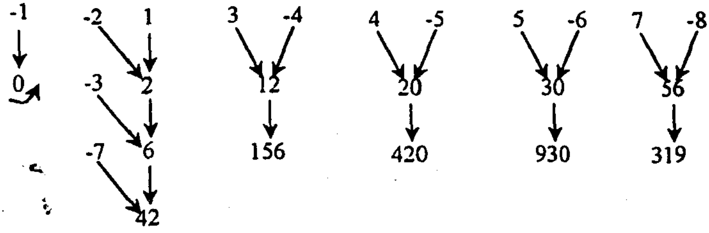


图 1.4

d)有向图中含有定点.

若 $f(n_0)=n_0$,则称点 n_0 为 $f(n)$ 的一个定点. 例如图 1.4 中 $n_0=0$ 就是 $f(n)=n+n^2$ 的一个定点. 又如 $f(n)=\frac{1}{2}(n^2-9n)+9$,包含两个定点 $n_1=2$ 和 $n_2=9$. 含有两个以上定点的有向图是不连通的.

e) 有向图中含有圈. 圈中所含整数的个数 $s(2\leqslant s\leqslant$ 某常数) 称为圈的长."圈"通常是指有限长度的圈. 例如对 $n>1$,令

$$f(n)=\begin{cases}3n, \text{当 } n \text{ 为素数时};\\ n \text{ 的纯因数的和, 当 } n \text{ 不为素数时}.\end{cases}$$

其中 n 的"纯因数"是指 n 的除 n 和 1 以外的因数. 有 $f(2)=6$, $f(24)=12+8+6+4+3+2=35$. $f(9)=3$. $f(n)$ 的有向图中含有多个圈(图 1.5)

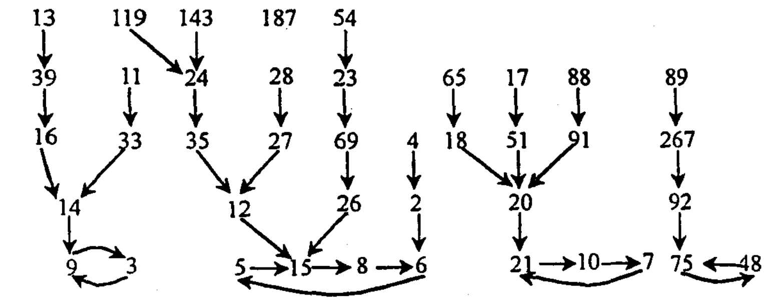


图 1.5

(2) 多值函数

情况比单值函数复杂，画图时可用“超图”表示函数.

例 1 若 n 可表为 $n=a\cdot b$ 的形式，这里 $1<a<b$，定义 $f(n)=b^2-a^2$，则 $f(n)$ 可能是多值函数. 如 $n=36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9$，而 $f(36)$ 有三个值：$18^2-2^2=320$，$12^2-3^2=135$，$9^2-4^2=65$. 图1.6表示了 $f(n)$ 的一小部分图形，在每一条边上标出对应的因素乘积 $b\cdot a$ 该图包含圈(231，320，144，260，231).

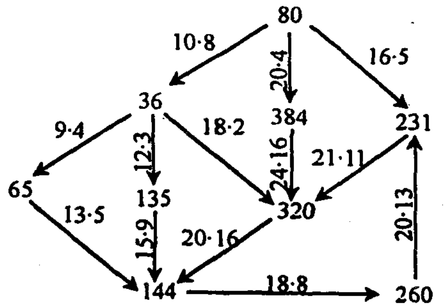


图 1.6

例 2 整数因子分解的超图. 对每一整数 n，$f(n)$ 表示具有形式 $n=u\cdot v$ 的所有整数对 (u,v)，这时“函数值”$f(n)$ 已不是一般的数值了.

L. Collatz 于1932年7月1日在他的笔记本中曾记述了如下的一个数论函数：

$$G(n)=\begin{cases}2n/3, & \text{当 } n\equiv 0(\bmod 3) \text{ 时；}\\ (4n-1)/3, & \text{当 } n\equiv 1(\bmod 3) \text{ 时；}\\ (4n+1)/3, & \text{当 } n\equiv 2(\bmod 3) \text{ 时.}\end{cases}$$

这回他没有把 $G(n)$ 用有向图形象地描绘，而代之以用置换

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots\\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 & \cdots\end{pmatrix}$$

的形式来表示. 不过从所列数值容易看出置换 P 中有一个定点，两个圈.

L. Collatz 提到关于研究上述P的圈结构问题，特别问及包