

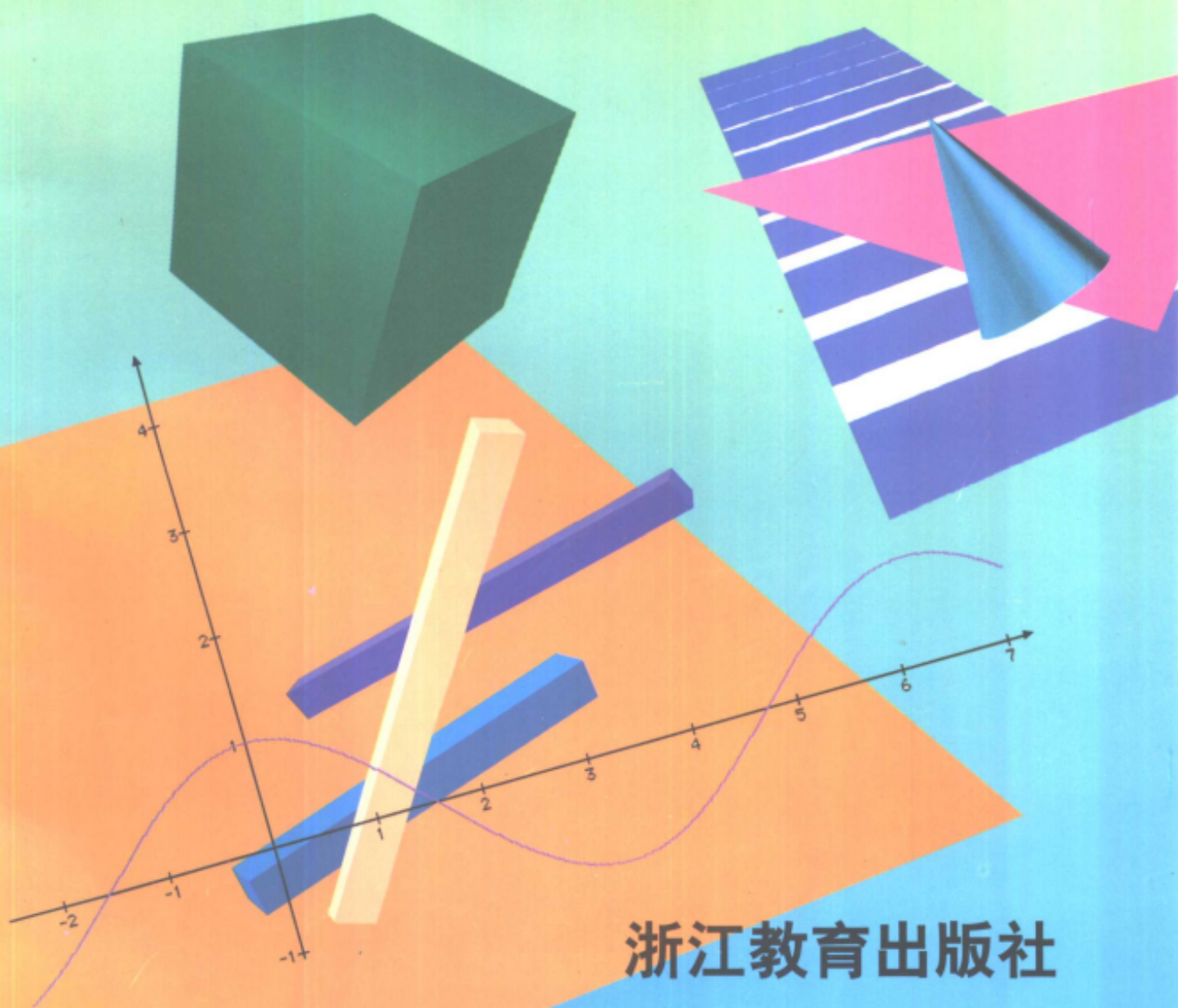
GAOZHONGSHUXUEJINGBIAN

B

高中数学 精编

高三用

综合训练



浙江教育出版社



高中数学精编

高中数学精编	综合训练	(高三全年用)	6.50 元
高中物理精编	综合训练	(高三全年用)	12.50 元
高中化学精编	综合训练	(高三全年用)	17.00 元

ISBN 7-5338-2541-1



9 787533 825416 >

ISBN7-5338-2541-1/G·2533

定价:6.50 元

高中数学精编

综合训练

陶敏之 谢玉兰 许纪传 编写
钱孝华 丁宗武 江焕棣

人民教育出版社数学室 审阅

浙江教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学精编综合训练. 高三/陶敏之等编写. —2
版. —杭州: 浙江教育出版社, 2000. 6(2001. 6 重印)
ISBN 7-5338-2541-1

I. 高... II. 陶... III. 数学课-高中-习题
N. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 21184 号

高中数学精编
综合训练
(高三用)

陶敏之 谢玉兰 许记传 编写
钱孝华 丁宗武 江焕棟
人民教育出版社数学室 审阅

浙江教育出版社出版发行(杭州市体育场路 317 号)

金华南方彩印厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 6.25 字数 125000

1997 年 7 月第 2 版 2001 年 6 月第 10 次印刷

ISBN 7-5338-2541-1/G · 2533 定价: 6.50 元

说 明

《高中数学精编》自1981年出版以来,已经成为广大学生十分喜爱的学习辅导用书,同时也是众多教师卷不离手的教学参考资料。

《高中数学精编》之所以倍受读者青睐,一方面因为“典型题型与解题指导”栏目系统地归纳了解题的方法和技巧,为读者指点迷津;另一方面因为收编的题目新颖、灵活、典型,知识和技能的覆盖面广,对训练思维、提高解题能力很有助益。

由于近年来教材及高中会考、高考的要求和难度等不断变化,我们在广泛听取读者意见的基础上,紧扣现行教材,兼顾会考、高考要求,对原套丛书又作了修订,并经人民教育出版社数学室审阅通过。为了使它更加实用、方便,我们按照“小单元”进行编写,与教材的同步性得到了更加充分的体现。另外,根据教育部《关于现行普通高中数学教学内容和教学要求的调整意见》的精神,对1999年高考不作要求的内容均加了“*”号。

本书中所选的题目以A组题、B组题为主,其中A组题属基本要求,B组题略有提高,或有一定的综合性,C组题数量较少,难度较大,可供学有余力的学生选用。

编 者
1998年4月

目 录

§ 1 集合、映射与函数	1
§ 2 函数的性质与反函数	3
§ 3 幂函数、指数函数与对数函数	5
§ 4 三角函数的图象和性质	7
§ 5 和、差、倍、半的三角函数	9
§ 6 三角函数的积化和差与和差化积	11
§ 7 反三角函数与三角方程	13
§ 8 不等式的性质和证明	15
§ 9 解不等式	17
§ 10 不等式的应用	19
§ 11 等差数列与等比数列	21
§ 12 数列通项与求和	23
§ 13 数列的极限、数学归纳法	25
§ 14 复数的代数式	27
§ 15 复数的三角式与复数方程	29
§ 16 排列、组合、二项式定理	31
§ 17 直线与平面(一)	33
§ 18 直线与平面(二)	35
§ 19 多面体与旋转体(一)	37
§ 20 多面体与旋转体(二)	39
§ 21 直线和圆	41
§ 22 椭圆、双曲线、抛物线(一)	43
§ 23 椭圆、双曲线、抛物线(二)	45
§ 24 坐标平移	47
§ 25 参数方程、极坐标	49
综合训练(一)	51
综合训练(二)	53
综合训练(三)	55
综合训练(四)	57
综合训练(五)	59
综合训练(六)	62
综合训练(七)	64
综合训练(八)	66
综合训练(九)	69
综合训练(十)	71
答案与提示	73

§1 集合、映射与函数

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

1. 设集合 $M = \{a, b\}$, 则满足 $M \cup N \subseteq \{a, b, c\}$ 的集合 N 的个数为()
(A) 1. (B) 4. (C) 7. (D) 8.
2. 设集合 $P = \{x | x = 3m, m \in Z\}$, $Q = \{x | x = 3m + 1, m \in Z\}$, $S = \{x | x = 3m - 1, m \in Z\}$, 且 $a \in P, b \in Q, c \in S$. 设 $d = a + b - c$, 则有()
(A) $d \in P$. (B) $d \in Q$. (C) $d \in S$. (D) $d \in P \cup Q$.
3. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \sin \frac{n\pi}{3}, n \in Z\right\}$, 则满足 $\emptyset \subset X \subseteq M$ 的集合 X 的个数是()
(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8.
4. 设两个集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{4, 5\}$, 则可建立从 M 到 N 的映射个数是()
(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.
5. 设满足 $P \subseteq \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \in Z\}$ 的集合 P 的个数记为 n , 则 n 等于()
(A) 4. (B) 8. (C) 15. (D) 16.
6. 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$, $M = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\right\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 则 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于()
(A) \emptyset . (B) $\{(2, 3)\}$.
(C) $(2, 3)$. (D) $\{(x, y) | y = x + 1\}$.
7. 已知集合 $M = \left\{y \mid y = \frac{x+3}{x-4}, x \in R\right\}$, $P = \left\{y \mid y = \frac{x^2-9}{x^2-7x+12}, x \in R\right\}$, 则有()
(A) $M \subset P$. (B) $M \supset P$.
(C) $M = P$. (D) $M \cap P = \emptyset$.
8. 已知 M, P, S 都是 I 的子集, 且 $\overline{P} = M, \overline{S} = P$, 则 M, S 之间的关系是()
(A) $M \subset S$. (B) $M \supset S$.
(C) $M = S$. (D) $M \cap S = \emptyset$.
9. 下列从 P 到 Q 的各对应关系中, 不是映射的是()
(A) $P = \{0\} \cup N, Q = N, f: x \rightarrow |x - 3|$.
(B) $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Q = \{-4, -3, 0, 5, 12\}, f: x \rightarrow x(x - 4)$.
(C) $P = N, Q = \{-1, 1\}, f: x \rightarrow (-1)^x$.
(D) $P = Z, Q = \{\text{有理数}\}, f: x \rightarrow 2^x$.
10. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2)$, 则函数 $f(1-x)$ 的定义域为()
(A) $(-1, 0]$. (B) $[1, 2)$. (C) $[-1, 0)$. (D) $[0, 1)$.
11. 如果函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 对任意实数 x 都有 $f(2+x) = f(2-x)$, 那么()
(A) $f(2) < f(1) < f(4)$. (B) $f(1) < f(2) < f(4)$.
(C) $f(2) < f(4) < f(1)$. (D) $f(4) < f(2) < f(1)$.
12. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x+a) + f(2x+a)$ ($-1 < a < 0$) 的定义域是()

- (A) $[-a, 1-a]$. (B) $\left[-a, \frac{1-a}{2}\right]$.
 (C) $\left[-\frac{a}{2}, 1-a\right]$. (D) $\left[-\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}\right]$.

13. 不等式 $(a-2)x^2 + (2a-4)x - 4 < 0$ 对 $x \in R$ 恒成立, 则 a 的取值范围是()
 (A) $(-\infty, 2]$. (B) $(-\infty, 2)$. (C) $(-2, 2]$. (D) $(-2, 2)$.
14. 已知图象甲(不过原点的曲线)与图象乙关于 y 轴对称, 图象乙与图象丙关于直线 $x+y=0$ 对称, 图象丙与图象丁关于 x 轴对称, 则图象甲与图象丁的关系是()
 (A) 关于直线 $x+y=0$ 对称. (B) 关于直线 $x-y=0$ 对称.
 (C) 关于原点对称. (D) 重合.
15. 某商品价格前两年每年递增 20%, 后两年每年递减 20%, 则四年后该商品的价格与原来的价格比较, 其变化情况是()
 (A) 增加了 7.84%. (B) 减少了 7.84%.
 (C) 减少了 9.5%. (D) 不增加也不减少.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分):

16. 映射 f 使 (x, y) 对应的像是 $(3x-y, x+3y)$, 则在 f 的作用下, 点 $(1, 2)$ 的原像是 _____.
17. 设 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 则实数 a 的值是 _____.
18. 设函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 若当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 + 1$; 则当 $x > 1$ 时, $f(x) =$ _____.
19. 如果函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 55 分):

20. (12 分) 设 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0, x \in R\}$, $B \neq \emptyset$ 且 $B \subseteq A$, 求 a, b 的值.
21. (12 分) 已知 $f(x)$ 为二次函数, 且满足 $f(x-1) + f(x+1) = 2x^2 + 4x$, 求 $f(x)$ 的表达式.
22. (15 分) 正三角形 ABC 的边长为 2, 一动点 P 从 A 点出发按逆时针方向沿三角形的边移动, 记 P 经过的路程为 x , A, P 两点的距离为 y , 当 $0 \leq x < 6$ 时, 写出 y 关于 x 的函数关系式.
23. (16 分) 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1$ 与 $h(x) = 3 - x$ ($0 \leq x \leq 3$) 的图象有公共点, 求实数 a 的取值范围.

§ 2 函数的性质与反函数

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

- 在下列函数中,是偶函数的是()

(A) $y=(x-1)^0$. (B) $y=x^2 \cdot \frac{1-x}{1-x}$.

(C) $y=\sqrt{x-1}$. (D) $y=\frac{x(1-a^x)}{1+a^x}$.
- 下列函数中,在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是()

(A) $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$. (B) $y=\frac{x}{1-x}$.

(C) $y=-(x+1)^2$. (D) $y=1+x^2$.
- 若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是()

(A) $a \leq -3$. (B) $a \geq -3$. (C) $a \leq 5$. (D) $a \geq 5$.
- 函数 $f(x)=x^{m^2+m-2}$ 在第一象限为增函数,则 m 的取值范围是()

(A) $-2 < m < 1$. (B) $m < -2$ 或 $m > 1$.

(C) $-1 < m < 2$. (D) $m < -1$ 或 $m > 2$.
- 偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增,则()

(A) $f(-\sqrt{10}) > f(-3)$. (B) $f(-\sqrt{10}) < f(-3)$.

(C) $f(-\sqrt{10}) = f(-3)$. (D) 不能判断 $f(-\sqrt{10})$ 与 $f(-3)$ 的大小.
- 函数 $y=x^2-2x+3$ ($x \leq 0$)的反函数是()

(A) $y=1-\sqrt{x-2}$ ($x \geq 3$). (B) $y=1-\sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$).

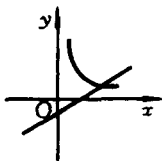
(C) $y=1+\sqrt{x-2}$ ($x \geq 3$). (D) $y=1+\sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$).
- 函数 $y=f(x)$ 是定义在实数集上的奇函数,则下列各点在曲线 $y=f(x)$ 上的是()

(A) $(a, f(-a))$. (B) $(-a, -f(a))$.

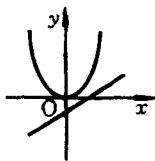
(C) $(-\lg a, -f(\lg \frac{1}{a}))$. (D) $(-\sin a, -f(-\sin a))$.
- 如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称,则()

(A) $a=\frac{1}{3}, b=6$. (B) $a=\frac{1}{3}, b=-6$.

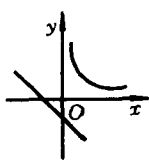
(C) $a=3, b=-2$. (D) $a=3, b=6$.
- 函数 $y=x^e$ 与 $y=ax+\frac{1}{a}$ 在同一平面直角坐标系中的示意图是()



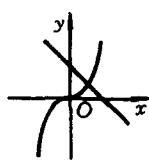
(A)



(B)



(C)



(D)

- 如果奇函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($0 < a < b$)上是增函数,且最小值是 2,那么 $f(x)$ 在 $[-b, -a]$

上是()

- (A) 增函数且最小值为-2. (B) 增函数且最大值为-2.
(C) 减函数且最小值为-2. (D) 减函数且最大值为-2.

11. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{x-1} + 1 \right)$ ($x > 1$) 的值域是()
(A) $(-\infty, -2]$. (B) $[-2, +\infty)$. (C) $(-\infty, 2]$. (D) $[2, +\infty)$.
12. 函数 $y = f(x+1) - 1$ 的图象可由函数 $y = f(x)$ 的图象经过变换得到. 正确的变换是()
(A) 向左平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位.
(B) 向左平移 1 个单位, 再向下平移 1 个单位.
(C) 向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位.
(D) 向右平移 1 个单位, 再向下平移 1 个单位.
13. 若函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, -1)$, 则函数 $f(x+4)$ 的反函数的图象必经过点()
(A) $(4, -1)$. (B) $(-1, -4)$. (C) $(-4, -1)$. (D) $(1, -4)$.
14. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数, 且对定义域内任意 x 有 $f(3+x) = f(3-x)$ 成立, 则 $f(x)$ 是()
(A) 奇函数. (B) 偶函数.
(C) 既是奇函数又是偶函数. (D) 非奇非偶函数.
15. 已知函数 $y = f(x)$ 反函数的图象与函数 $y = g(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 对称, 则 $g(x)$ 可表示为()
(A) $a + f^{-1}(b+x)$. (B) $2a - f^{-1}(2b-x)$.
(C) $b + f^{-1}(a+x)$. (D) $2b - f^{-1}(2a-x)$.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分):

16. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = \sqrt[3]{x} + 1$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(x) =$ _____.
17. 已知 $(2a+1)^{-\frac{1}{5}} < (4-3a)^{-\frac{1}{5}}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
18. 对一切 $x \in R$, 不等式 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 _____.
19. 设函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 的定义域为 $[n, n+1]$ ($n \in N$), 那么 $f(x)$ 的值域中共有 _____ 个整数.

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 55 分):

20. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在一个闭区间上的单调函数, 且 $f(-2) = 0$, 对定义域中任何 x , 都有 $f(-2+x) = -f(-2-x)$, $f(x)$ 在 $x = a$ 时取最大值 5, 求 $f(x)$ 的定义域与值域.
21. (12 分) 已知奇函数 $f(x)$ 在整个定义域 $[-3, 3]$ 上是减函数, 且满足 $f(1-a) + f(a^2-2a) < 0$, 求实数 a 的取值范围.
22. (15 分) 设关于 x 的方程 $\lg(-x^2 + 3x - m) = \lg(3-x)$ 在区间 $[0, 3)$ 内有唯一解, 求实数 m 的取值范围.
23. (16 分) 已知函数 $f(x) = kx^2 - 2\sqrt{4+2m-m^2}x$, $g(x) = -\sqrt{1-(x-k)^2}$ ($m, k \in R$), 是否存在实数对 (m, k) , 同时满足条件: ① k 为整数; ② $f(x)$ 取最大值时的 x 值与 $g(x)$ 取最小值时的 x 值相等, 并证明结论的正确性.

§ 3 幂函数、指数函数与对数函数

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

- 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时,下列各式中正确的是()
(A) $\log_x(1-x) > 1$. (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}$.
(C) $(1+x)^{\frac{3}{2}} < (1-x)^{\frac{3}{2}}$. (D) $\cos(1+x) > \cos(1-x)$.
- 函数 $y = \log_{a^2-1}x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数,则 a 的取值范围是()
(A) $|a| < \sqrt{2}$. (B) $a > \sqrt{2}$.
(C) $a < -\sqrt{2}$. (D) $1 < |a| < \sqrt{2}$.
- 若 $1 < x < 2$,则下列各式中正确的是()
(A) $2^x < \sqrt[3]{x} < \log_{\frac{1}{2}}x$. (B) $\log_{\frac{1}{2}}x < 2^x < \sqrt[3]{x}$.
(C) $\log_{\frac{1}{2}}x < \sqrt[3]{x} < 2^x$. (D) $\sqrt[3]{x} < \log_{\frac{1}{2}}x < 2^x$.
- 若函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $f(x) = (x-1)^2$ ($x \leq 1$) 的图象关于直线 $y = x$ 对称,则 $g(x)$ 的表达式是()
(A) $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ ($x \geq 0$). (B) $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ ($x \geq 0$).
(C) $g(x) = \sqrt{1-x}$ ($x \leq 1$). (D) $g(x) = \sqrt{1+x}$ ($x \geq -1$).
- 已知函数 $y = \lg(x^2 + 2x + a)$ 的值域是 R ,则 a 的取值范围是()
(A) $[1, +\infty)$. (B) $(1, +\infty)$.
(C) $(-\infty, 1]$. (D) $(-\infty, 1)$.
- 函数 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的反函数的定义域是()
(A) $(0, 1)$. (B) $(-1, 1)$.
(C) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. (D) R .
- 下列函数中,既是偶函数,又在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数的是()
(A) $y = x^{-\frac{2}{3}}$. (B) $y = 2^{|x|}$.
(C) $y = -(x+1)^2$. (D) $y = -|x|$.
- 已知函数 $f(x) = a^x + k$ 的图象过点 $(1, 7)$, 它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象过点 $(4, 0)$, 则 $f(x)$ 的表达式是()
(A) $f(x) = 4^x + 3$. (B) $f(x) = 2^x + 5$.
(C) $f(x) = 5^x + 2$. (D) $f(x) = 3^x + 4$.
- 设 $e < x < 10$, 记 $a = \ln(\ln x)$, $b = \lg(\lg x)$, $c = \ln(\lg x)$, $d = \lg(\ln x)$, 则下列结论中正确的是()
(A) $a < b < c < d$. (B) $c < d < a < b$.
(C) $c < b < d < a$. (D) $b < d < c < a$.
- 已知函数 $f(x^2 + 1) = x^4 + x^2 - 6$, 则 $f(x)$ 在定义域内的最小值是()

- (A) $f(0)$. (B) $f(1)$.
 (C) $f(1) - \frac{1}{4}$. (D) $f(1) + \frac{1}{4}$.

11. 已知函数 $f(x) = |\log_a x|$ ($0 < a < 1$), 则下列不等式成立的是()
 (A) $f\left(\frac{1}{3}\right) > f(2) > f\left(\frac{1}{4}\right)$. (B) $f\left(\frac{1}{4}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right) > f(2)$.
 (C) $f(2) > f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right)$. (D) $f\left(\frac{1}{4}\right) > f(2) > f\left(\frac{1}{3}\right)$.
12. 若函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $2 \leq x < +\infty$ 上恒有 $|f(x)| > 1$, 则实数 a 的取值范围是()
 (A) $\frac{1}{2} < a < 1$ 或 $a > 2$. (B) $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $1 < a < 2$.
 (C) $\frac{1}{2} < a < 2$ 但 $a \neq 1$. (D) $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > 2$.
13. 若关于 x 的方程 $2^{x-1} + 2x^2 + a = 0$ 有两个实数解, 则实数 a 的取值范围是()
 (A) $(-\infty, -1)$. (B) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.
 (C) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. (D) $(1, +\infty)$.
14. 关于 x 的方程 $a^x = \log_{\frac{1}{2}} x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的解的情况是()
 (A) 仅当 $a > 1$ 时有唯一解. (B) 仅当 $0 < a < 1$ 时有唯一解.
 (C) 必有唯一解. (D) 该方程无解.
15. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x(1 + \sqrt[5]{x})$, 那么当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x)$ 的表达式是()
 (A) $x(1 - \sqrt[5]{x})$. (B) $-x(1 - \sqrt[5]{x})$.
 (C) $x(1 + \sqrt[5]{x})$. (D) $-x(1 + \sqrt[5]{x})$.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分):

16. 若 $1 \leq x \leq 3$, 则函数 $y = 2x + \frac{8}{x}$ 的最小值是_____, 最大值是_____.
17. 函数 $y = a^{2x} + 2a^x - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 14, 则 a 等于_____.
18. 已知 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$ 满足 $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 则实数 $a =$ _____.
19. 已知函数 $f(x) = \log_a(a^x - 1)$ ($a > 1$), 则方程 $f^{-1}(x) = f(-x)$ 的解集是_____.

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 55 分):

20. (12 分) 若 $0 < a < 1$, 化简: $|1-x| + \sqrt{a^{2x} - 2a^x + 1} - (x - a^x)$.
21. (12 分) 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^2 + 1}{1 + 2ax}$, 求满足 $f(x) > 0$ 的 x 的值.
22. (15 分) 已知函数 $f(x) = \log_a(a - a^x)$ ($a > 1$),
 (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
 (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
23. (16 分) 已知函数 $f(x) = \log_a(a^2 x) \log_a^2(ax)$ 的最小值是 $-\frac{1}{8}$, 最大值是 0, 且其定义域是不等式 $4^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 16 \leq 0$ 的解集, 求实数 a 的值.

§ 4 三角函数的图象和性质

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

- 满足 $2\sin x - 1 < 0$ 的 x 的集合是()

(A) $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in Z\right\}$. (B) $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in Z\right\}$.
 (C) $\left\{x \mid k\pi - \frac{7\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$. (D) $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{7\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$.
- 在下列函数中,既在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,又是以 π 为周期的偶函数是()

(A) $y = x^2 (x \in R)$. (B) $y = |\sin x| (x \in R)$.
 (C) $y = \cos 2x (x \in R)$. (D) $y = e^{\sin 2x} (x \in R)$.
- 函数 $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{a} + \frac{\pi}{3}\right)$ ($a < 0$) 的周期是()

(A) $-a\pi$. (B) $\frac{a\pi}{2}$. (C) $\frac{2\pi}{a}$. (D) $-\frac{a\pi}{2}$.
- 函数 $y = \sqrt{\cos(\sin x)}$ 的定义域是()

(A) $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi (k \in Z)\right\}$. (B) $\left\{x \mid 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)\right\}$.
 (C) $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)\right\}$. (D) $x \in R$.
- 在下列命题中,真命题是()

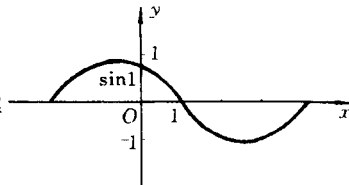
(A) 余弦函数在第一象限为减函数.
 (B) $y = \sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上是奇函数.
 (C) 函数 $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{k}$.
 (D) $y = \sec x$ 的值域是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- 函数 $y = \sin x - |\sin x|$ 的值域是()

(A) $[-1, 0]$. (B) $[0, 1]$. (C) $[-1, 1]$. (D) $[-2, 0]$.
- 已知集合 $A = \left\{x \mid |\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $B = \{x \mid |\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}\}$, 则下列关系中正确的是()

(A) $B \subseteq A \cap B$. (B) $A \cap B \subset A$. (C) $A \cap B = B$. (D) $A \cap B = A$.
- 函数 $y = \sin 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得图象 C , 图象 C 关于原点 O 的对称图象为 C_1 , 则图象 C_1 对应的函数解析式为()

(A) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. (B) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.
 (C) $y = \sin(3x + 3\pi)$. (D) $y = \cos(3x + 3\pi)$.
- 如图是周期为 2π 的三角函数 $y = f(x)$ 的图象, 则 $f(x)$ 的解析式是()

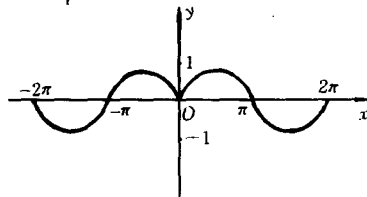
(A) $\sin(1+x)$. (B) $\sin(-1-x)$.
 (C) $\sin(x-1)$. (D) $\sin(1-x)$.



(第 9 题)

10. 函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一条对称轴方程是()
- (A) $x = -\frac{\pi}{6}$. (B) $x = \frac{\pi}{6}$. (C) $x = \frac{\pi}{2}$. (D) $x = \frac{\pi}{12}$.
11. 已知 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{8}$, 且 $\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{4}$, 则 $\cos\alpha - \sin\alpha$ 的值是()
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{3}{4}$.
12. 已知集合 $M = \{\theta | \sin\theta < \cos\theta, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $N = \{\theta | \operatorname{ctg}\theta < -1\}$, 则 $M \cap N$ 的区间为()
- (A) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$. (B) $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. (C) $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$. (D) $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$.
13. 已知函数 $y = 2\cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 和 $y = 2$ 的图象围成一个封闭的平面图形, 则这个封闭图形的面积是()
- (A) 2. (B) 4. (C) 2π . (D) 4π .

14. 已知 $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}$, $\cos x = \frac{m-1}{m+1}$, 则 m 的取值范围是()
- (A) $m < -1$. (B) $3 < m \leq 7 + 4\sqrt{3}$.
(C) $m > 3$. (D) $3 < m < 7 + 4\sqrt{3}$ 或 $m < -1$.
15. 与图中曲线对应的函数是()



(第15题)

- (A) $y = |\sin x|$. (B) $y = \sin|x|$.
(C) $y = -\sin|x|$. (D) $y = -|\sin x|$.

二、填空题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分):

16. 函数 $y = 2 \left| \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$ 的最小正周期是_____.
17. 函数 $y = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ 的定义域是_____.

函数 $y = \lg \sin x + \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$ 的定义域是_____.

18. 若实数 x 满足等式 $\log_2 x + 2\sin\theta = 3$, 则 $|x-2| + |x-32|$ 的值是_____.
19. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$ 的单调递增区间是_____.

三、解答题(本大题共4小题, 共55分):

20. (12分) 设函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象与 x 轴的一个交点是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, 图象上到这个交点最近的最低点的坐标是 $\left(\frac{7\pi}{12}, -3\right)$.
- (1) 求该函数的表达式; (2) 作该函数一个周期的图象;
(3) 指出这个函数的负值区间.
21. (12分) 设集合 $A = \left\{x \mid \log_{\frac{1}{3}} \left|x - \frac{\pi}{3}\right| \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{2\pi}{3}, x \in \mathbb{R}\right\}$, $B = \{x \mid \cos x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, 求 $D = A \cap B$ (最后结果以区间形式给出), 并在数轴上标出集合 D .
22. (15分) 已知 $f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin x} - 1$.
- (1) 确定 $f(x)$ 的单调区间; (2) 求 $f(x)$ 的值域;
(3) 解不等式: $f(x) \geq 0$.
23. (16分) 当 x 与 α 为何值时, 不等式 $\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leq 0$ 成立.

§ 5 和、差、倍、半的三角函数

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

1. $\operatorname{ctg}10^\circ + \operatorname{tg}5^\circ$ 的值是()
 (A) $\frac{1}{\sin 5^\circ}$. (B) $\frac{1}{\cos 5^\circ}$. (C) $\frac{1}{\sin 10^\circ}$. (D) $\frac{1}{\cos 10^\circ}$.
2. 已知 α, β 均为锐角, $p = \cos\alpha\cos\beta, q = \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$, 则 p, q 的大小关系是()
 (A) $p < q$. (B) $p > q$. (C) $p \leq q$. (D) $p \geq q$.
3. 化简: $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha}$ 的结果是()
 (A) $\operatorname{ctg} 6\alpha$. (B) $2\operatorname{ctg} 6\alpha$. (C) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 6\alpha$. (D) $-2\operatorname{ctg} 6\alpha$.
4. 当 $3\pi < x < 4\pi$ 时, 化简 $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ 得()
 (A) $-\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. (B) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
 (C) $-\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. (D) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
5. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, 下列结论中正确的是()
 (A) 仅有最小值的奇函数. (B) 既有最大值又有最小值的偶函数.
 (C) 仅有最大值的偶函数. (D) 既非奇函数又非偶函数.
6. 下列关系中, α 角存在的是()
 (A) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ 且 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. (B) $\sin\alpha = \log_5 5$.
 (C) $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$. (D) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ (α 为锐角).
7. 已知 $13\sin\alpha + 5\cos\beta = 9, 13\cos\alpha + 5\sin\beta = 15$, 则 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值为()
 (A) $\frac{56}{65}$. (B) $-\frac{56}{65}$. (C) $\frac{33}{65}$. (D) $-\frac{33}{65}$.
8. A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三内角, 且 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{\pi}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 是()
 (A) 锐角三角形. (B) 直角三角形.
 (C) 钝角三角形. (D) 不能构成三角形.
9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 及 $\operatorname{tg}\beta$ 是 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根, 则 $\sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta)$ 的值为()
 (A) pq . (B) q . (C) p . (D) $p + q$.
10. 设 $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{2}{5}, \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ 的值为()
 (A) $\frac{13}{18}$. (B) $\frac{13}{22}$. (C) $\frac{3}{22}$. (D) $\frac{1}{6}$.
11. 若 $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1}{2}$, 则 $(5\sin\alpha - 3)(3\operatorname{tg}\alpha + 1)$ 的值为()

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

12. 已知 $f(\operatorname{tg}x) = \cos 2x$, 则 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 等于()

(A) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) 0. (C) $\frac{1}{3}$. (D) -1.

13. 计算: $\frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$ 的值为()

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{4}$.

14. 已知 $\sin\alpha\sin\beta = 1$, 那么 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值是()

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) ± 1 .

15. A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三内角, 且 $\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()

- (A) 等腰三角形, 但不是等边三角形.
(B) 等边三角形.
(C) 非等腰的直角三角形.
(D) 非等腰的斜三角形.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分):

16. 已知 $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta =$ _____.

17. 已知 $5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, 则 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{ctg}\alpha =$ _____.

* 18. 已知 $1 + \sin\theta - 25\cos^2\theta = 0$, θ 在第二象限内, 则 $\cos \frac{\theta}{2} =$ _____.

19. 已知 $x + y = 3 - \cos 2\theta$, $x - y = 4\sin\theta$, 则 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} =$ _____.

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 55 分):

20. (12 分) 设 $0 < x < \pi$, 求证: $\frac{2 - \cos x}{\sin x} \geq \sqrt{3}$.

21. (12 分) 是否存在锐角 α, β , 使得: ① $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$; ② $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta = 2 - \sqrt{3}$ 同时成立.

若存在, 求 α 和 β 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (15 分) 化简: $\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n \alpha}$ ($n \in \mathbb{N}$).

23. (16 分) 点 P 在直径 $AB = 1$ 的半圆上移动, 过 P 作圆的切线 PT , 使 $PT = 1$, $\angle PAB = \alpha$. 当 α 为何值时, 四边形 $ABTP$ 的面积最大? 最大值是多少?

§ 6 三角函数的积化和差与和差化积

一、选择题(本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分):

1. 函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x$ 的图象可由曲线 $y = \sqrt{3} \sin 2x$ 得到,需经过的变换是 ()

(A) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位. (B) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位.
(C) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位. (D) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位.
2. 函数 $y = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x}$ 的最小正周期是 ()

(A) 4π . (B) 2π . (C) π . (D) $\frac{\pi}{2}$.
3. 已知 $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = 1$, 则 $\sin A \cdot \sin B$ 的最大值是 ()

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.
4. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,如果 $\angle A = \angle A'$, 且 $\sin B + \sin C < \sin B' + \sin C'$, 那么 ()

(A) $B - C > B' - C'$. (B) $|B - C| > |B' - C'|$.
(C) $B - C < B' - C'$. (D) $|B - C| < |B' - C'|$.
5. 若 $\cos^2 \frac{x+y}{2} - \cos^2 \frac{x-y}{2} = a$, 则 $\sin x \cdot \sin y$ 等于 ()

(A) $\frac{a}{2}$. (B) $-\frac{a}{2}$. (C) a . (D) $-a$.
6. 设 $x + y = 1$, 则 $\sin x + \sin y$ 与 1 的大小关系是 ()

(A) $\sin x + \sin y > 1$. (B) $\sin x + \sin y = 1$.
(C) $\sin x + \sin y < 1$. (D) 无法确定.
7. 若 $f(x) = \sin(x + \theta) + \cos(x + \theta)$ 为偶函数, 则 θ 的值是 ()

(A) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$). (B) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
(C) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$). (D) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
8. 函数 $y = \cos^2 x + \cos^2(x + \alpha) - 2\cos \alpha \cdot \cos x \cos(x + \alpha)$ (α 为定值), 则当 x 增加时, y 的值 ()

(A) 逐渐增大. (B) 逐渐减小.
(C) 有时减小, 有时增大. (D) 恒为定值.
9. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ 的值为 ()

(A) $\frac{24}{7}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $-\frac{24}{7}$. (D) $-\frac{3}{4}$.
10. 给出以下四个函数: ① $y = |\sin x \cdot \cos x|$, ② $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, ③ $y = \sin^2 x \cdot \cos x$, ④ $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, 其中偶函数有 ()