科學圖書大庫

向量微積分學

譯者 嚴 夢 輝

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

向量微積分學

譯者 嚴　夢　輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日三版

向量微積分學

基本定價 1.80

譯者　嚴夢輝　電子學校專科部教官

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯序

本書原著者林格倫（B.W.LINDGREN）擷取高等微積分之有關材料，鉤玄提要，不蔓不枝，故舉一可以反三，事半而能功倍。原著訛植筆誤雖多，但瑕不掩瑜，堪稱上乘之作。今由譯者就能力所及，試加訂正，以期提高其可讀性。惟譯者學殖淺薄，譯文疎漏或未達之處，恐所難免，尚祈方家有以指正，則幸莫大焉。

謬承徐氏基金會邀譯此書並予出版，迻譯時曾蒙李副教授友錡先生提示卓見，而執教海外之好友袁雲之先生復迭作精神鼓勵，稿成後又得袁軍暨林正中兩位先生之助，熱心校讀譯稿數次。隆情高誼，譯者謹此一併致謝！

嚴　夢　輝

59年2月10日

於　若　谷　齋

原　　序

這是一本三維向量分析的基本原理，爲了短期課程用作敎本而編寫。書名的採用，是在強調它不是用向量方法討論力學與電磁學問題分析的專書，而是一本向量數學一代數與微積分一的通論。

以本書作爲藍本的數學課程，通常應在一般的初等微積分課程之後施敎，也就是視後者爲先修課程。本書根據初等微積分，先複習極限，連續性，導數及積分等概念，再依「實際」問題的背景，引述較爲高深的題材一線積分，面積分，雅谷比式與方向導數。這種高深題材的誘導性引論，可使它們在高等微積分課程中作詳盡探討時，也許更能引人入勝。因此，編者的目的，是順便採用某些物理問題，來傳授若干有用的數學材料，並不是藉數學技術作物理問題的探討，因爲就這一階段的學生課業來說，這些物理問題尙無充分發揮的餘地。

Fulton Koehler 及 Richard Juberg 兩位敎授的寶貴指示，使本書提高了正確性與效用性，編者深表感激！

林　格　倫
(B.W.Lindgren)

目　　錄

第一章　向量代數

物理科學上有很多的「量」，作用的效果，既決定於它們的大小或多寡，也要看它們的方向而定。例如在某一方向以十磅的力推動一物體，與在另一方向以十磅的力來推動它，將產生不同的結果。一物體在向北的方向作二哩的位移或運動，所到達的位置，便和向東南方向作二哩的運動不同。這種量叫做**向量**，在數學上僅僅用數來代表它們顯然是不夠的，必須「數」（代表多寡或大小）和「方向」同時並用。

上例所說的「方向」，是我們經驗「空間」中的方位，歐幾里得立體幾何，便是這種空間的模型。向量觀念雖然可以有效地推廣到並引用於高維空間，但本書要討論的爲三維空間（有時是一維和二維的情形）；在應用方面，我們把向量只看成代表實際物理量的大小和方向。

1.1　基本定義

以數學的意義來說，本書所討論的**向量**，是三維幾何中的方向或方位與（非負）數量的組合。表示向量可用各種不同的記號，本書一律採用黑體字母，如$\mathbf{V}$. 其他記號，尤其書寫時所用的是在字母上方畫一小箭頭：$\vec{V}$，也可用下加橫線的字母：$\underline{V}$。向量$\mathbf{V}$的長度或大小，用 $|\mathbf{V}|$ 有時或用 V來表示。

向量及代表它的數學向量是沒有固定位置的—不必指出任何特定的作用點（如力或位移的作用點）。不過爲了方便起見，不妨用有向線段來代表向量，並規定大小和方向都相同的兩有向線段，就是表示相同的向量而且是同義的。自P至Q的有向線段，寫成記號爲$\overrightarrow{PQ}$ 或（P，Q），P點叫做**始點**，Q點叫做**終點**（見圖 1.1）；在應用時我們說 $\overrightarrow{PQ}$ 所代表的就是那個向量，但千萬要記住，只要是長度和方向等於$\overrightarrow{PQ}$的任何其他有向線段，都可用來表示這一「長度、方向」的配對。尤其要注意的，當我們用有向線段的幾何表示法來下向量的定義時，必須明瞭它的效果是和向量的所在位置無關的。

還有一點要注意的，例如用有向線段$\overrightarrow{PQ}$ 代表一個力向量$\mathbf{F}$，是含有一種

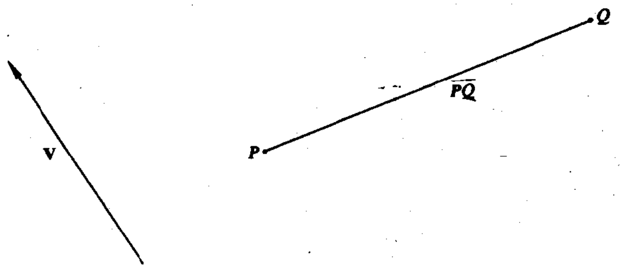

圖 1.1 向量

度量單位的選擇意義在內，所以度量比例如有改變，則向量的代表性便會發生變化。

我們將可看到，某些力或位移組合後，結果沒有淨力或淨位移了；爲求向量的表示得以完全，最好下一個**零向量**的定義—長度爲零方向不定的向量。雖然零向量與長度爲正的向量不可混爲一談，但對於某些已知的特定法則，在運算過程中自始至終是可以把零向量併入向量之列的。這些法則當然不必要求零向量作方向的選定，因爲方向已無關緊要。零向量用 **0** 來表示。

以向量方法研究幾何學及空間運動時，把空間各點用一向量聯結起來是很方便的，這一向量是從任意選定的參考點或**原點**出發，到達我們所要討論

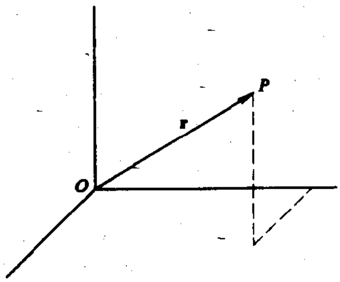

圖 1.2 位置向量

的那一點。這種配置是唯一的，所以向量對於點的確定便有幫助了。圖 1.2 表示一點 P，原點 O 及向量 $\overrightarrow{OP}$，這一向量叫做 P 點的**位置向量**。向量 $\overrightarrow{OP}$ 定出 P 點的位置，而 P 點界定了這一向量。因此，空間的點集合，可用自一固定參考點出發的向量集合來表明，即使參考點本身也可這樣來表明它—用零向量。（我們可以看到上圖中已經畫出各「軸」，這些軸只不過是一種參考間架的圖示而已，並不是說和直角坐標有什麼密切關係或非要用直角坐標不可。）

以後儘可能用記號 $\mathbf{r}$ 表示 P 點的位置向量 $\overrightarrow{OP}$．研究一個質點的運動時，質點位置是變動點 $P(t)$，有充分的理由可以把它看成函數 $\mathbf{r}(t)$，那就是說，可把 P 點的位置向量視爲時間的函數。向量函數或向量值函數的觀念，可以像普通實值函數 $f(t)$ 一樣來給它下定義，只不過向量函數的值域是向量集合，而不是實數集合。

例題 1.1　以圖 1.3 所示的平行四邊形爲例，下列各關係得以成立：

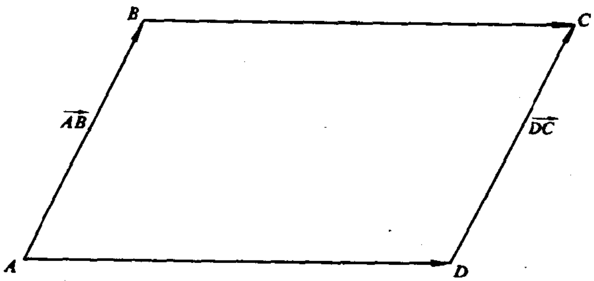

圖 1.3　（見例題 1.1）

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$$

及

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.$$

表明平行四邊形的各對邊相等且平行。

例題 1.2　球可定義爲自某一點依一固定距離所得全部 P 點的集合。半徑爲 a，球心在原點 O 的球，可定義爲位置向量 $\mathbf{r}$ 具有長度爲 a 的所有 P 點的集合：

$$|\mathbf{r}|=a.$$

這是球方程式的向量式；凡在球上的那些 P 點都滿足這一條件，但不在球上的任何點都不能滿足。

1.2 向量加法與減法

有些「量」常常用大小和方向的組合來表達，兩個這種「量」根據「平行四邊形定律」合併後又產生同型的合成量。合成量很像普通「數」的和，所以也用**和**與**加法**等名詞。我們甚至把向量這一名詞，專門使用於可以如此合併的量，下面即將給合併的方法予以定義並作說明。

兩個向量 (P, Q) 與 (Q, R) 即 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QR}$ 之和，定義為向量 (P,R) 或 $\overrightarrow{PR}$：

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}.$$

(見圖 1.4)這個定義是假定一向量自另一向量的終點出發，如此假定是無損於普遍性的，因為任何兩個向量 $\mathbf{U}$ 及 $\mathbf{V}$，向量 $\mathbf{V}$ 可被(長度和方向)等於

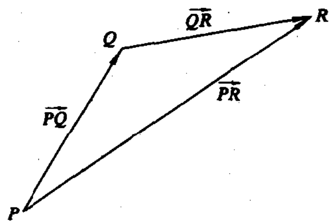

圖 1.4 向量加法

它但自 $\mathbf{U}$ 的終點出發的另一向量 $\mathbf{V}'$ 來代替。其實，向量和並不是依賴作圖時各線段的所在位置而定。圖 1.5 表示 $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ 之和的兩種算法，一種是 $\mathbf{V}'$ 自 $\mathbf{U}$ 的終點出發；另一種是用同義向量 $\mathbf{U}'$ 代替 $\mathbf{U}$，及自 $\mathbf{U}'$ 的終點出發的同

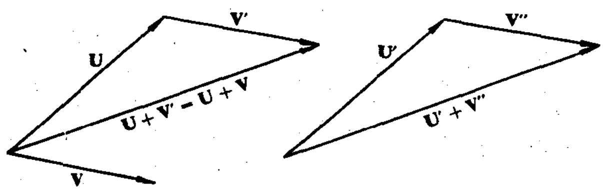

圖 1.5

義向量$\mathbf{V}''$代替$\mathbf{V}$．顯然，$\mathbf{U}'+\mathbf{V}''=\mathbf{U}+\mathbf{V}'=\mathbf{U}+\mathbf{V}$.

加法定義包括了下面一個有用的特例：

$$\overrightarrow{PQ}+\mathbf{0}=(P,Q)+(Q,Q)=\overrightarrow{PQ}.$$

也包括被加向量為互相平行的情形；若$\overrightarrow{PQ}$平行於$\overrightarrow{QR}$，則向量和$\overrightarrow{PR}$必同時平行於這兩個向量。如$\overrightarrow{PQ}$與$\overrightarrow{QR}$方向相同，那麼「和」的長度等於各向量長度之和；如$\overrightarrow{PQ}$與$\overrightarrow{QR}$方向相反，那麼「和」的長度等於各向量長度之差。

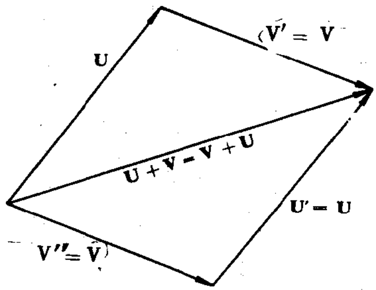

圖 1.6　加法為可交換

圖1.6畫出$\mathbf{U}+\mathbf{V}$之和，也畫出$\mathbf{V}+\mathbf{U}$之和；後者的構成，可取等於$\mathbf{V}$但自$\mathbf{U}$的始點出發的一個向量$\mathbf{V}''$，再取等於$\mathbf{U}$但自$\mathbf{V}$的終點出發的一個向量$\mathbf{U}'$．這兩種向量和顯然相等：

$$\mathbf{U}+\mathbf{V}=\mathbf{V}+\mathbf{U}.$$

那就是說，向量加法是**可交換**的。我們也可看出，這個公有的向量和，就是以向量$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$（或等於它們的向量）作鄰邊所構成的平行四邊形的對角線。（這是上述向量相加法則命名為「平行四邊形定律」的由來。）

向量和的大小與方向，可藉部分三角學的幫助，由被加向量的大小及方向用分析方法獲得。注意$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$自同一點出發時，則自此點出發的$\mathbf{U}+\mathbf{V}$之和，必在$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$所決定的平面中。更可注意的，因向量和是以$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$作為兩邊的一個三角形的第三邊，所以它的長度不能大於兩邊長度之和：

$$|\mathbf{U}+\mathbf{V}|\leq|\mathbf{U}|+|\mathbf{V}|$$

這就是著名的**三角形不等式**。（注意上式左邊的加號表示向量相加，但在

右邊的加號，則表示實數的相加。)

向量$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$相加而得$\mathbf{U}+\mathbf{V}$之後，這一個「和」又可加第三向量$\mathbf{W}$，得$(\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W}$，結果與向量$\mathbf{U}+(\mathbf{V}+\mathbf{W})$完全相同：

$$(\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W}=\mathbf{U}+(\mathbf{V}+\mathbf{W}),$$

這一事實，我們用「向量加法是**可結合**的」這句話來說明它。爲求明瞭起見，令$\mathbf{U}=\overrightarrow{PQ}$及$\mathbf{W}=\overrightarrow{RS}$：

$$(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PQ}+(\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}).$$

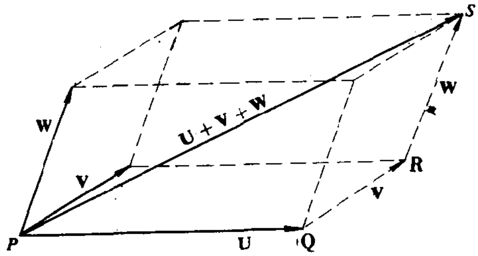

圖 1.7　三個向量之和

由於這一性質，三個向量之和，便沒有用括弧來標示的必要，而簡單地寫成$\mathbf{U}+\mathbf{V}+\mathbf{W}$就可以了。圖 1.7 用平行六面體的對角線以表示此一向量和。(圖中自P點沿平行六面體各稜至S點的六條可能「路徑」，相當於被加向量的六種可能次序。)

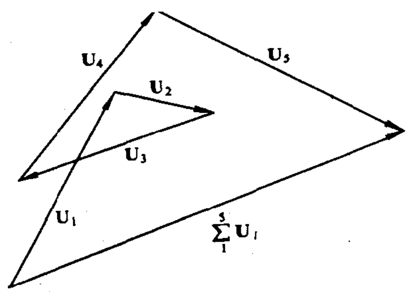

圖 1.8　五個向量之和

任何有限數目的向量之和，都可用數學歸納法來推定。如有向量$\mathbf{U}_1$,$\mathbf{U}_2$，…，$\mathbf{U}_n$，選擇$\mathbf{U}_i$的始點接於$\mathbf{U}_{i-1}$($i=1,2,\cdots,n$)的終點之後，那麼$\mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2+\cdots+\mathbf{U}_n$之和便被推定了，這一向量和就是用來封閉那個多邊形的向量。(見圖1.8，圖中表示五個向量之和。)結合律及三角形不等式，很容易用歸納法推廣到n個被加向量的情形。(見習題1.8)

例題1.3　如圖1.9所示，以構成一個四面體的任何四點A，B，C，D來看，由向量加法定義，得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

及

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}.$$

上面兩種關係，在圖中很易看出它們的幾何意義。

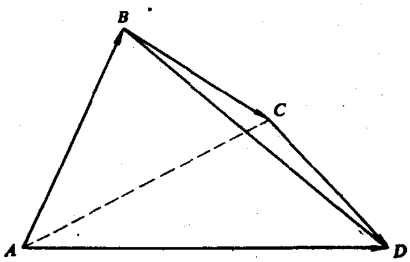

圖1.9　(見例題1.3)

向量減法可定義爲加法之逆，即：

$$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}\equiv\overrightarrow{RQ}.$$

根據這一定義(見圖1.10)，得：

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR})+\overrightarrow{PR}&=\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{PR}\\&=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}.\end{aligned}$$

那就是說，$\mathbf{U}-\mathbf{V}$是加$\mathbf{V}$時而產生$\mathbf{U}$的一個向量。以同一頂點出發的$\mathbf{U}$與$\mathbf{V}$作爲兩邊，所構成的三角形必須用這一向量來封閉它。

上述減法定義，有下面一個特例：

$$\mathbf{U}-\mathbf{U}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QQ}=\mathbf{0}.$$

反過來說，若$\mathbf{U}-\mathbf{V}=\mathbf{0}$，則$\mathbf{U}=\mathbf{V}$，這是由$\mathbf{U}-\mathbf{V}=\mathbf{0}$的兩邊各加$\mathbf{V}$而來.

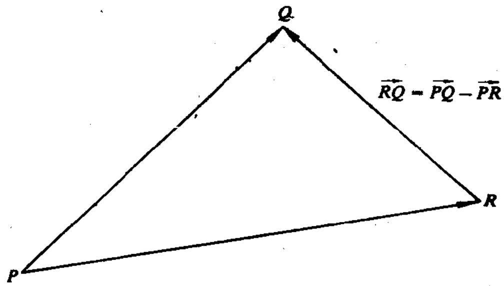

圖 1.10　向量減法

向量$-\mathbf{U}$，可定義為長度等於$\mathbf{U}$但完全指向相反方向的一個向量：

$$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}.$$

因此，若$\overrightarrow{PQ}=\mathbf{U}$及$\overrightarrow{PR}=\mathbf{V}$，則

$$\begin{aligned}\mathbf{U}+(-\mathbf{V})&=\overrightarrow{PQ}+(-\overrightarrow{PR})\\&=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RQ}=\mathbf{U}-\mathbf{V}.\end{aligned}$$

減$\mathbf{V}$相當於加$-\mathbf{V}$，所以減法可作為加法的特例來看待。

向量加法可以正確地表示若干位移的合併結果。因一質點自A點至B點的位移，所代表的向量為$\overrightarrow{AB}$，自B點至C點的位移，所代表的向量為$\overrightarrow{BC}$，那麼自A點至C點的淨總位移，以$\overrightarrow{AC}$表示，顯然是$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$的向量和。以後我們將會看到，把向量加法引用於速度，加速度，力（由牛頓定律）等等的合併時，也都是根據平行四邊形定律。

習　題

1.1　如向量$\mathbf{U}$的長度爲十單位，指向東；向量$\mathbf{V}$的長度爲五單位，指向北東，試決定向量$\mathbf{U}+\mathbf{V}$及向量$\mathbf{U}-\mathbf{V}$的長度與方向。

1.2　描繪向量$\mathbf{U}+\mathbf{U}+\mathbf{U}$及$\mathbf{U}+\mathbf{U}-\mathbf{U}$.

1.3　證明$(\mathbf{U}-\mathbf{V})+\mathbf{W}=(\mathbf{U}+\mathbf{W})-\mathbf{V}$.

1.4　於任何正整數n時，試以歸納法證明$\mathbf{U}_1+\cdots+\mathbf{U}_n$的推定方法。

1.5　已知空間任意四點A，B，C及D，證明$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

1.6　令$\mathbf{r}_1$及$\mathbf{r}_2$各爲P_1點及P_2點的位置向量，試解釋$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$的幾何意義。

1.7　用三角形不等式證明$|\mathbf{U}-\mathbf{V}|\geq||\mathbf{U}|-|\mathbf{V}||$，並作幾何意義的解釋。

1.8　用歸納法證明$|\mathbf{U}_1+\cdots+\mathbf{U}_n|\leq|\mathbf{U}_1|+\cdots+|\mathbf{U}_n|$.

1.3 向量乘以純量

一個普通的實數，我們用**純量**一詞，與向量加以區別。同樣情形，有大小而無方向的物理量（例如溫度）叫做純量，以區別既有大小又有方向的物理量。

向量$\mathbf{U}+\mathbf{U}$稱爲$2\mathbf{U}$，及$\mathbf{U}+\mathbf{U}+\mathbf{U}+\mathbf{U}+\mathbf{U}$稱爲$5\mathbf{U}$，那是方便而又適當的。向量$2\mathbf{U}$是方向與$\mathbf{U}$相同但長度爲二倍於$\mathbf{U}$的一個向量；向量$5\mathbf{U}$也是與$\mathbf{U}$的方向相同，但長度爲$\mathbf{U}$的五倍。依這一原則，如$k$是一個正的純量，那麼$k\mathbf{U}$可定義爲在$\mathbf{U}$的方向上，長度爲$k$倍於$\mathbf{U}$的一個向量。於任何實數$k$時，記號$k\mathbf{U}$可由下面的法則予以定義：

$$0\mathbf{U}=\mathbf{0},$$

$$(-k)\mathbf{U}=-(k\mathbf{U}).$$

在純量k與向量$\mathbf{U}$之間產生向量$k\mathbf{U}$的運算叫做**乘法**，這一運算滿足以下各性質：

$$(ab)\mathbf{U}=a(b\mathbf{U}),$$

$$|a\mathbf{U}|=|a|\,|\mathbf{U}|,$$

$$(a+b)\mathbf{U}=a\mathbf{U}+b\mathbf{U},$$

$$k(\mathbf{U}+\mathbf{V})=k\mathbf{U}+k\mathbf{V}.$$

最後兩個性質爲分配律；其中前一性質由平行向量之和的定義而來，後一性質就是相似多邊形對應邊成比例的結果。（見圖 1.11）

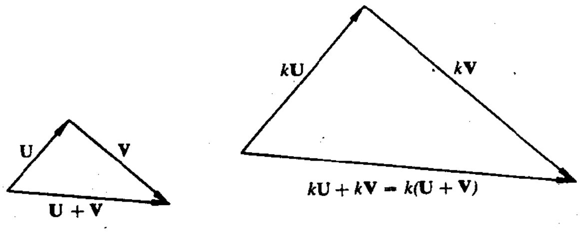

圖 1.11 分配律

依乘法定義，自然可得除以非零純量的**除法**定義。除以 k 完全是乘以 $1/k$ 而已。

例題 1.4 長度爲一個單位的向量叫做**單位向量**。長度爲正的任一已知向量 $\mathbf{V}$，在相同方向上的單位向量，可由已知向量除以它本身的長度而得：$\mathbf{V}/|\mathbf{V}|$，因這一向量的長度是

$$\left|\frac{1}{|\mathbf{V}|}\mathbf{V}\right|=\frac{1}{|\mathbf{V}|}|\mathbf{V}|=1.$$

例如 $\mathbf{V}$ 的長度爲五，那麼 $\frac{1}{5}\mathbf{V}$ 的長度爲一。

向量 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 成 $a\mathbf{U}+b\mathbf{V}$ 形式的組合叫做**線性組合**。當 $\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$ 及 $a\mathbf{U}+b\mathbf{V}$ 自同一點出發時，若 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 界定了一個平面，則不論乘數 a 及 b 的值是什麼，$a\mathbf{U}+b\mathbf{V}$ 的組合必在由 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 所界定的平面內。反之，我們可以明瞭，若 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 都不是零向量，且不平行，則在 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 的平面內，任何向量