北京大学教材

高等数学

下册

张锦炎 编

北京大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部颁发的高等数学教学大纲，为综合性大学生物、化学类各专业编写的高等数学。全书共分上、下两册。上册包括一元函数的微积分学与空间解析几何；下册包括多元函数的微积分学，无穷级数与常微分方程。每章配有习题与答案。为了满足不同专业读者的需要，还编入了一些可供选学的内容。

高 等 数 学

（下册）

张锦炎 编

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 9.25印张 185千字

1986年5月第一版 1986年5月第一次印刷

印数：00001—15,000册

统一书号：13209·131 定价：1.85元

目　录

第十四章　常微分方程

第十章　多元函数微分学

多元函数微积分可以看作是一元函数微积分的推广和发展。读者在学习这一部分内容时应该联系一元函数微积分中所学过的东西，了解它们间的类似之处与不同之处。

本章介绍多元函数的微分学。

§43　多元函数的基本概念

1．多元函数的定义

到现在为止，我们研究的都是一元函数。但是在生产斗争和科学实验中经常会遇到依赖于多个自变量的函数。下面举几个几何、物理及化学中的例子。

例1　矩形的面积S等于它的长度a乘宽度b，即$S=ab$。根据此公式，如果知道矩形的长度为a_1，宽度为b_1，就能够确定它的面积为$S_1=a_1b_1$。

例2　一克分子理想气体的体积v，压力强度p和绝对温度T之间有下述关系：

$$v=\frac{RT}{p},$$

其中R是常数。根据此公式，如果知道理想气体的绝对温度为T_1，压力强度为p_1，就能确定它的体积为$v_1=\frac{RT_1}{p_1}$。

例3　在合成氨的反应中：

$$3H_2+N_2\rightarrow 2NH_3.$$

氢与氮之间的化学反应速度v可按关系$v=kx^3y$来确定，其中x表示H_2的分子浓度，y表示N_2的分子浓度，k为反应速率常数。如果知道H_2及N_2的分子浓度为x_1及y_1，则由上述关系式就能确定

反应速度 $v_1 = kx_1^2 y_1$。

抽去以上各例子的实际内容，它们在研究数量关系方面的共同点是考虑三个变量 x，y 与 z 之间的关系。我们把 x，y 取作自变量，并且用 xOy 平面上的一个点 $P(x,y)$ 来表示自变量的一对值 x，y。所谓变量 z 是 x 与 y 的二元函数是指变量 z 与点 (x,y) 之间有一种对应关系。确切的定义如下：

定义 1 一个过程中有三个变量 x，y 和 z。变量 z 随着变量 x，y 的变化而变化。已知变量 x，y 所表示的点 $P(x,y)$ 的变化域为 xOy 平面上的某个点集合 D。如果对 D 中的每一个点 P，依照某一对应关系，变量 z 都有唯一的一个值与之对应，我们就说变量 z 是变量 x 和 y 的二元函数。通常记作

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

有时简记作

$$z = f(P).$$

我们称点 $P(x,y)$ 的变化域 D 为函数 $z = f(x,y)$ 的定义域。

将上面的三个例子与二元函数的定义相比较，我们可以说，矩形的面积 S 是长 a 与宽 b 的二元函数；理想气体的体积 v 是压强 p 与绝对温度 T 的二元函数；合成氨的反应速度 v 是氢与氮的分子浓度 x 与 y 的二元函数。

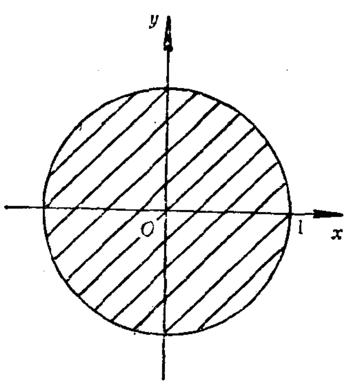


图 10.1

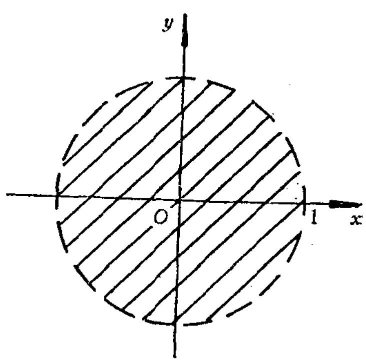


图 10.2

需要指出，实际问题中出现的函数的定义域是由其实际意义来确定。如例 3 中函数的定义域D是xOy平面上的第一象限，因为分子浓度x与y总是非负数。由分析式$z=f(x,y)$给出的函数的定义域，如不特别加以说明，就是指xOy平面上使$f(x,y)$有意义的一切点的集合D。例如，函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域是单位圆$x^2+y^2\leqslant 1$(图10.1)；函数$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为单位圆$x^2+y^2<1$(图10.2)；函数$z=\ln(x+y-1)$的定义域为半平面$x+y>1$(图10.3)；函数$z=\arcsin\sqrt{x+y}$的定义域为一条带形区域$0\leqslant x+y\leqslant 1$(图10.4)。

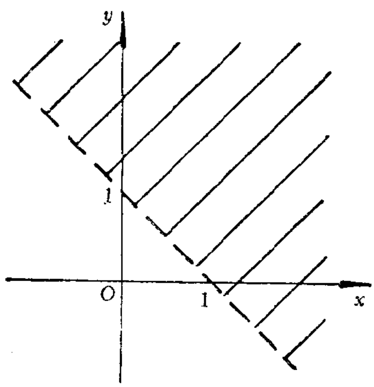


图 10.3

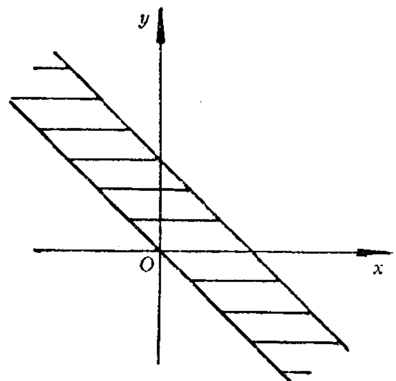


图 10.4

图10.1中的圆是包括它的边界单位圆周的；图10.2中的圆是不包括它的边界的。我们分别用实线与虚线画边界以示区别。不包括边界的区域叫开区域，包括边界的区域叫闭区域。

在实际问题中还常常遇到多于两个自变量的函数。读者可以完全类似地给出它们的定义。这里只举几个例子。

例 4 电流所作的功W是电路上的电阻R，电流强度I及电流流过的时间t的函数。其函数关系由公式$W=I^2Rt$确定。

例 5 平面上两点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$之间的距离d是坐标

x_1, y_1, x_2, y_2的函数：

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

例 4 及例 5 分别是三元函数及四元函数的例子。

二元函数与自变量多于两个的函数统称为多元函数。多元函数的自变量的数目可以不同，但是它们有许多共同的性质。为了简单起见，今后我们主要对二元函数进行讨论，而这些讨论也适用于一般多元函数。

2. 二元函数的几何表示·等高线

利用空间直角坐标系，可以建立二元函数的几何表示。在 xOy 平面上的区域 D 内任取一点 $P(x, y)$，根据函数关系 $z = f(x, y)$，求出对应的函数值 z。于是在空间中确定出一个点 $M(x, y, z = f(x, y))$ 与 D 中的点 $P(x, y)$ 对应。当点 $P(x, y)$ 在 D 中变动时，我们得出点 $M(x, y, z = f(x, y))$ 的轨迹。一般说来它是一张曲面(图10.5)。因此二元函数可以用空间中的一张曲面表示。例如函数 $z = 1 - x - y$ 的图象是一张平面(图10.6)；函数 $z = x^2 + y^2$ 的图象为一个圆抛物面(图10.7)。

对于二元函数，除了用空间的曲面表示它以外，还可以通过函数的等高线（也称等值线，等位线，等势线等）来了解函数的性质，这种方法在实际问题中常被采用。例如在地形学中用“水

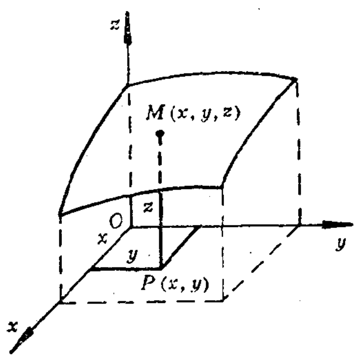


图 10.5

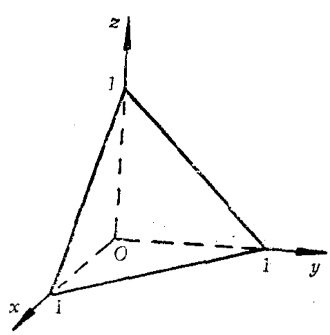


图 10.6

平等高线”表示地势高低的变化；在气象学中常常用等温线和等压线表示气温和气压的变化。下面我们给出二元函数的等高线的定义。

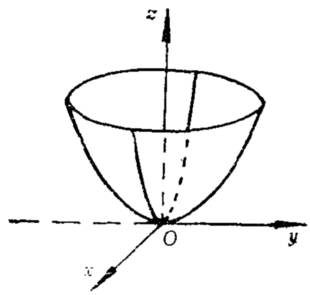


图 10.7

定义 2 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在 xOy 平面上的某曲线 L 上取一个确定的常数值，则称曲线 L 为函数 $z=f(x,y)$ 的等高线。等高线的方程可以写成 $f(x,y)=c$（c 为常数）。当 c 取一切可能值时，我们就得到一族等高线，它们构成等高线族。显然函数的等高线族充满函数的定义域。

例 6 函数 $z=x^2+y^2$ 的等高线族为 xOy 平面上以原点为中心的一族同心圆 $x^2+y^2=c$ 及点 $(0,0)$（图10.8）。

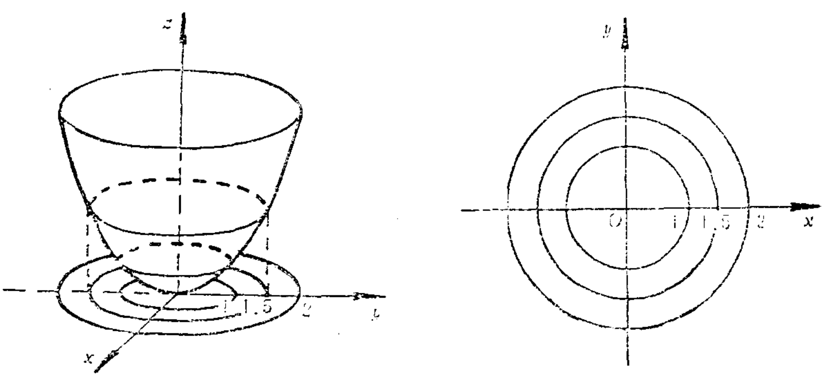


图 10.8

例 7 函数 $z=x^2-y^2$ 的等高线族为一族等轴双曲线 $x^2-y^2=c$ 及坐标轴的两条平分角线 $y=\pm x$（图10.9）。

例 8 由 $pv=RT$ 得知，理想气体的等温曲线族为双曲线族 $pv=c\ (c>0)$ 在第一象限中的分支（图10.10）。

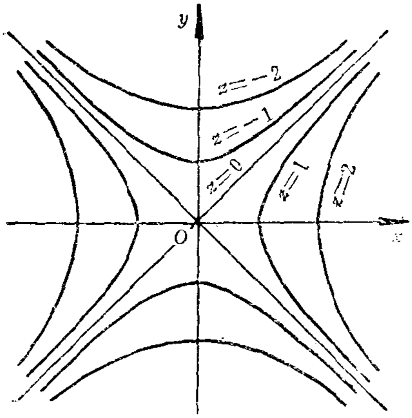


图 10.9

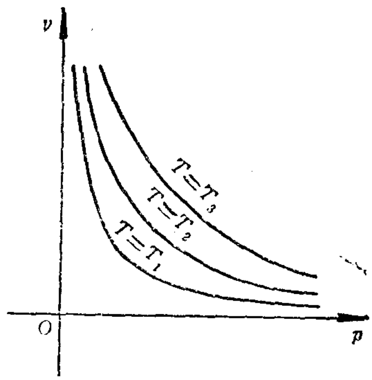


图 10.10

请读者自己画出理想气体的等压曲线族。

3. **二元函数的极限和连续性**

完全类似于一元函数的极限的定义，我们给出二元函数极限的定义。

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一个邻域① 内除去点 $P_0(x_0,y_0)$ 以外都有定义。如果对于任意给定的小正数 ε，都存在充分小的正数 δ，使得当 $0<\rho(P,P_0)<\delta$（其中

$$\rho(P,P_0)\equiv\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\text{)}$$

时，就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

我们就说，当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限为 A。或者说，函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处以 A 为极限。记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

下面应用二元函数极限的定义给出二元函数在一点处连续的定义。

① 点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域是指以 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心的圆的内部。

设函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一个邻域内有定义。如果函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处极限存在，并且$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，我们就说函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续。

最后，如果函数$f(x,y)$在区域D内的每一个点上都连续，我们就说函数$f(x,y)$在区域D内连续。

需要指出的是，如果函数的定义域包含边界，则在边界点上定义函数的极限或连续性时，要限于考虑那些既在该点的邻域内又在定义域内的点。

§44 偏微商与全微分

1. 偏微商(或偏导数)

令二元函数$z=f(x,y)$的自变量y保持定值y_0，这时z就成为自变量x的一元函数。如果这个一元函数$z=f(x,y_0)$在x_0处的微商存在，则称此微商为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏微商，记作$f'_x(x_0,y_0)$，
或记作

$$z'_x(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

根据一元函数微商的定义，函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏微商也可以用下面的极限来定义：

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

同样可以定义函数在点(x_0,y_0)处对变量y的偏微商：

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

例如，函数$z=x^2+xy+y^2$在点(x_0,y_0)处对x的偏微商$z'_x(x_0,y_0)$就是一元函数$z=x^2+xy_0+y_0{}^2$在x_0处的微商，即$z'_x(x_0,y_0)=2x_0+y_0$。

如果函数在区域D内每一点(x,y)处都有偏微商$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，则这两个偏微商也是D内x和y的二元函数。

根据偏微商的定义，在计算函数$z=f(x,y)$对x的偏微商时，只要把变量y看作常量对变量x按一元函数微分法求出微商即可。同样也可以类似地计算$z=f(x,y)$对y的偏微商。

例1　求$z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$的偏微商。

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例2　求$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$的偏微商。

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例3　理想气体的气态方程为$pv=RT$（R为常数），求$\dfrac{\partial p}{\partial v}$，$\dfrac{\partial v}{\partial T}$，$\dfrac{\partial T}{\partial p}$，并验证热力学中的一个重要关系式：

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

解　$$\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{RT}{v}\right)=-\frac{RT}{v^2};\qquad \frac{\partial v}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{p}\right)=\frac{R}{p};$$

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pv}{R}\right)=\frac{v}{R},$$

因此

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{v_2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{v}{R}=-\frac{RT}{pv}=-1.$$

例 3 中的关系式明显地指出，偏微商的符号绝不能看成商或分数。

例 4 用偏微商表示流体的热膨胀系数 α 和压缩系数 β，并求理想气体的热膨胀系数和压缩系数。

解 流体的体积 v，压力强度 p 和温度 t 之间满足流体的状态方程，将 v 表为 p 和 t 的函数 $v=f(p,t)$。

根据流体的热膨胀系数的定义："在压力强度不变的情况下，当温度增加1℃时，单位体积流体的体积增加量"得出，在压力强度为 p，温度为 t 时流体的热膨胀系数为

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{f(p,t)}\ \frac{f(p,t+\Delta t)-f(p,t)}{\Delta t}=\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

同样根据流体的压缩系数的定义："在温度不变的情况下，当压力强度增加 1 个单位时，单位体积流体的体积的减少量"得出，流体的压缩系数为

$$\beta=-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

对于理想气体有 $v=RT/p$，其中绝对温度 T 与摄氏温度 t 之间有关系 $T=273+t$，因此热膨胀系数为

$$\alpha=\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{p}{RT}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{R(273+t)}{p}\right]=\frac{p}{RT}\cdot\frac{R}{p}=\frac{1}{T}=\frac{1}{273+t}.$$

压缩系数为

$$\beta=\frac{-1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{p}{RT}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{RT}{p}\right)=\frac{-p}{RT}\cdot\left(-\frac{RT}{p^2}\right)=\frac{1}{p}.$$

特别得到：在摄氏零度时理想气体的热膨胀系数

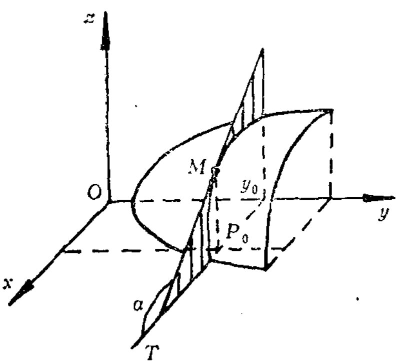
$$\alpha=1/273(℃^{-1});$$

在 1 个atm时，理想气体的压缩系数 $\beta = 1\mathrm{atm}^{-1}$。

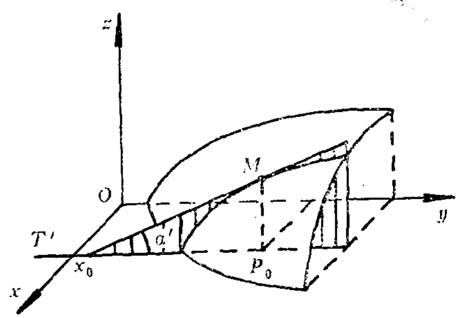
二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处对 x 的偏微商$f'_x(x_0,y_0)$有很明显的几何意义。它是曲面 $z=f(x,y)$与平面 $y=y_0$的交线在点$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线关于 x 轴的斜率，即切线 MT 与 x 轴所成的倾角 α 的正切$\mathrm{tg}\,\alpha$。也就是

$$f'_x(x_0,y_0)=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

(图10.11(a))；同样，偏微商$f'_y(x_0,y_0)$表示曲面 $z=f(x,y)$与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线关于 y 轴的斜率，即$f'_y(x_0,y_0)=\mathrm{tg}\,\alpha'$(图10.11(b))。



(a)



(b)

图 10.11

2. 高阶偏微商

前面已经指出，二元函数 $z=f(x,y)$的两个偏微商 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 仍然是 x 与 y 的二元函数。如果把这两个偏微商再对 x 或 y 求偏微商，则得出函数 $z=f(x,y)$的二阶偏微商，显然二元函数的二阶偏微商共有四个，它们是

$$\frac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f'_y(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y).$$

也常用下列记号表示它们：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f'_y(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y).$$

上面的第二个与第三个二阶偏微商中包含着对不同自变量的偏微商，这叫混合偏微商。

例 5 求函数 $z=x^3y-3x^2y^3$的各二阶偏微商。

解 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3$，$\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2$，

所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy-6y^3,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3x^2-18xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-18xy^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-18x^2y.$$

在例 5 中得到$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这个结果不是偶然的．有以下定理。

定理1 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏微商 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，则在区域$D$内相等，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

证明 设(x_0,y_0)是区域D内任意一点，$\Delta x,\Delta y$充分小。显然有等式

$$\begin{aligned}&[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]\\&-[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\\&\quad=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\end{aligned}$$

$$-[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)].$$

作辅助函数

$$\varphi(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y),$$
$$\psi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

则上面的等式表明

$$\varphi(x_0+\Delta x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)=\psi(x_0,y_0+\Delta y)-\psi(x_0,y_0).$$

因为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内存在一阶偏微商，所以对于充分小的 Δx 与 Δy，$\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内存在一阶偏微商。在以上等式两端应用中值定理，就得到

$$\varphi'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x=\psi'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$，也就是

$$[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x$$
$$=[f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)-f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)]\Delta y.$$

因为混合偏微商存在，所以可再应用中值定理，就得到

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

其中 $0<\theta_3<1$，$0<\theta_4<1$。消去等式两端的公因子 $\Delta x\Delta y$ 后，令 $\Delta x,\Delta y$ 同时趋于 0，在等式两端取极限，因 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处都连续，就得到

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

因为 (x_0,y_0) 是区域 D 内任意一点，所以定理得证。

例 6 验证函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$，所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

令 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$，则上面的结果可以记为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

根据函数关系中变量 x,y,z 的地位的对称性，可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

将上面三个结果相加就得到所要验证的关系：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

上述偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 叫做拉普拉斯方程，它是数学物理方程中的一个重要方程。为书写简单，有时将方程的左端记作 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$。或者，更进一步以符号 Δ 表示 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$，于是拉普拉斯方程就成为

$$\Delta u=0.$$

请读者自己验证函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足平面上的拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。

3. 全微分

定义1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若自变量 x 与 y 各有增量 Δx 与 Δy，则称

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量。

类似于一元函数的微分，对于多元函数有下述全微分的概念。

定义2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如