画法几何与投影几何

武汉測繪学院工程画教研組 编著

測繪出版社

51:54

画法几何与投影几何

武汉測繪学院工程画教研組 编著

測繪出版社

1959·北京

~~6659~~ 6599

~~6659~~

本書是武汉測繪学院工程画教研組根据几年来的教学經驗，参考苏联的教学大綱編写的。在編写的过程中，根据該院教学改革各方面所提出的意見，作了多次修改。全書共分十一章。緒論部分簡要的叙述本課程的发展及其在摄影測量专业中所起的作用与地位。說明了客观实际的需要促进了本課程的发展。第一至七章（点、綫、面、投影改造、体、曲綫曲面、截平面、相貫）是正投影部分。学习这一部分可以培养同学的空間想象力，并使同学在专业学习时对簡单仪器零件图样的閱讀或修改具备一定的能力。第八章（透視对应与射影对应、透視理論）是研究中心投影一般的規律，投影的不变性及其在实际工作中，特别是摄影測量中的应用問題。第十章（透視陰影）的內容与航摄象片判讀有着密切的关系。第十一章（双心投影）是航空摄影測量与立体摄影測量有关投影理論的基础知識。

本書为航測专业学生与航測內外业函授生的教材，亦可供測繪院校有关专业学生以及函授生学习的参考。

画法几何与投影几何

编　　者　武汉测绘学院工程画教研组

出 版 者　测　绘　出　版　社

北京西四羊市大街地质部内

北京市书刊出版业营业许可证出字第081号

发 行 者　新华书店科技发行所

经 售 者　各地新华书店

印 刷 者　地质出版社印刷厂

北京安定门外六铺炕40号

印数（京）4401—8700册　1959年8月北京第1版

开本31″×43″1/16　1960年5月第2次印刷

数字 326 000　印张13 3/8

定价（10）1.75元

序 言

本課程原教材通过教学革命运动的檢査，发現了不少的問題，例如內容重复、庞杂、重点不特出以及目的性不明确等，同学、教师与兄弟教研組分别提出了很多宝貴的意見。在党的領导下，本教研組針对同学与有关方面提出的意見进行了研究、討論幷对講义作了修改。初稿完成后，通过党組織、教师、学生三結合的方式，进行了全面的、深入的、反复的檢査，針对教材初稿中尙存在的問題提出了进一步改进意見。通过三結合会議展开深入的辯論，更明确了本課程目的、要求、重点等問題，例如在原教材中有“阴影”一章，通过辨論明确应改为“透視阴影”，这样可以更好的結合專业的需要；对原教材中“透視仿射对应与仿射对应”一章进行了刪減；原教材中的“标高投影”改由測量学教研組詳細講解。本課程中不再敘述有关这方面的問題，避免了不必要的重复現象；“双心投影”一章在航測教研組教师的关心下进行了刪減、补充与整理。总的講起来，在党組織、同学以及兄弟教研組全面的关心与帮助下，教材的質量比教学革命前有了一定的提高。这主要是由于党的正确領导与大力的支持所获得的。我們教研組教师深切的感到三結合方式編写教材的过程，对我們进行了很生动的教育，幷且更深刻的体会到党的教育方針的正确性。但是限于我們教研組教师的思想与业务水平，教材中尙存在某些不够理想的部分，以及还存在着很多的缺点。我們热誠的希望兄弟院校的有关教研組、讀者提出批評与指正。

武汉測繪学院工程画教研組

画法几何与投影几何

目 录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

緒　論

1. 本課程在我国发展的簡要情况

“画法几何与投影几何”学和其他一切科学一样，是客观規律的眞实反映。人們在長期的生产劳动及与自然界斗爭的过程中不断地发現这些規律，并加以总結成理論，而后又在生产劳动中对这些总結出来的規律加以运用，在实践过程中再总結补充，經过了十几个世紀的不断实践不断总結提高，一直发展到今天的水平。說明它主要是由于人們的实际需要而产生的。一些違反客观規律的几何学者，却認为人們創造几何公理是与实际生活及周圍的物質世界无关的，或者可以由一些人制定某种几何法則，这是唯心主义的說法，是形而上学的。作为唯物論者来說，堅定認为一切科学必須从生产劳动中产生，同时必須与生产劳动相結合才能眞正发揮其作用。画法几何与投影几何学也不例外的，它必須为生产服务，而它的发展又与生产建設的发展有着紧密的联系。这門科学在我国的发展已有悠久的历史。远在新石器时代的彩色陶器上所繪的图样中，就可以找到正方形、橢圓形、菱形等几何图形，而在距今二千年的战国的銅鑑上发現印有房屋的正視图，到汉朝的画象磚石中，更广泛的使用了正投影、軸測投影、透視投影等各种投影方法来表示不同的工程建筑物，特别是宋代李明仲（公元1100年）所著的“营造法式”一書，是世界上最早刊行的工程書籍，有很高的水平。从这些情况来看，我国历代劳动人民的智慧与成就就是非常丰富的。但在解放前長期反动統治，旧制度束縛生产力发展的情况下，科学技术的发展趋于停滯，丰富的民族遺产不但得不到应有的重視或整理，相反的很多失传或毁于帝国主义侵略的炮火中，甚至被劫至国外。1949年新中国成立后，在偉大的中国共产党和毛主席的領导下，社会主义建設事业的突飞猛进的进展，使这門科学得到了空前的发展，特别由于航空攝影測量事业在近年来的发展对本門課程提出了更高的要求；更推动了本門課程向国际水平前进。我們可以充分估計到画法几何与投影几何学在我国將有其广濶的前途，它將成为广大劳动人民掌握的生产斗爭工具并以此来从事創造性的建設事业。

2. 本課程研究的对象与目的

在祖国社会主义建設事业飞跃发展的今天，航測工作必須及时地滿足建設对优質地图的迫切需要。航空攝影測量是利用空中攝影所取得的象片与地面上实測的控制点进行室內象片測图，使由于各种因素所产生的象片誤差予以消除，制成所需要的象片图或地形图，而“投影几何”是航測專业課的投影理論基础，为“攝影測量学”与“立体攝影測量学”服务。“投影几何”是專門研究中心投影的一般規律与中心投影的不变性，掌

据这些規律及不变性后，可以进而理解航攝象片的构图原理，以及利用它来消除象片誤差等問題。

第八章所討論的“平面場的透視对应与射影对应”是航空攝影測量中象片糾正的理論基础。第九章所討論的“透視理論”是航空攝影測量中象片解析的投影原理。第十章“透視阴影”將与航空攝影測量中象片判讀有密切的联系，以及第十一章中所討論的“双心投影”为“立体攝影測量学”打下投影理論的基础。以上这些是本門課程的主要內容，將在以后詳細研究。

除此以外，由于航測內外业工作必須借助于各种光学仪器来完成測图任务，为了滿足航測專业工作者在使用仪器过程中进行某些零件的改进，以及日常对仪器的保养与檢修，本專业学生將学习“仪器学”，本課程的前部分即第一章至第七章中所討論的“画法几何”內容將为学习“仪器学”在讀图方面打下基础。同时作为一个工程技术人員来說具备一定的空間想象力是必需的。“画法几何”是研究空間几何元素（点、綫、面）和几何形体在平面上的各种表示方法及規律，以及研究在平面上用几何作图方法解決空間物体的相对位置等問題，由于專业的要求，在“画法几何”部分只討論“正投影法”（关于軸測投影，标高投影本課程不再討論）。

总之，我們將在“画法几何与投影几何”这門課程中討論“正投影法”与“透視投影法”，其目的为：

一、研究物体在一定平面上构成影象的規律和作图的方法，培养初步的表达几何形体的能力。

二、根据物体的投影关系，来确定其在空間的形狀、大小与位置，培养初步的讀图能力。

三、运用投影的規律及其投影的不变性来研究象片与地图、地面之間的关系。

3. 关于投影方法的概念：中心投影；平行投影

中心投影 設空間的定点S为不在定平面P上的点（图1），如果在空間任取一点A，可將A与S点連一直綫，此直綫对P平面就有唯一的一个交点a，这空間的定点S称为**投影中心**，平面P称为**投影面**，直綫SA称为**投影綫**，A是**空間点**（或实物），交点a则称为**空間点A在投影面P上的中心投影**。

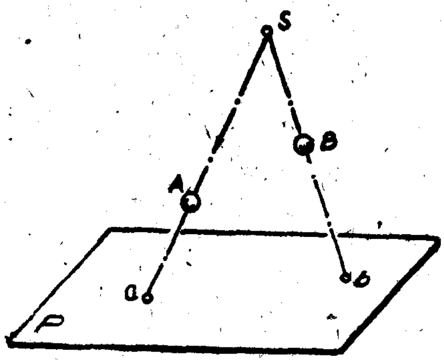

图1

在一般情形下，我們总是用大写拉丁字母A、B、C…… 等点来标記空間点，而用对应的小写字母a、b、c……等来标記它的投影。

在图1中，我們另取一空間点B，用一直綫連接S与B点并延長之，也可求得它与P平面的唯一交点b，那么b点就称为空間点B在投影面P上的中心投影。因此，当投影中心S

和投影平面P在空間的位置确定了，則每給出一个空間点，在投影面上就有它唯一的一个中心投影。

但是，如果我們在SA投影綫上（图2）任取一点A_1时，就可以发現A_1点的投影a_1和A点的投影a重合。同样在同一投影綫SA上的另一任意点A_2，在P平面上的投影也和a点重合。普遍地說，所有在投影綫SA上的一切点在投影面P上的中心投影都重合于a点。因此可以知道，**当投影中心和投影面的位置确定后，根据空間点的一个投影并不能定出空間点原有的位置。**

一切投影綫都通过一个共同的投影中心S的投影法，**我們称之为中心投影法。**图3为中心投影的一个实例。

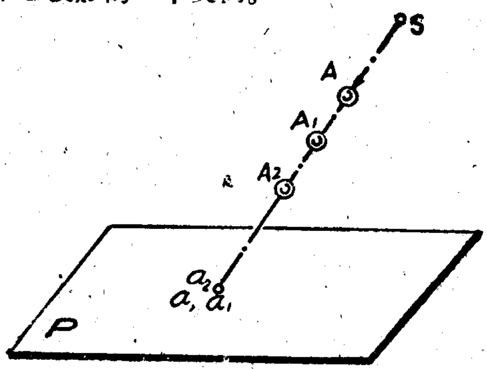

图2

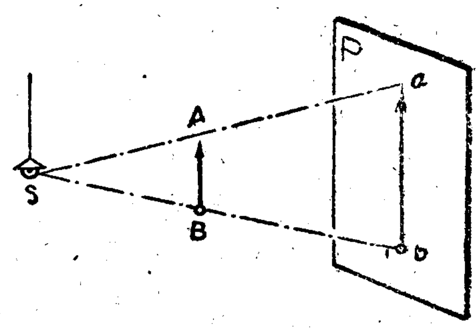

图3

平行投影

当投影中心远离投影面P时，则各投影綫之間的夾角必逐漸減小。如果S点在无穷远时，**則各投影綫皆成为平行（图4）。这种投影綫都平行的投影法，称之为平行投影法。投影綫的方向l，称为投影方向。**

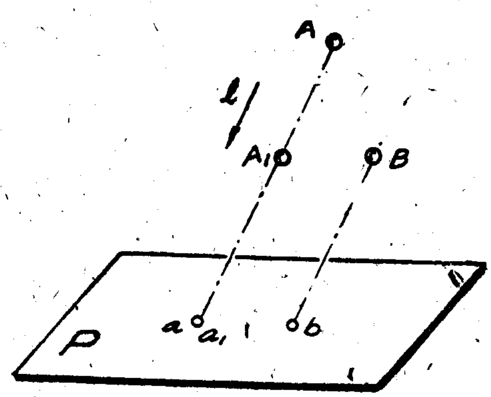

图4

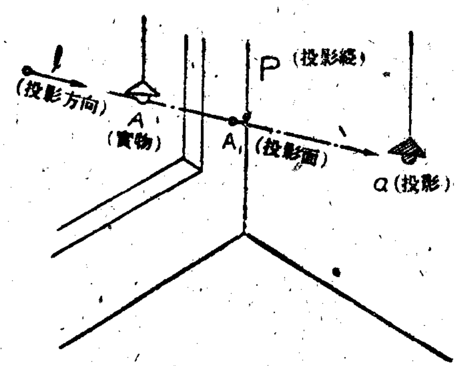

图5

如果平行投影的投影方向l和投影面P确定时，則每給出一空間点，在投影面上就有它唯一的一个投影，但根据这一个投影却并不能定出空間点实在的位置（图4）。若給出了投影方向l和投影面P，为了确定A点的投影可以通过A点，作投影方向l的平

行綫Aa，延長該直綫后与P平面相交，得其唯一的交点a，这就是A点在P平面上的平行投影。但是如果要根据投影a来判定A点在空間的位置时，則它就不可能有确定的位置，因为在Aa投影綫上的任意点A_1的投影也在a处，也就是在Aa直綫上的任一点的投影都在a处，这样产生投影a的空間点在Aa直綫上有无穷多的点，这就說明了点的一个投影不能确定它在空間的位置。图 5 为一个平行投影的实例。

正投影和斜投影

在平行投影法中，根据投影綫对投影面的垂直与否，又可分为两种：投影綫垂直于投影面时称为**正投影**（**即直角投影**）；投影綫和投影面成斜交时称为**斜投影**。在以后章节中討論的正投影是在互相垂直的投影面体系中的正投影。

綜上所述投影的分类是这样的：

$$\text{投影}\begin{cases}\text{中心投影}\\ \text{平行投影}\begin{cases}\text{正投影}\\ \text{斜投影}\end{cases}\end{cases}$$

我們知道图示的方法有：正投影图；軸測投影图；标高投影图；透視图。在以后的章节中，我們主要研究正投影图与透視图。特别是首先研究空間物体在互相垂直的投影面体系中的**正投影图**。由于这种投影图是能准确的反映空間物体形狀、尺寸、位置以及便于繪画等的优点。因此这种图样在工程上广泛的得到应用。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 点的投影

§ 1.1 点在空間位置的确定和投影图的构成

1. **点的两个投影确定点在空間的位置**

根据空間一点在一个投影面上的投影不能确定該点在空間的位置，但如何确定其在空間的位置，在下面加以叙述。

图1.1 在正投影法中，所給的投影面是互相垂直的，也就是一个是鉛直的，用符号V来表示該平面，簡称**立面**（或V面）另一个是水平的，用符号H来表示該平面，簡称**平面**（或H面）。这两个投影面V与H的交綫用OX来表示，称之为**投影軸**。空間点A在V面上的正投影（直角投影）称之为**立面投影**（或V面投影），用a'来表示，其在H面上的正投影称为**平面投影**（或H面投影），用a表示。两相交的投影綫Aa'及Aa所确定的一个平面，一定能同时垂直于V及H面，所以也必垂直于OX軸。这样所述平面与投影面的交綫$a'a_x$及aa_x也必垂直于OX軸，这两垂綫的長度分別反映了空間A点到两投影面的距离，在此我們可以得出下述关系：

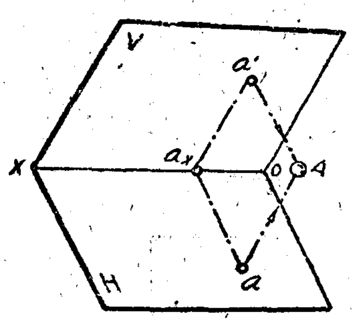

图1.1

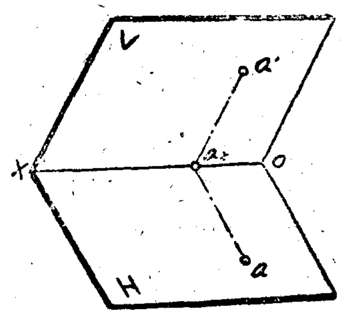

图1.2

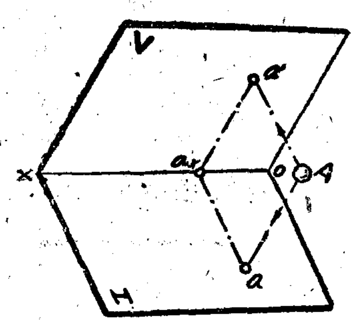

图1.3

Ⅰ. $a'a_x \perp OX$， $aa_x \perp OX$。

Ⅱ. $a'a_x = Aa$ 即为A点到H面的距离。

Ⅲ. $a'A = aa_x$ 即为A点到V面的距离。

根据以上叙述我們提出下列結論：**点的V面投影至OX軸的垂距反映空間点到H面的距离。点的H面投影至OX軸的垂距反映空間点到V面的距离。**

图1.1中A点去掉而保留其两个投影即成图1.2。如果根据这两个投影a'与a，分別作其V及H投影面的垂綫$a'A$与aA，这两条所作直綫的相交点A，就是所求点的位置，

因此点在两个投影面上的投影a'与a，是完全可以表示空間一个确定点的位置。

2.投影图的构成

为了把互相垂直的投影面V及H，重合在一个平面上，我們可以将图1.1中的实物A点去掉成图1.2的样子。这时V面不动，H面按图1.4所表示的样子向下旋轉90°，在H面重合V面时，該H面上的直綫aa_x亦跟着H面一起旋轉90°后重合在V面上成图1.5的样子。原来互相垂直的两直綫$a'a_x$与aa_x，这时成了一直綫，該直綫并且是垂直于OX軸。我們将图1.5画在一张图紙上，就成了图1.6的样子。当互相垂直的两投影面和它上面的投影，按規定的方法旋轉重合成一个平面图时，这样的图样，就称之为**投影图**。

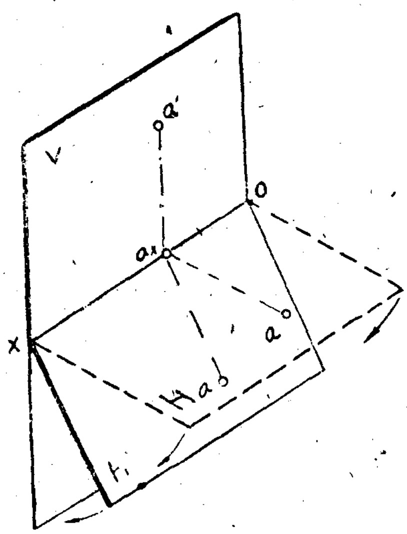

图1.4

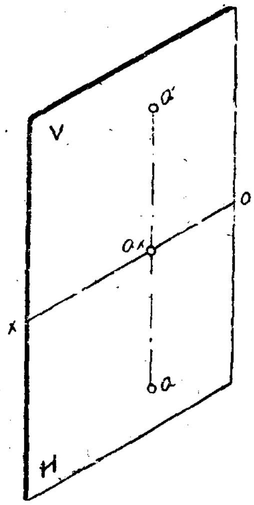

图1.5

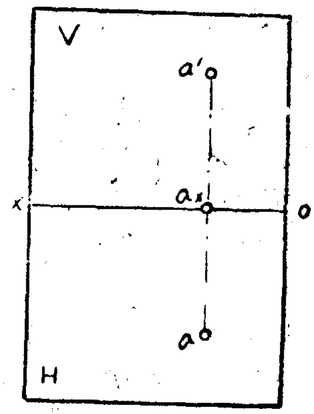

图1.6

此外，根据以上叙述我們可以注意一个問題，就是原来垂直相交的两直綫$a'a_x$与aa_x，其中$a'a_x$因V面不动而位置不变，另一直綫aa_x跟着H面一起共同旋轉了90°。这样，原来互相垂直相交的两直綫，变成了一直綫，且是与OX軸成垂直关系。簡要的結論是这样的：

在投影图中一点的V面投影和H面投影的連綫，必为OX軸的垂綫。

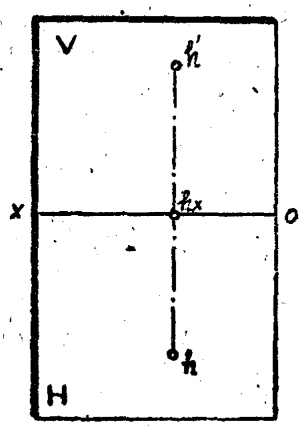

图1.7

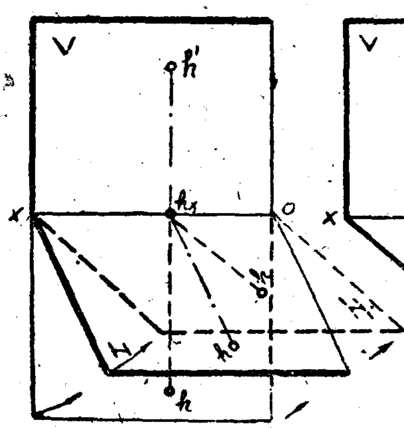

图1.8

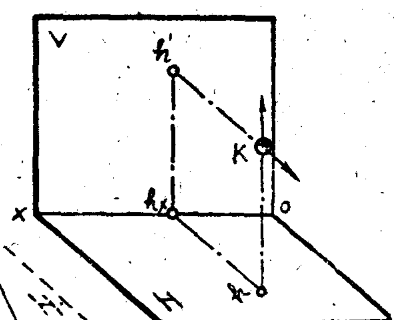

图1.9

图1.7为已知的一个K点的投影图。如果V面不动，OX为軸，H面繞OX反向旋轉90°，則恢复V与H面在空間原有的垂直关系。图1.8为表示H面反向旋轉的过程。图1.9为从V及H面上点的投影k'与k分别作其投影面的垂綫，即定出其原点K在空間的位置。在此提出下述結論：

在投影图上，点的V与H面投影，即能确定点在空間的位置

于图1.9中，我們已經知道$k'k_x \perp kk_x$，以及k'与k分别为垂足，也就是$Kk' \perp k'k_x$与$Kk \perp kk_x$，因此平行四边形$Kk'k_xk$为一个矩形，这样Kk与$k'k_x$不但是長度相等，而且是反映了K点与H面的距离，这两直綫都为H面的垂直綫　以及Kk'与kk_x亦是長度相等，而且是反映了K点与V面的距离，这两直綫都为V面的垂直綫。

§1.2 兩投影面体系

1. 兩投影面的扩大和四象限的形成

上述互相垂直的两个投影面V与H面，是可以任意扩大。当其扩大时則构成图1.10所示的样子。图中的边框只是为了在图中表示清楚起見而暫时加上去的。这样，互相垂直的两投影面就把空間分成四个部分，称之为四个象限。当我們站在模型的左边时，从右上角开始按反时針方向其名称依次为第一、第二、第三和第四象限。

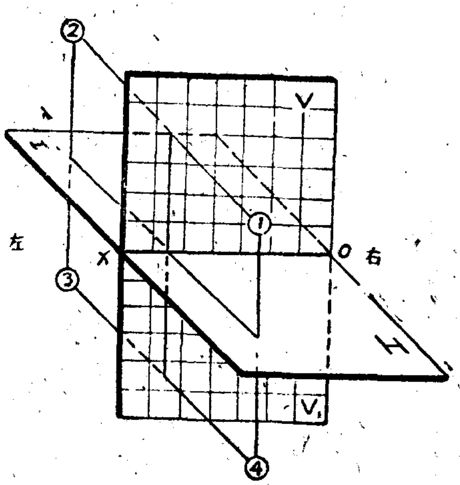

图1.10

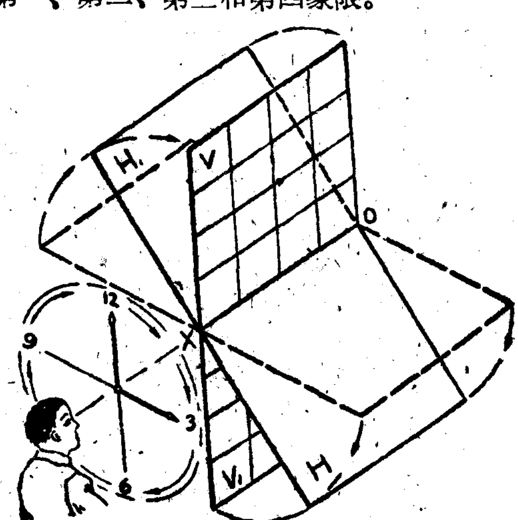

图1.11

2. 两个投影面的旋轉重合

为了两个投影面重合在一起，有下述的規定。

Ⅰ. V面不动。　图1.11

Ⅱ. H面繞OX軸按順时針方向（在模型的左边看）旋轉90°后两投影面重合为一。图1.12为H面旋轉过程，图1.13为H面旋轉90°后与V面重合在一起。

从图1.13中，我們必須理解在OX軸的上方，不但表示了V投影面的上半部，并且还表示了H投影面的后半部H_1。同样在OX軸的下方，是表示了H投影面的前半部和V

投影面的下半部 V_1。

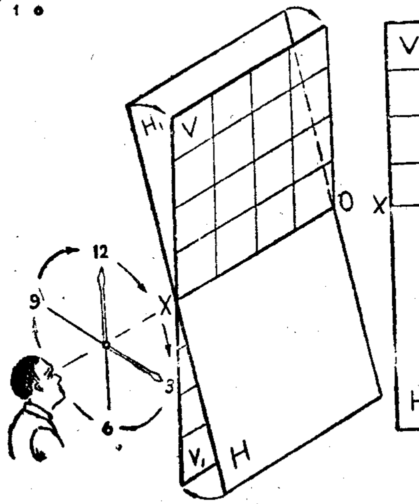

图1.12

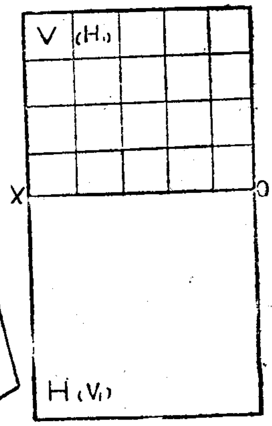

图1.13

§ 1.3 兩投影面体系中点的投影

1. 各象限中点的投影

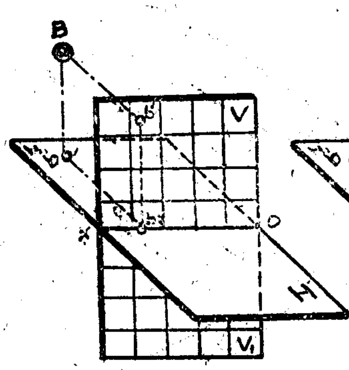

图1.14

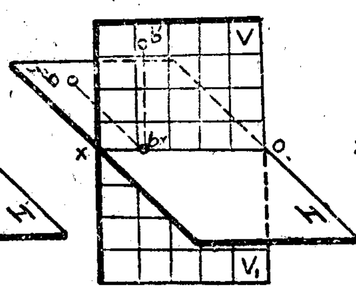

图1.15

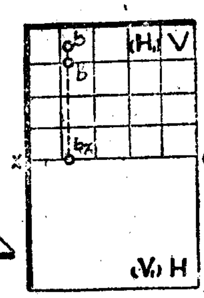

图1.16

关于第一象限中点的投影图已于前面叙述过，此处不再研究。

图1.14为在第二象限中点B的直观图，图1.15为取掉了其空間点，而还保留了其两投影面上的投影。我們仍以規定的两投影面旋轉重合的原則：

Ⅰ. V面不动。

Ⅱ. H面繞OX軸依順时針方向（人在模型左边看）旋轉 90° 而重合 V 面。即构成投影图如图 1.16 所示。由于第二象限中的点，其V面投影在 V面的上半部，H面投影在H面的后半部，因此 B 点的V 面投影和H面投影在投影图中皆在OX軸的上方。按照点的投影原則，还保持下述的規律：

Ⅰ. b 与 b' 的連綫垂直OX軸、即 $bb' \perp OX$。

Ⅱ. bb_x 的長度为空間点 B到V 面的距离。

Ⅲ.$b'b_x$的长度为空間点B到H面的距离。

图1.17为第三象限中 C 点的直观图，取去空間 C 点，并把投影面旋轉重合后，构成投影图1.18。由于第三象限中点的V面投影在V面的下半部，H 面投影在H 面的后半部，所以在投影图中它的V面投影在OX軸的下方，而H面投影在OX軸的上方，同样根据空間点的投影原则，我們来研究几个問题。

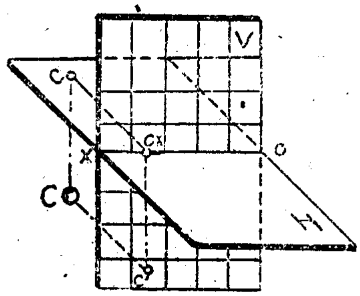

图1.17

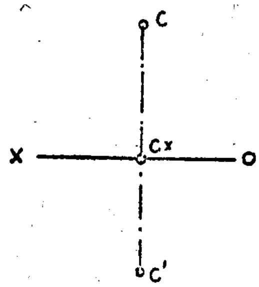

图1.18

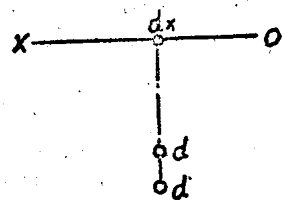

图1.19

Ⅰ.c与c'的連綫与OX有什么关系？为什么？

Ⅱ.$c'c_x$的长度，表示空間点与那一个投影面的距离？

Ⅲ cc_x的长度，表示空間点与那一个投影面的距离？

以上三个問题是空間点投影的基本原則，必须加以熟悉与掌握。

由于投影面可以任意扩大，因此投影面在今后不再画出投影面上的边框，而只画出投影軸，如图1.18所示。

图1.19为空間一个D点的投影图，該点的V面投影d' 在 OX 軸的下方，这样該空間点是必須在 H 面的上方还是在下方？大家清楚的可以知道，空間 D 点是必须在H面的下方。此外該点的H面投影d，經H面旋轉（按照前述規定）重合于V面后在OX軸的下方，这样空間的D点是必須在V面的前方还是在V面的后方？我們可以知道，D点是必須在V面的前方，才有可能使D点的平面投影d在H面的前半部上。根据以上的討論，空間給出的D 点是在H面的下方，并在V面的前方，这样該空間点应該在那一个象限中？請讀者自行作出解答。

2.投影面上点的投影

图1.20是在投影面上点D与C的直观图。其中C点是在V面上，它到V面的距离等于零，因为一点到V面的距离等于这点的H面投影到OX軸的距离，現在 CC_x 沒有长度，成一个点，也就是C点H面投影c在OX軸与C_x重合在一起。又因空間点C在 V 面上，所以它的V面投影c'是与点C本身相重合。

D点是H面上的点，因此其与H面的距离为零，也就是与前述問題一样，$d'd_x$ 沒有长度，成一个点，即D点的V面投影d' 在OX軸上与d_x 重合在一起。此外 D 点的H面投影d是与H面上D点的位置重合在一起。由于D点在H面的后半部，所以在H面旋轉重合于V面后，其位置应在OX軸的上方。图1.21为其投影图。

根据以上叙述，提出下列結論：

空間点在投影面上时，必有一个投影在OX 軸上，而它的另一个投影与空間点本身

重合。因此根据它不在投影軸上的那一个投影，即可判定它在空間的位置。

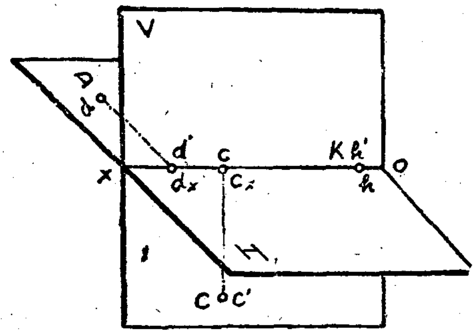

图1.20

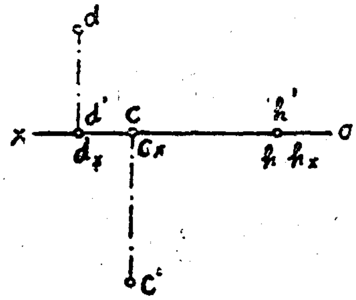

图1.21

图1.22中，B点的V面投影b'在OX軸上与b_x重合在一起。由于 $b'b$ 沒有长度成一个点，因此B 点与H面的相距为零，也就是B点在H面上。此外 B 点的H面投影b是在OX軸的下方，这样我們进一步知道B 点是在前H面上。

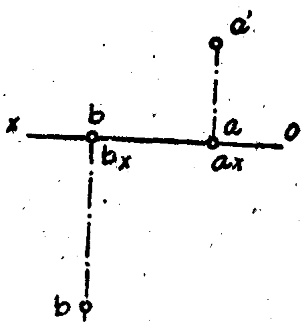

图1.22

图1.22中A点的H面投影a在OX軸上。由于 a、a_x 为一个点，因此A点与V面的距离为零，也就是A点在V 面上。因a'在 OX 軸的上方，我們进一步可以判定A点是在上 V 面上。

3.投影軸上点的投影

图1.20与1.21中，K点在投影軸上，这样其与V 及H面的距离都为零，所以 $k'k_x$ 与kk_x均沒有 长 度， 成 一 个点， 即 k' 与k皆在 OX 軸上，且和它本身的K 点重合在 一起。

关于投影軸上的点，我們可以得出下述結論：

空間点在投影軸上时，两个投影都在OX軸上，并与空間点本身重合在一起。

§1.4三投影面体系

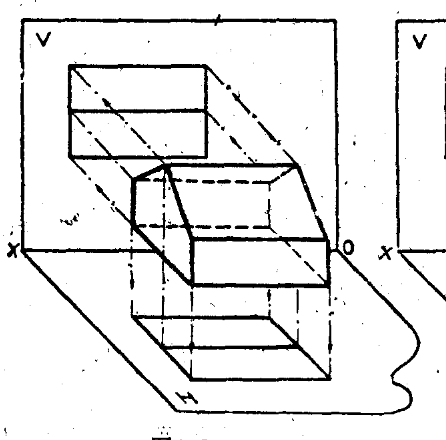

图1.23

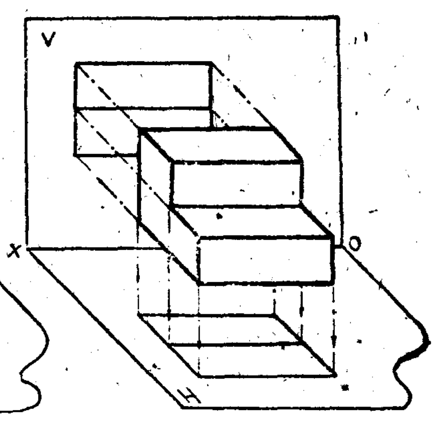

图1.24

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com