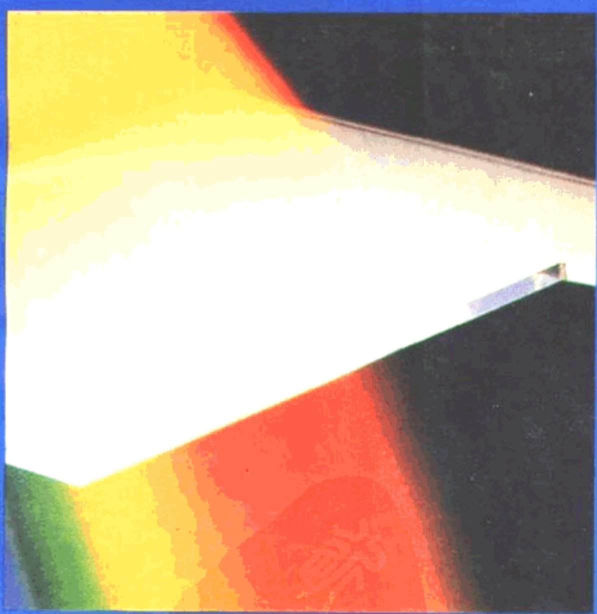
数学分析教学提要

唐经农　著



气象出版社

前　言

凡为人师者，必有为师之能，为师之德，为师之法. 德能俱备，取决于法. “教不得法”将无益于事，无施于人. 一个有抱负的教师从他学成就职到“烛灭丝尽”，悠悠岁月，上下求索，都围绕着“应该教什么，怎么教”的问题在废寝忘食地思考，呕心沥血地探索，真是“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”. 同样的教材，不同的组合，不同的教法，效果往往差异悬殊. 教材人所共有，而教法各有千秋. 我执教三十三年，主要是从事数学分析、实变函数与概率统计的教学. 在数学分析教学过程中，我使用和参阅过的数学分析教材或参考书不少于30种，其内容和篇章结构都大同小异. 但与教材配套的“教案式”参考书却很少见. 我所教的历届毕业的学生和新参加工作的青年教师都向我索取“数学分析教案”. 因为教案是教学经验的积累，通过对教学内容与教学方法的选择，形成了各人独特的教学风格. 青年教师和学生的这种要求，说明人们在教学数学分析时需要一本这样的书：它遵循教材的内容和体系，具有资料的完整性；它又能介绍应如何组合与取舍教材，如何阐述概念，如何归纳方法，如何使用课堂语言，做到纲目清楚，课时划分恰当，具有可操作性. 为了满足这种需要，我觉得我有责任把我长期以来教授数学分析所积累的经验与编写的教案整理出来，取名为《数学分析教学提要》. 更期望经大家的共同探讨与实践，在“应该教什么，怎么教”的问题上有个比较统一的认识. 这对于提高师范高等专科学校数学分析的教学质量无疑是有好处的.

本书可以说是个教案集. 它具有教案的特点. 它以华东师大数

学系郑英元、毛羽辉、宋国栋编写的师范高等专科学校《数学分析》教材作蓝本(高等教育出版社,1990年3月第一版),严格按照这个教材的体系、深度与广度,将整个教材划分为94课(每课以2学时计),另外加20次习题课(共40个学时),完成这个教材的教学任务共需228个学时,它突出地抓住了每课的重点和难点进行分析;对教材中的概念和定理作了详细的说明;对教材中所涉及到的解决问题的方法进行了归纳;对概念如何引入,如何讲解,如何过渡到其他的问题上去,尽可能地用课堂语言写了出来.但又不同于教案,因为它删去了定理的证明,公式的推导,例题的讲解,习题的选择,而这些都是教案和教学中必不可少的内容.读者绝不能因本书未涉及而忽视.

本书也可以说是教材提纲或教学笔记.为了使读者能留下比较完整和系统的资料,对于教材中重要的概念、定理和公式不得不重复.有些内容,比如各种极限过程无穷大量的叙述,傅里叶级数、欧拉积分等是仅作参考而提及的.

希望这本书既能给师专或与师专同层次的高校从事数学分析教学的教师备课讲课时作参考,又能给师专或与师专同层次的高校数学专业的学生提供学习数学分析的资料,这就是我写此书的指导思想.

想法与现实常常是有距离的.限于作者的水平,对期望值很高的读者,自然很难如愿.且缺点、错误在所难免,恳望同行专家及读者批评指正.

本书出版过程中得到了郴州师专数学系廖六生、陈安平、王晓萍三位老师的大力支持和帮助,他们校阅了全部书稿,并提出了宝贵意见,作者对他们的辛勤劳动表示感谢.

唐 经 农

1994年6月23日

内 容 提 要

本书是与华东师大数学系郑英元、毛羽辉、宋国栋编写的高等师范专科学校《数学分析》教材(高等教育出版社,1990 年 3 月第一版)配套的“教案式”参考书。是作者三十多年教授《数学分析》的经验总结。它突出地抓住了每课的重点和难点进行分析,对教材中的概念、定理和公式作了较详细的说明,对教材中所涉及到的解决问题的方法进行了归纳。严格按照教材的体系、深度和广度,将整个教材划分为 94 课(每课以 2 学时计),具有可操作性。

本书可供师专或与师专同层次的高校数学专业的师生教学《数学分析》时参考,也可帮助和指导函授学员与自学者学习《数学分析》这门课程。

作 者 简 介

唐经农，男，1940年生，湖南祁东人。1963年毕业于湖南师范大学数学系，执教三十三年。1987年晋升为副教授。先后教过初等数学、线性规则、数学分析、概率论与数理统计、实变函数等课程。基础理论扎实，知识面宽，课堂教学的艺术与效果尤为突出，在郴州地区教育界享有较高的声誉。1992年起任湖南省郴州师范高等专科学校副校长（主管教学）至今。

主要研究方向是：函数论，概率论。

主要成果有：《可交换的随机变量和对称分布函数》、《可交换的随机变量序列》

主要著作有：《数学分析教学提要》

目 录

第一课　实　数

1. 引言

数学分析是高等数学的基础，它是以极限理论为工具研究函数性质的学科．它所包含的内容可分为四大部分：

（1）　函数概念和实数理论；

（2）　极限理论；

（3）　无穷级数；

（4）　一元及多元函数的微积分．

由于一元及多元函数的微积分是构成数学分析的主体，因而有时把数学分析这门课程也称为微积分．我们学习数学分析这门课程一定要了解我们研究的对象：在实数范围内研究函数．一定要打好一个基础：掌握极限理论．一定要抓住“微积分”这个主体．数学分析的内容从现在起将逐步展开．

2. 实数的主要特性是本课的重点

要强调只有全体实数才能“填满”整个数轴，全体实数与整个数轴上的点有着一一对应关系．为了加深读者对实数性质的理解，可提出如下问题：

（1）有理数对四则运算是否封闭？无理数呢？

（2）实数的有序性在数轴上表现为一种什么关系？

（3）任何两个不同的有理数之间还有另外的有理数吗？有多少个？任何两个不同的无理数之间还有另外的无理数吗？有多少个？

3. 绝对值的概念是本课的又一个重点

实数 a 的绝对值常记为 $|a|$，在数轴上 $|a|$ 表示点 a 到原点的距离，因而我们定义 $|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

为了加深读者对绝对值概念及性质的理解，宜证明性质 2 与性质 3，并补充如下例题：

例 1　解不等式 $|2x-1|\leqslant 3$.

解：　$\because |2x-3|\leqslant 3, \therefore -3\leqslant 2x-1\leqslant 3$

即 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

例 2　应用三角形不等式证明：当 $|x-1|\leqslant 1$ 时，$|x^2-1|\leqslant 3$.

证明：　$\because |x+1| = |(x-1)+2| \leqslant |x-1|+2\leqslant 3,$

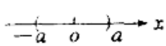
$\therefore |x^2-1| = |x+1|\cdot|x-1|\leqslant 3.$

第二课　数集与确界原理

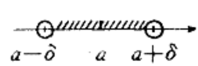
1. 在定义区间时必须强调指出区间的端点是否包括在内

2. 邻域概念的引入

我们已知数集 $\{x|a<x<b\}$ 是开区间 (a,b)，绝对值不等式 $|x|<a$ 与 $-a<x<a$ 等价，自然满足绝对值不等式 $|x|<a$ 的全体实数是关于原点对称长度为 $2a$ 的开区间 $(-a,a)$，如左图.



一般说来，绝对值不等式 $|x-a|<\delta(\delta>0)$ 与 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价，故满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数表示以 a 为中心的一个开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图：我们把满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$ 或简记作 $U(a)$，其中点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径，可见邻域是一种特殊的开区间.

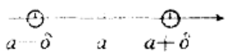


若把不等式 $|x-a|<\delta$ 的左边写出来，显然有 $0\leqslant |x-a|$

$<\delta$，而且只有当 $x=a$ 时才有左边的等式，去掉左边的等号就意味着 $x\neq a$，比较 $|x-a|<\delta$ 与 $0<|x-a|<\delta$ 这两个式子，前者 x 可以等于 a，后者用条件 $|x-a|>0$ 来强调 $x\neq a$.

因此，我们把满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数称为点 a 的空心 δ 邻域，记作 $U^{\circ}(a,\delta)=\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}$ 或简记作 $U^{\circ}(a)$.

要特别注意：点 a 的邻域包含点 a，而点 a 的空心邻域不包含点 a. 从右图可以看出：



数集 $\{x|a\leqslant x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 右邻域，记为 $U_{+}(a)$.

数集 $\{x|a-\delta<x\leqslant a\}$ 称为点 a 的 δ 左邻域，记作 $U_{-}(a)$.

最后再定义无穷远点邻域，并指出区间与邻域是两类重要而常见的数集.

3. 关于有界集与无界集

在给出有界集定义时，必须强调 $x\leqslant M(x\geqslant r)$ 的成立是对一切 $x\in S$ 而言的，而不是对某些特殊的 x. 定义无界集是采用二分法，即若 S 不是有界集则称之为无界集.

4. 上、下确界概念的引入

设有数集 $E=\{x|\ 0<x<1\}$，1 是 E 的一个上界，任何比 1 大的数也都是 E 的上界. 0 是 E 的一个下界，任何比 0 小的数也都是 E 的下界. 一般说来，若一个数集 $\{x\}$ 有上界，则它就有无穷多个上界，这无穷多个上界中显然没有最大的，但我们关心的是这无穷多个上界中有没有最小的. 对于一个有上界的数集 $\{x\}$，我们把最小的上界叫做数集 $\{x\}$ 的上确界；同理，若一个数集 $\{x\}$ 有下界，则它就有无穷多个下界，这无穷多个下界中显然没有最小的，但我们关心的是这无穷多个下界中有没有最大的. 对于一个有下界的数集 $\{x\}$，我们把最大的下界叫做数集 $\{x\}$ 的下确界.

所谓最小的上界有两层意思：首先是上界，其次是比它小的数

不再是上界.把这两层意思都刻出来,便有如下的精确定义:

定义 1　对于给定的数集 $E=\{x\}$,若数 ξ 满足如下条件:

(1) 对一切 $x\in E$,都有 $x\leqslant\xi$(这表明 ξ 是 E 的一个上界)

(2) 对任给的正数 ε,必存在 $x_0\in E$,使得 $x_0>\xi-\varepsilon$.

(这表明比 ξ 小的数不再是 E 的上界,即 ξ 是 E 的最小上界).

则称数 ξ 为数集 E 的上确界,记作 $\xi=\sup E$ 或 $\xi=\sup\limits_{x\in E}x$.

所谓最大的下界也有两层意思:首先是下界,其次是比它大的数不再是下界,于是有下面的精确定义:

定义 2　对于给定的数集 $E=\{x\}$,若数 η 满足如下条件:

(1) 对一切 $x\in E$,都有 $x\geqslant\eta$(这表明什么意思?).

(2) 对任给的正数 ϵ,必存在 $x_0\in E$,使得 $x_0<\eta+\epsilon$(这表明什么?).

则称数 η 为数集 E 的下确界,记作 $\eta=\inf E$ 或 $\eta=\inf\limits_{x\in E}x$.

寻找上、下确界的方法是先观察,再根据定义进行判断,讲解下面的三个例题:

例 1　求数集 $E=\{-5,0,3,9,13\cdots\}$ 的上、下确界.

例 2　求数集 $E=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\,\middle|\,n=1,2,3,\cdots\right\}$的上、下确界.

例 3　求开区间$(0,1)$的上、下确界.

关于数集的上、下确界的几个重要结论:

(1) 一个数集若有上(下)确界,则上(下)确界是唯一的.

(2)　$\inf E\leqslant\sup E$.

(3) 没有上界的数集无上确界,没有下界的数集无下确界.

(4) 任何有限数集,一定同时具有上、下确界,且最大数就是上确界,最小数就是下确界.有限数集的上、下确界都属于数集本身.

(5) 若数集 E 有上确界 ξ,则 ξ 可能属于 E,也可能不属于 E,$\xi\in E$ 的充要条件是 E 有最大值,且 E 的最大值就是 ξ;同理,数集 E 的下确界 $\eta\in E$ 的充要条件是 E 有最小值,且 E 的最小值就是

η.

5. 数集确界的存在性问题

最后我们要回答关于数集确界的存在性问题，给出确界原理及推广的确界的原理.

第三课　函数概念

1. 常量与变量的关系

给出常量与变量的概念以后，要讲清它们之间的关系：

(a) 由于事物的运动变化是绝对的，而静止是相对的，故常量是有条件的. 因一个量在某过程中是常量，而在另一过程中又可能是变量；

(b) 所谓常量，也是在研究过程中能在某个数集中取值的量，只不过始终取同样的值罢了，因此可以说常量是一种特殊形式的变量，这样把“不变”统一在“变化”之中，体现了变量的绝对性.

2. 关于函数定义的说明

(a) 在函数的定义中涉及到三个内容：定义域 D，对应法则 f，函数 f 的值域，但由于函数值是由 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定的实数，因而确定一个函数的两个要素是定义域 D 和对应法则 f，从而把函数简单地记为 $y = f(x), x \in D$，这就突出了上述两个要素. 如果一个函数的对应法则可以用数学式子表达，此时定义域 D 也可省略不写，因为其定义域就是使这一“式子”有意义的自变量所取值的全体. 实际问题中的函数定义域还应使实际问题有意义.

(b) 两个函数只有当它们的定义域与对应法则都分别相同时才算是相同的函数. 而两个相同的函数其对应法则的表达形式可能不同，例如：$f(x) \equiv 1, x \in R$ 与 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $x \in R$

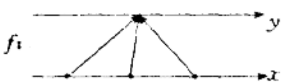
就是两个相同的函数.

(c) 两个相同的函数,它们的定义域和值域自然都是相同的.但定义域与值域都相同的两个函数却不一定是两个相同的函数,例如:$y = 2x - 1$ 与 $y = 2x + 1$,尽管它们有相同的定义域与值域,但由于对应法则不同,因而它们是两个不相同的函数,这进一步说明了决定函数的两个要素是定义域与对应法则.

(d) 函数定义指出:"给定两个实数集 D、M,若按照某一确定的对应法则 f,使 D 内每一个数 x 都有唯一的一个数 $y \in M$ 与它相对应".这包含了下述两种情况:

(1) 不同的 x 在 f 的作用下对应着不同的 y.如图:

(2) 不同的 x 在 f 的作用下对应着相同的 y.如图:



以上两种情况都说明,对每一个 x,只能有唯一的一个 y 与它相对应,这样定义的函数称为单值函数,本书只讨论单值函数.还有下面的两种情况是不符合上述函数定义的:

(1) 对于给定的 $x \in D$,在 f 作用下,M 中没有确定的 y 值与它对应;

(2) 对于给定的 $x \in D$,在 f 作用下,M 中有两个或两个以上的 y 值与它相对应,这种函数称为多值函数,本书不讨论,如图:

3. 关于函数的表示法

应着重介绍解析表示法及用语言描述的几个常见的特殊函

数.

当函数的对应法则用数学式子给出时,这种表示函数的方法称为解析法,通常有下述两种情况:

(1) 在整个定义域内,对应法则只用一个式子表示.

(2) 把整个定义域分成若干部分,函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示,这种形式的函数为分段函数.

例如:$y = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0. \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

又如符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0. \\ 0, & x = 0. \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

用语言描述的几个常见的特殊函数:

例 1 y 代表不超过 x 的最大整数,记作 $y = [x]$.

例如:$[2.5] = 2$, $[-\pi] = -4$.

例 2 数 x 的小数部分,记作 $y = \{x\} = x - [x]$.

例如:$\{3\} = 3 - [3] = 0$,

$\{-4.1\} = -4.1 - [-4.1] = 0.9$

例 3 定义在[0,1]上狄利赫勒(Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}. \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

例 4 定义在[0.1]上的黎曼(Riemam) 函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x = \dfrac{p}{q} \quad (p, q \text{ 为正整数. } \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}), \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1, \text{及无理数}. \end{cases}$$

第四课　函数的运算

1. 定义两个函数的和、差、积、商的基本条件

定义两个函数的和、差与积时，一定要强调已给函数定义域之交集是非空的. 若设 $f(x), x\in D_1$ 与 $g(x), x\in D_2$ 为已知，只有当 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$ 时，才能在 D 上定义它们的和、差与积. 在 D 中再去掉使得 $g(x)=0$ 的 x 值得集合 D^*，即

$$D^*=D_1\cap\{x|g(x)\neq 0, x\in D_2\}\neq\varnothing,$$

才能在 D^* 上定义 $\frac{f(x)}{g(x)}$；在 D 中去掉使得 $f(x)=0$ 的 x 值得集合 D'，即

$$D'=D_2\cap\{x|f(x)\neq 0, x\in D_1\}\neq\varnothing$$

才能在 D' 上定义 $\frac{g(x)}{f(x)}$.

2、复合函数概念的引入

已知两个函数：$y=f(u), u\in D$,

$$u=g(x), x\in E\text{，值域是 } D_u.$$

如果 D_u 包含在 D 内，即 E 中使 $g(x)\in D$ 的 x 的全体所构成的数集非空，若令 $E^*=\{x|g(x)\in D, x\in E\}\neq\varnothing$，那么对于 E^* 中的每一个值 x，通过函数 g 对应 D 中唯一的一个值 u，再通过函数 f 对应唯一确定的一个值 y，即对每一 $x\in E^*$，变量 y 都有一个确定的值与之相对应，这就是得到一个确定在集 E^* 上的函数，记作 $y=f(g(x))$，$x\in E^*$. 这个函数就称为由 f 和 g 经过复合运算得到的复合函数，其中 f 称为外函数，g 称为内函数，u 为中间变量.