概率论与数理统计

王展青　李寿贵　主　编

陈盛双　王志明
余新华　陈清平　副主编

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书讲述了概率论与数理统计的基本知识，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、线性回归分析与方差分析、SAS软件应用等. 各章都有适量例题及习题，并附有课外阅读材料，书末附有习题参考答案及各种统计表.

本书可作为工科院校概率论与数理统计课的教材，也可作为工科院校有关专业教师、学生及有关工程技术人员的参考书.

概率论与数理统计
王展青　李寿贵　主编
陈盛双　王志明　余新华　陈清平　副主编
责任编辑　王　军
科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
武汉大学出版社印刷总厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
2000年6月第一版　开本：850×1168　1/32
2000年6月第一次印刷　印张：12
印数：1～10 000　字数：314 000
ISBN 7-03-008497-7/O·1243
定价：15.00元

前　言

根据国家高等学校工科数学课程教学指导委员会1993年修订后的《概率论与数理统计课程教学基本要求》第Ⅱ类(概率少,统计多),我们联合编写了这本教材.本书可以作为工科院校大学生的概率论与数理统计教材,也可供工科院校有关专业教师、高年级学生及有关工程技术人员参考.

本书一、二、三章讲授概率论的基础知识,重要概念都是通过实际问题的直观要求引入的;第四、五、六、七章着重介绍数理统计中常用的方法及其应用,突出对数据信息进行合理分析、处理的思想;第八章通过实例介绍了统计数据分析软件SAS的使用方法.全书叙述力求通俗易懂,便于读者自学.各章末附有生动有趣的阅读材料及适量的练习题,书末附有习题参考答案和各种统计表.

本书由武汉汽车工业大学和武汉冶金科技大学联合编写,第一、二章由陈盛双编写;第三、八章由余新华编写;第四章由李寿贵编写;第五章由陈清平编写;第六章及大部分阅读材料由王展青编写;第七章由王志明编写,全书由王展青统稿、定稿.本书在编写过程中,得到了编者所在教研室全体教师的鼓励和支持,武汉汽车工业大学吴传生教授通读了全稿,并提出了一些宝贵建议,在此一并致谢.限于编者水平,书中一定有不妥或错误之处,恳请读者惠予批评指正.

编者

1999年10月

第一章　随机事件及其概率

在自然界和人们的实践活动中，所遇到的现象一般可分为两大类：

确定性现象　在一定的条件下，必然会出现某种确定的结果．例如，同性电荷一定相斥；上抛石子必定下落；导线通电后必定发热等都是确定性现象，确定性现象也称为必然现象．

随机现象　在一定的条件下，可能出现各种不同的结果，也就是说，在完全相同的条件下，进行一系列观测或实验，都未必出现相同的结果．例如，从一批灯泡中，任取一只测试寿命，这只灯泡的寿命可能小于 1 万小时，也可能大于或等于 1 万小时；投篮 10 次，可能投中 10 次，也可能投中 9 次、8 次……甚至一次也没投中．随机现象也称为偶然现象．

人们在大量的实践活动中发现，虽然事先不知道随机现象可能会出现哪一种结果，但对随机现象进行大量的重复试验，其结果却总能呈现出某种规律性，我们称这种规律性为统计规律性．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，它在自然科学、社会科学、工程技术、国民经济建设等各方面有着广泛的应用．

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，我们把各种科学试验和对某事物的观测统称为**试验**．如果试验具有以下特点：① 试验可以在相同条件下重复进行；② 每次试验的所有可能结果都是事先明

确可知的，且可能结果不止一个；③ 每次试验之前不能预知会出现哪一个结果，则称这种试验为**随机试验**. 本书以后提到的试验都是指随机试验.

请看以下一些试验.

试验 E_1：从一批产品中任取一件，观测它是否合格，可能结果是"合格"或"次品".

试验 E_2：抛一枚骰子，观察出现的点数，可能结果是 1,2,3,4,5,6.

试验 E_3：记录电话交换台 1 分钟内接到的呼唤次数，可能结果是 0,1,2,….

试验 E_4：在一批灯泡中任取一只测试它的寿命，可能结果是 $[0,+\infty)$.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是已知的. 我们将试验的每一个可能结果称为**样本点**，记作 $\omega_1,\omega_2,\cdots$，将试验的所有样本点所组成的集合称为**样本空间**，记作 Ω，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$$

下面写出上述 4 个试验 $E_k(k=1,2,3,4)$ 的样本空间 Ω_k：

$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中样本点 ω_1 表示"合格"，ω_2 表示"次品".

$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，其中样本点 ω_i 表示"抛一枚骰子出现的点数 i"$(i=1,2,3,4,5,6)$.

$\Omega_3=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$，其中样本点 ω_i 表示"1 分钟内接到 i 次呼唤"$(i=0,1,2,\cdots)$.

$\Omega_4=\{\omega_t \mid 0\leqslant t<+\infty\}$，其中样本点 ω_t 表示"该灯泡的寿命为 t"$(0\leqslant t<+\infty)$.

要注意的是，试验的样本空间是由试验的目的决定的. 例如，对照 E_2，若观察出现点数的奇偶性，用 ω_1 表示点数为奇数，用 ω_2

表示点数为偶数，则样本空间为 $\Omega_2'=\{\omega_1,\omega_2\}$.

1.1.3 随机事件

在进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，在试验 E_2 中，我们关心出现的点数是否为奇数，满足这一条件的样本点组成 Ω_2 的一个子集 $A=\{1,3,5\}$，我们称 A 为试验 E_2 的一个随机事件. 显然，当试验的结果为 A 中的一个样本点时，随机事件 A 就发生了.

一般地，我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**，简称事件，通常用 $A,B,C,\cdots$表示. 在每次试验中，当且仅当表示试验结果的样本点属于这一子集时，称这一**事件发生**了.

表示试验的任一结果的单个样本点 ω 也是随机事件，称为**基本事件**. 显然，基本事件就是样本空间的单点集.

如果每次试验中，某个事件一定发生，称此事件为**必然事件**. 显然，必然事件是由所有样本点所组成的集合，即等于样本空间，记作 Ω. 相反，如果每次试验中，某个事件一定不发生，称此事件为**不可能事件**. 显然，不可能事件不包含任何样本点，即等于空集，记作$\varnothing$.

下面给出试验 $E_k(k=1,2,3,4)$中的一些随机事件.

在试验 E_1 中，A 表示"取到的产品为合格品"，则 $A=\{\omega_1\}$是随机事件，且 A 是基本事件.

在试验 E_2 中，B_1 表示"点数为偶数"，B_2 表示"点数不超过3"，B_3 表示"点数小于 7"，则 B_1,B_2,B_3 都是随机事件，且 $B_1=\{2,4,6\}$，$B_2=\{1,2,3\}$，$B_3=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中 B_3 为必然事件.

在试验 E_3 中，C 表示"接到的呼唤次数大于 5"，则 $C=\{6,7,8,\cdots\}$是随机事件.

在试验 E_4 中，D 表示"寿命介于 9000～10000 小时"，则 $D=\{t\mid 9000\leqslant t\leqslant 10000\}$是随机事件.

1.2 事件的运算及关系

事件实际上就是一个集合，研究复杂事件的表示方法及相互关系是十分重要的. 事件的运算以及事件之间的关系可按照集合论中集合的关系和集合的运算来处理.

1.2.1 事件的运算

1. 事件的和

用 C 表示"两个事件 A 与 B 至少有一个发生"这一事件，称事件 C 为事件 A 与 B 的**和事件**，记作 $A\cup B$，即 $C=A\cup B$. 显然，

$$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生".

2. 事件的乘积

用 C 表示"两个事件 A 与 B 同时发生"这一事件，称 C 为事件 A 与 B 的**积事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB，即 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$. 显然，

$$A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$$

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ n 个事件同时发生"，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生".

3. 事件的差

用 C 表示"事件 A 发生但事件 B 不发生"这一事件，称事件 C 为事件 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$，即 $C=A-B$. 显然，

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}$$

1.2.2 事件的关系

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A \subset B$. 显然，

$$A \subset B \Leftrightarrow AB = A$$

这时，集合 A 的样本点一定属于集合 B.

2. 相等关系

若 A 发生一定导致 B 发生，同时，B 发生一定导致 A 发生，则称事件 A 与 B **相等**（或等价），记作 $A = B$. 显然，

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \quad 且 \quad B \subset A$$

这时，A 与 B 所包含的样本点相同.

3. 互不相容关系

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B **互不相容**（或互斥）. 显然，

$$A, B \text{ 互不相容} \Leftrightarrow AB = \varnothing$$

基本事件是两两互不相容的.

4. 对立关系

若事件 A，B 在一次试验中有且仅有一个发生，则称事件 A 与 B **相互对立**（或互为可逆）. 显然，

$$A \text{ 与 } B \text{ 相互对立} \Leftrightarrow AB = \varnothing \text{ 且 } A \cup B = \Omega$$

也称事件 B 是事件 A 的**对立事件**（或逆事件）；同样，事件 A 也是事件 B 的对立事件，记作 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$. 显然，

$$\overline{A} = \Omega - A$$

事件的相互对立关系可推广到多个事件的情形：若 n 个事件

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 在一次试验中有且仅有一个发生，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互对立，也称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为**完备事件组**. 显然，

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 为完备事件组} \Leftrightarrow$$

① $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing \quad (1\leqslant i<j\leqslant n)$

② $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

所以，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 也称为样本空间 Ω 的一个**划分**. 样本空间中所有基本事件构成一个完备事件组.

概率论中随机事件的关系与运算表示对照到集合论中的表述列于表 1.1.

表 1.1 概率论与集合论中的表述对照

概率论	集合论	概率论	集合论
样本空间	全集	事件的和	集合的并
随机事件	子集	事件的乘积	集合的交
必然事件	全集	事件的差	集合的差
不可能事件	空集	互不相容	互不相交
事件包含关系	集合包含关系	对立事件	补集
事件相等	集合相等	完备事件组	集合的划分

事件的关系及运算可用集合论的文氏图直观表示(图 1.1).

1.2.3 事件运算的性质

由上述讨论可知，事件的关系及运算与集合的关系及运算具有类似的性质.

设 A, B, C 为事件，则有：

交换律 $A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

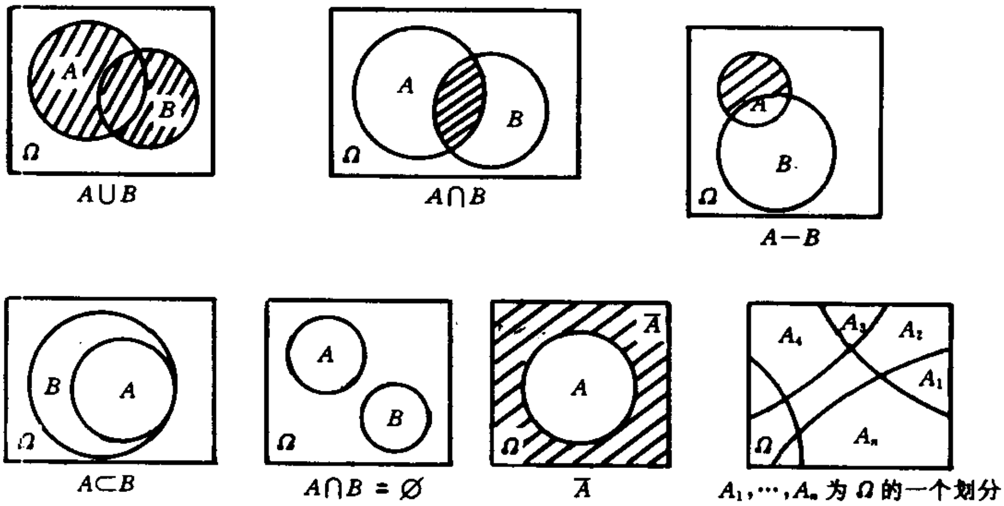

图 1.1

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

德摩根律(对偶原则) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

将分配律推广,则有:

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i)$$

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$$

将德摩根律推广,则有:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

例 1.1　图 1.2 所示的电路中,设事件 A,B,C 分别表示继电器接点 a,b,c 闭合,试用 A,B,C 表示下列事件:

A_1 表示"指示灯亮"

A_2 表示"指示灯不亮"

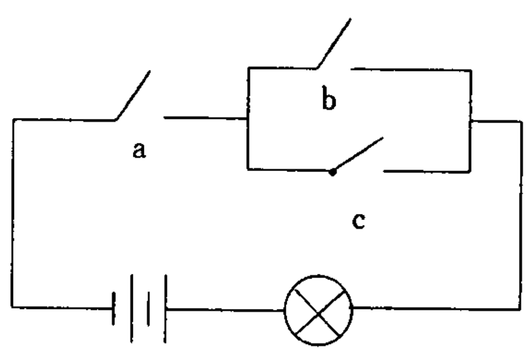

图 1.2

解　因为当且仅当接点 a 闭合而接点 b 及 c 中至少有一个闭

合时，指示灯亮，所以，有

$$A_1=A(B\cup C)$$

当"接点 a 未闭合"与"接点 b，c 都未闭合"二事件中至少有一事件发生时，指示灯不亮，所以，有

$$A_2=\overline{A}\cup(\overline{B}\overline{C})$$

显然，有

$$\overline{A}_1=A_2$$

即

$$A_2=\overline{A(B\cup C)}=\overline{A}\cup(\overline{B\cup C})=\overline{A}\cup(\overline{B}\overline{C})$$

例 1.2 甲、乙、丙三人同时向一目标各射击一次，分别用 A_1，A_2，A_3 表示三人各自击中目标，若目标至少被两人击中，则一定被摧毁，试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

B_1 表示"至少有一人击中目标"

B_2 表示"甲与乙击中，丙没有击中"

B_3 表示"目标被击中一次"

B_4 表示"目标被摧毁"

解 $B_1=A_1\cup A_2\cup A_3$

$B_2=A_1A_2\overline{A}_3$

$B_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

$B_4=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$

请读者思考事件 B_1，B_2，B_3，B_4 之间的关系.

1.3 概率的定义

随机事件在一次试验中可能出现，也可能不出现，似乎是不可捉摸的. 其实不然，人们在大量的重复试验中发现：随机事件出现

的可能性大小是能够计量的，表征随机事件出现的可能性大小的数称为它发生的概率. 本节中，我们将先给出一些简单试验中事件发生概率的计算方法，然后以随机事件的频率为依据，给出概率的数学定义，并由此导出概率的运算性质.

1.3.1 古典概率

现在来讨论一类比较简单的随机试验，它有下述两个特征.

(1) 有限性：样本空间只有有限个样本点，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

(2) 等可能性：每次试验中，各基本事件出现的可能性相等.

具有上述特征的概率模型称为**古典概型**，在概率论发展的历史上，首先研究的就是这类问题.

在古典概型中，若事件 A 包含了 r 个不同样本点，则**规定** A 的概率为

$$P(A)=\frac{r}{n} \tag{1-1}$$

这种概率定义称为**概率的古典定义**. 按等可能性的假定容易理解上述定义的合理性.

例如，抛一枚硬币，出现正面或反面的概率都是$\frac{1}{2}$.

例 1.3 掷一颗均匀对称的骰子，观察出现的点数. 计算下列事件的概率：

A"出现奇数"

B"出现的点数小于 5"

解 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 由于骰子是均匀对称的，因而出现每个点数的可能性相同，故此试验可看作古典概型，$n=6$.

$$A=\{1,3,5\} \qquad P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$B=\{1,2,3,4\} \qquad P(B)=\frac{r}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

需要注意的是:① 等可能性仅仅是一种假设,需要根据实际问题判断,一般若没有任何理由认为一个基本事件比另一个基本事件更容易出现,则将这些基本事件看做是等可能的. ② 有时样本空间元素太多或不易给出,此时可用计数原理及排列组合知识计算样本点总数及 A 中所含样本点数.

例 1.4 从 0,1,2,3 这 4 个数中任取 3 个不同的数字进行排列,求排成的数是三位数且是偶数的概率.

解 用 A 表示"排成的数是三位数且是偶数". 由于取到 0,1,2,3 中任何 4 个不同数字的可能性都相同,故此问题属于古典概型. 样本点总数

$$n=4\times3\times2=24$$

事件 A 中的样本点可分为两类:一类表示排成的三位数个位数为 0,另一类表示个位数为 2. 注意 3 个数字要构成一个三位数,排在最左边的数字不能为 0,由此可算得 A 中包含的样本点数为 $r=3\times2+2\times2=10$,所以 A 的概率为

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

例 1.5 箱中有 100 件外形一样的同批产品,其中正品 60 件,次品 40 件,现按下列两种方法抽取产品:① 每次任取一件,经观察后放回箱中,再任取下一件,这种抽取方法称为有放回抽样;② 每次任取一件,经观察后不放回,在剩下的产品中再任取一件,这种抽取方法称为无放回抽样. 试求从上述 100 件产品中任意抽取 3 件,其中有 2 件次品的概率.

解 ① 有放回抽样,此时,样本点总数 $n=100^3$. 设 A 表示"3 件中有 2 件次品",则任取 3 件中有 2 件次品所有可能的取法为 C_3^2 种;而 2 件次品是从 40 件次品中任意取出的,可能的取法有 40^2 种;另一件正品是从 60 件正品中任意抽取的,有 60 种取法. 依照排列组合中的乘法原理,A 所含样本点数为 $r=C_3^2\times40^2\times60$,故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60}{100^3}=0.288$$

② 无放回抽样，此时样本点总数为

$$n=100\times 99\times 98$$

A 中所含样本点数为 $r=C_3^2\times 40\times 39\times 60$，故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_3^2\times 40\times 39\times 60}{100\times 99\times 98}=0.289$$

一般来说，采用有放回抽样或无放回抽样计算事件的概率时，结果是不一样的. 特别，当被抽取对象的数目较少时，差异会更大；但当被抽取对象的数目较大，而抽取的数目又较少时，在这两种抽样方式下所计算的概率数值将相差不大，本例的计算结果正是这样.

将本例推广到一般情形是：设一批产品共 N 件，其中有 M 件次品，从这批产品中随机抽取 n 件样品，则：

(1) 在放回抽样的方式下，取出的 n 件样品中恰有 m 件次品(设为事件 A_1)的概率为

$$P(A_1)=\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$
$$=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

记 $p=\frac{M}{N}$，$q=1-p$，则 p 为次品率，q 为正品率，

$$P(A_1)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

(2) 在无放回抽样的方式下，取出 n 件样品中恰有 m 件次品(设为事件 A_2)的概率为

$$P(A_2)=\frac{C_n^m C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

请读者思考：从一批产品中“无放回地依次抽取 n 件样品”与“一次抽取 n 件样品”这两种抽样方式为什么实质上是相同的？

例 1.6 袋内有 a 个白球、b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回去，接连取 k 个球($k\leqslant a+b$)，求第 k 次取得白球的概率？

解 由于考虑到取球的顺序，这相当于从 $a+b$ 个球中任取 k 个球的排列，所以样本点的总数为

$$n=A_{a+b}^{k}=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设 B_k 表示“第 k 次取得白球”，则因为第 k 次取得的白球可以是 a 个白球中的任一个，有 a 种取法，其余 $k-1$ 个球可在前 $k-1$ 次中顺次地从 $a+b-1$ 个球中任意取出，有 A_{a+b-1}^{k-1} 种取法，所以，事件 B_k 所含样本点数为

$$r=aA_{a+b-1}^{k-1}=(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)\cdot a$$

因此，所求概率为

$$P(B_k)=\frac{(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)\cdot a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

此题有多种解法，请读者思考. 值得注意的是，这个结果与 k 值无关. 这表明无论哪一次取得白球的概率都是一样的，或者说，取得白球的概率与先后次序无关.

1.3.2 几何概率

概率的古典定义是在假设试验的基本事件只有有限个且出现的可能性相等的情形下给出的. 对于试验的基本事件为无穷多个的情形，概率的古典定义并不适用. 对于无穷多种试验结果，如果直观上的等可能性仍旧成立，那么，可以仿照古典概率定义进行讨论.

例 1.7 设一粒子位于容积为 V 的容器内各点处的可能性相

同，用 A 表示"这粒子位于容器内体积为 v 的一个指定的部分区域 D 内"，求 $P(A)$.

解 由题设"这粒子位于容器内各点处的可能性相同"可知，$P(A)$应与 D 的体积 v 成正比，且当 $v=V$ 时，$P(A)=1$. 所以

$$P(A)=\frac{v}{V}=\frac{\text{区域 } D \text{ 的体积}}{\text{容器的体积}}$$

上述例子具有一般性. 如果能够以直观上的等可能性为基础，借助于几何上的度量（长度、面积、体积等）来合理地规定概率，按这种方法计算得到的概率称为**几何概率**.

例 1.8 甲、乙两人相约在某一段时间 T 内在预定地点会面，先到的人应等候另一人，经过时间 $t(t<T)$后方可离开，求甲、乙两人会面的概率. 假定他们在时间 T 内的任一时刻到达预定地点是等可能的.

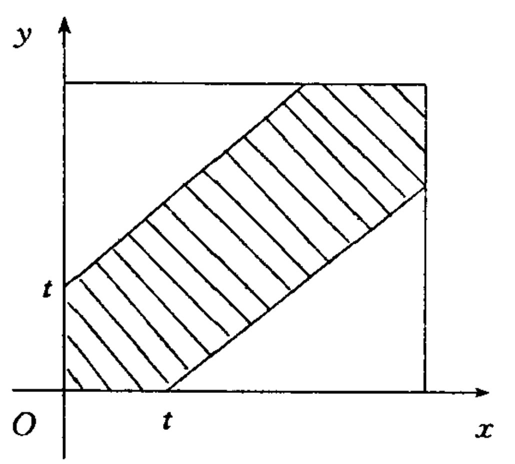

图 1.3

解 设甲、乙两人在时间 T 内到达预定地点的时刻分别为 x 及 y，则它们可以取区间$[0,T]$内任一值，即

$$0\leqslant x\leqslant T \qquad 0\leqslant y\leqslant T$$

而两人会面的充要条件是：$|x-y|\leqslant t$. 我们把 x 及 y 表为平面上一点的直角坐标，则所有基本事件可以用这个正方形内介于两直线 $x-y=\pm t$ 之间的区域（图 1.3 的阴影部分）内的点表示. 因此，所求概率等于阴影部分的面积与正方形面积的比，即

$$P=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

当 $T=60$，$t=20$ 时，$P=\frac{5}{9}$.

1.3.3 统计概率

古典概率及几何概率都是以等可能性为基础的. 对于一般的随机试验,当然不一定存在这样的等可能性. 那么,在一般情形下,是否可用一个确定的并且是唯一的一个数来计量随机事件出现的可能性大小呢?为了回答这个问题,我们先来研究随机事件的频率问题.

设 A 为试验 E 中的一个随机事件,将 E 重复 n 次,A 发生 n_A 次,称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件 A 的**频率**.

由于事件 A 的概率 $P(A)$是 A 发生的可能性大小的度量,不难理解,若 $P(A)$较大,则在 n 次重复试验中,$f_n(A)$应较大;若 $P(A)$较小,则 $f_n(A)$也应较小. 反之,若 $f_n(A)$较大,则说明 A 有较大的可能性出现,即 $P(A)$应较大;若 $f_n(A)$较小,则 $P(A)$同样应较小. 人们通过实践还发现,事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率 $f_n(A)$随着试验次数的增加而具有稳定性. 例如,历史上有不少人做过掷一枚均匀硬币的试验,其结果如表 1.2 所示.

表 1.2 投掷硬币试验结果

试验者	投掷次数 n	正面出现次数 k	频率 $f_n(A)$
Buffon	4 040	2 048	0.5069
Fisher	10 000	4 978	0.4979
Pearon	12 000	6 019	0.5016
Pearon	24 000	12 012	0.5005

试验结果表明,随着投掷次数的增加,出现正面的频率 $f_n(A)$就稳定在数值$\frac{1}{2}$附近,事件的频率的稳定性不断为实践所证实.

综上所述,可见事件的频率是该事件的概率的一个近似值,统计概率的定义就是根据这一事实提出的. 它把事件 A 的频率的稳定值 p 作为事件 A 出现的可能性的度量,即称