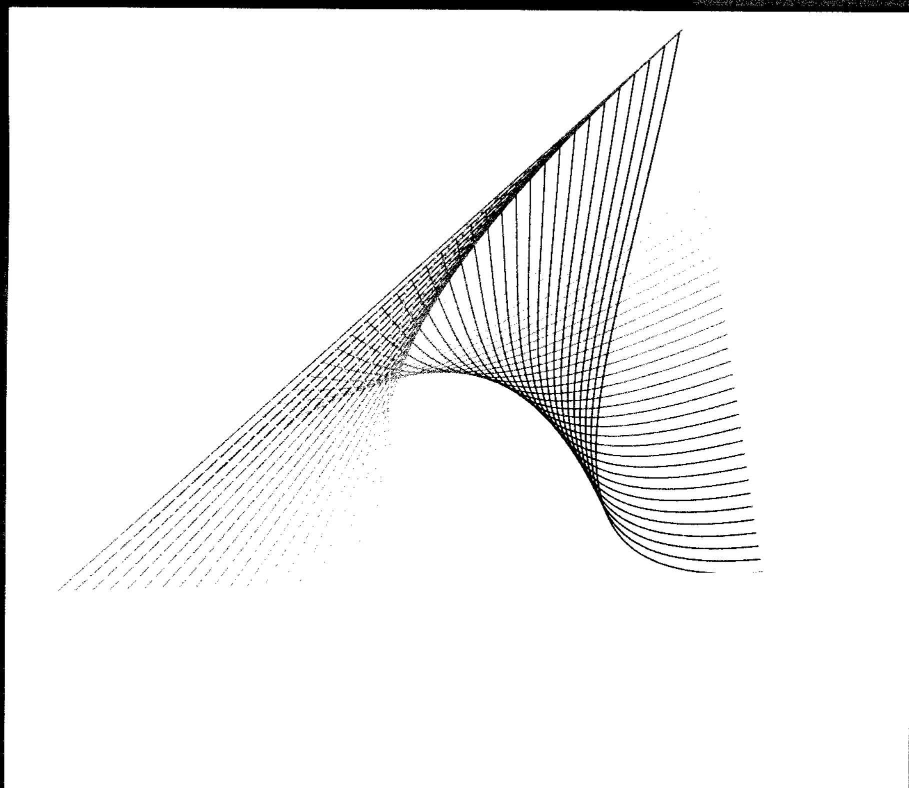
1

基于MATLAB的系统分析与设计

——信号处理



西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

MATLAB的推出得到了各个领域专家学者的广泛关注，其强大的扩展功能为用户提供了强有力的支持。

本书针对应用广泛的信号处理领域，简要介绍了信号处理的基本概念和基本方法，详细介绍了由MATLAB提供的信号处理工具箱函数的用法指南，最后以大量的应用示例，说明了基于MATLAB进行信号处理系统分析与设计的方法。

本书可作为信号处理、数字信号处理等课程的参考书，对课程学习可起到事半功倍的效果。对信号处理领域的教师、研究生、高年级本科生和广大科研人员都有重要的参考价值，对其它领域的科研人员也有一定的借鉴作用。

基于MATLAB的系统分析与设计
——信号处理
楼顺天　李博菡　编著
责任编辑　毛红兵　马继红
出版发行　西安电子科技大学出版社出版
（西安市太白南路2号）
邮　　编　710071
电　　话　(029)8227828
经　　销　新华书店
印　　刷　西安市秦群印刷厂
版　　次　1998年9月第1版
1998年9月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张 18.5
字　　数　437千字
印　　数　1～4 000册
定　　价　24.00元
ISBN 7-5606-0634-2/TP·0319

前言

MATLAB[R]是MathWorks公司于1982年推出的一套高性能的数值计算和可视化软件，它集数值分析、矩阵运算、信号处理和图形显示于一体，构成了一个方便的、界面友好的用户环境。MATLAB的推出得到了各个领域专家学者的广泛关注，其强大的扩展功能为各个领域的应用提供了基础。由各个领域的专家学者相继推出了MATLAB工具箱，其中主要有信号处理(signal processing)，控制系统(control system)，神经网络(neural network)，图像处理(image processing)，鲁棒控制(robust control)，非线性系统控制设计(nonlinear control system design)，系统辨识(system identification)，最优化(optimisation)，μ分析与综合(μ analysis and synthesis)，模糊逻辑(fuzzy logic)，小波(wavelet)，样条(spline)等工具箱，而且工具箱还在不断增加，这些工具箱给各个领域的研究和工程应用提供了有力的工具。借画于这些“巨人肩上的工具”，各个层次的研究人员可直观、方便地进行分析、计算及设计工作，从而大大地节省了时间。

由我们编写的《MATLAB程序设计语言》(西安电子科技大学出版社出版)受到了读者的一致好评，它从程序设计的角度出发，深入浅出地叙述了MATLAB的方方面面，是初学者的入门教材。在此基础上，我们又编写了更深层次的《基于MATLAB的系统分析与设计》系列图书，希望能给读者以帮助。

针对应用广泛的信号处理、控制系统和具有应用前景且被广为关注的神经网络这三个工具箱函数，我们编写了系列图书中的三本，除了详细介绍各个工具箱函数之外，简要介绍各领域的基本理论，着重介绍利用MATLAB对系统进行分析与设计的实例，因此，对这三个领域的教师、研究生、高年级本科生和广大科研人员都有重要的参考价值。

本书为信号处理部分，全书分三章。第1章简要介绍信号处理的基本理论，它对信号处理领域中的信号表示形式、离散傅里叶分析和变换、Z变换、数字滤波器结构及滤波器设

计等内容作简要介绍。第 2 章详细叙述了 MATLAB 的信号处理工具箱函数。第 3 章以大量的应用示例，说明如何利用 MATLAB 进行信号处理的分析与设计。

为了查阅方便，本书最后给出了两个具有重要参考价值的附录。附录 A 分类列出了 MATLAB 的基本命令及函数；附录 B 给出了部分重要工具箱中所包含的实用函数及其功能。另外，在第 2 章的前面，列出了本工具箱函数的索引，以方便读者查阅。

本书的出版得到了 MathWorks 公司的认可，有关购买 MATLAB 和 SIMULINK 软件及其它业务可直接与 MathWorks 公司联系：

The MathWorks, Inc.
24 Prime Park Way
Natick, MA 01760 - 1500
Phone：(500)647 - 7000
Fax：(508)647 - 7001
E-mail：info@mathworks. com
WWW：http：//www. mathworks. com

本书在构思过程中得到了戴树荪教授的指点，陈怀琛教授为本书提供了非常有用的参考资料，在此深表谢意。本书的出版得到了西安电子科技大学出版社的大力支持，特别是毛红兵和马继红同志对本书进行了细致的编辑，做了大量的工作，在此深表谢意！

为获得本书的源程序，可通过下列 Email 地址与作者联系：
shtlou@xidian. edu. cn

楼顺天
1998 年 6 月 10 日

符号说明

由于本书涉及到大量的计算机程序，而程序中无法输入斜体和希文字母，因此为统一起见，本书中使用的符号均为正体；程序中采用国际上惯用的像形符号，例如在叙述中使用的符号 ω，在程序中用 w(或 W)代替；叙述中使用的带上下标符号如 a_1，ω_s，ω_p，F_s，T_s 等，在程序中用 a1，Ws，Wp，Fs，Ts 等代替。

目 录

第1章

信号处理基本理论

在这一章中，简要地介绍信号、系统、傅里叶分析与变换、Z变换、滤波器结构及滤波器设计等内容。在第3章的相应节中，给出了利用MATLAB进行分析与设计的示例。

1.1 离散信号与系统

在数字信号处理(DSP)中，所有的信号都是离散(时间)信号，因此首先应解决在MATLAB中如何表示离散信号。

设一模拟信号经A/D变换后，得到序列信号

$$x(n) = \{x(n)\} = \{\cdots, x(-1), x(0), x(1), \cdots\}$$

由于MATLAB对下标的约定为从1开始递增，因此要表示x(n)，一般应采用两个矢量，如

$$n = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$$

$$y = [1, -1, 3, 2, 0, 4, 5, 2, 1]$$

这表示了一个含9个采样点的矢量：y(n)={x(−3)，x(−2)，x(−1)，x(0)，x(2)，…，x(5)}。

通常情况下，序列值从x(0)开始，因此一个N点序列x(n)={x(0)，x(2)，…，x(N−1)可简单地表示成

$$y = [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]$$

这时y的下标为1～N。

1.1.1 基本信号表示

1. 单位取样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

这一函数可利用MATLAB的zeros函数实现：

```
x=zeros(1, N);
x(1)=1;
```

还可以借助于关系操作符实现：

```
n=1:N;
x=[n==1];
```

如要产生

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}0 & n_1\leqslant n<n_0\\ 1 & n=n_0\\ 0 & n_0<n\leqslant n_2\end{cases}\qquad (n_1<n_2)$$

则可采用 MATLAB 实现：

```
n=n1:n2;
x=[(n-n0)==0];
```

2. *单位阶跃序列*

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

这一函数可利用 MATLAB 的 ones 函数实现：

```
x=ones(1, N);
```

还可借助于关系操作符“>=”来实现。如要产生在 $n_1\leqslant n_0\leqslant n_2$ 上的单位阶跃序列

$$u(n-n_0)=\begin{cases}1 & n\geqslant n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$

则可采用 MATLAB 实现：

```
n=n1:n2;
x=[(n-n0)>=0];
```

3. *实指数序列*

$$x(n)=a^n\qquad \forall\, n;\ a\in R$$

采用 MATLAB 实现：

```
n=0:N-1;
x=a.^n;
```

4. *复指数序列*

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}\qquad \forall\, n$$

采用 MATLAB 实现：

```
n=0:N-1;
x=exp((lu+j*w0)*n);
```

5. *正(余)弦序列*

$$x(n)=\cos(\omega_0 n+\theta)\qquad \forall\, n$$

采用 MATLAB 实现：

```
n=0:N-1;
```

```
x=cos(w0*n+Q);
```

6. 随机序列

MATLAB 中提供了两类(伪)随机信号：

rand(1，N)产生[0，1]上均匀分布的随机矢量；

randn(1，N)产生均值为 0，方差为 1 的高斯随机序列，也就是白噪声序列。其它分布的随机数可通过上述随机数的变换而产生。

7. 周期序列

$$x(n) = x(n+N) \qquad \forall\ n$$

例如，设 x_1 表示 x 序列中一个周期的序列，要产生 4 个周期的 x 序列，用 MATLAB 实现：

```
x=[x1 x1 x1 x1];
```

1.1.2 序列操作

1. 信号加

$$x(n) = \{x_1(n) + x_2(n)\}$$

采用 MATLAB 实现：

```
x=x1+x2;
```

注意，当 x_1 和 x_2 序列的长度不等或其位置不对应时，信号相加就不是这么简单。首先应使 x_1、x_2 具有相等的长度，然后两者对齐，最后进行相加。

2. 信号乘

$$x(n) = \{x_1(n)x_2(n)\}$$

这是一种样本对样本的相乘，也即点乘运算，在 MATLAB 中可采用 .*(数组乘法)来实现，但两序列 x_1、x_2 也应经过处理。

3. 改变比例

$$y(n) = \alpha\{x(n)\} = \{\alpha x(n)\}$$

采用 MATLAB 实现：

```
y=alpha*x;
```

4. 移位

$$y(n) = \{x(n-k)\}$$

5. 折叠

$$y(n) = \{x(-n)\}$$

它将序列 x(n)在 n=0 处倒转，在 MATLAB 中可直接用 fliplr 函数实现。

6. 取样和

$$y = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

它不同于信号加。采用 MATLAB 实现：

```
y=sum(x(n1:n2));
```

7. 取样积

$$y = \prod_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

采用 MATLAB 实现：

```
y=prod(x(n1:n2));
```

8. 信号能量

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

“*”表示复共轭。计算一有限长序列 x 的能量 E_x，在 MATLAB 中可有两种方法实现：

```
Ex=sum(x.*conj(x));
Ex=sum(abs(x).^2));
```

9. 信号功率

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

采用 MATLAB 实现：

```
Px=sum(abs(x).^2)/N;
```

1.1.3 一些重要结论

1. 单位取样综合

任何一个序列 x(n)都可由单位取样的加权和得到，即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

2. 奇偶综合

任何一个序列 x(n)都可分解成偶对称部分 $x_e(n)$和奇对称部分 $x_o(n)$，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中 $x_e(n)=\frac{1}{2}\{x(n)+x(-n)\}$

$x_o(n)=\frac{1}{2}\{x(n)-x(-n)\}$

这样我们可设计一函数 evenodd，完成将任一给定序列 x(n)分解成 $x_e(n)$和 $x_o(n)$，详见第 3 章。

3. 几何序列

$$x(n) = \alpha^n \qquad n \geqslant 0$$

对此有结论：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \qquad \forall\ \alpha$$

4. 序列相关

两序列 x(n)和 y(n)的相似程度由相关性决定

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

当 y(n)=x(n)时，即可求出自相关

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$$

1.1.4 离散系统

最重要的是线性时不变系统。线性时不变系统的输入输出关系可通过冲激响应 h(n)表示

$$y(n) = x(n)\circledast h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

其中$\circledast$表示卷积运算，MATLAB 提供了求卷积函数 conv。

线性时不变系统中涉及两个重要概念：稳定性和因果性。这些内容可参看 DSP 的经典教材。

1.1.5 卷积

求卷积

$$y(n) = x(n)\circledast h(n) = \sum_{k=0}^{N} x(k)h(n-k)$$

可直接采用 MATLAB 中的函数 conv，即

y=conv(x，h)；

它默认序列从 n=0 开始。但如果序列是从一负值开始，即如

$$\{x(n):n_{xb} \leqslant n \leqslant n_{xe}\}$$
$$\{h(n):n_{hb} \leqslant n \leqslant n_{he}\}$$

其中 $n_{xb}<0$ 或 $n_{hb}<0$，或两者同时为负，这样就不能直接采用 conv 函数。通过分析，其卷积结果序列为

$$\{y(n):n_{yb} \leqslant n \leqslant n_{ye}\}$$

且

$$n_{yb} = n_{xb} + n_{hb}$$
$$n_{ye} = n_{xe} + n_{he}$$

这样我们就可构成一新的卷积函数 con_m，它可求出带下标的序列卷积，详见第 3 章。

1.2 离散时间傅里叶分析

线性时不变系统可用单位冲激响应 h(n)表示，其输入输出之间的关系可用卷积来表示

$$y(n) = h(n) \circledast x(n)$$

1.2.1 离散时间傅里叶变换(DFT)

设序列 x(n)绝对可和，即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$，则 x(n) 的离散时间傅里叶变换(DFT)为

$$X(e^{j\omega}) \triangleq \mathscr{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$的逆离散时间傅里叶变换(IDFT)为

$$x(n) \triangleq \mathscr{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$X(e^{j\omega})$为一周期序列，周期为 2π，即

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

因此，在分析序列 x(n)时，只需要得到一个周期的 $X(e^{j\omega})$（一般 $\omega \in [0, 2\pi]$，或 $\omega \in [-\pi, \pi]$）。对实序列 x(n)，其 $X(e^{j\omega})$为共轭对称

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

或者可表示成

$$\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

$$\angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega})$$

这说明在绘制 $X(e^{j\omega})$曲线时，只需要绘出半个周期的曲线，一般选 $\omega \in [0, \pi]$。

1.2.2 DFT 特性

上面已提到 $X(e^{j\omega})$的两个重要特性：周期性和对称性。这里讨论 $X(e^{j\omega})$的其它特性。

1. 线性

$$\mathscr{F}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha\mathscr{F}[x_1(n)] + \beta\mathscr{F}[x_2(n)]$$

2. 时域移位

$$\mathscr{F}[x(n-k)] = X(e^{j\omega}) e^{-j\omega k}$$

3. 频域移位

$$\mathscr{F}[x(n) e^{j\omega_0 n}] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4. 复共轭

$$\mathscr{F}[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

5. 折叠

$$\mathscr{F}[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

6. 实序列对称性

实序列 x(n)可分解成奇偶部分

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

则有

$$\mathscr{F}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$
$$\mathscr{F}[x_o(n)] = j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

7. 序列卷积

$$\mathscr{F}[x_1(n) \circledast x_2(n)] = \mathscr{F}[x_1(n)]\mathscr{F}[x_2(n)] = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

8. 序列乘积

$$\mathscr{F}[x_1(n)x_2(n)] = \mathscr{F}[x_1(n)] \circledast \mathscr{F}[x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}\int X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

9. 能量

序列 x(n)的能量 E_x 可写成

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{|X(e^{j\omega})|^2}{\pi}\,d\omega$$

这就是 Parseval 定理。由此可得到序列 x(n)的能量谱密度

$$\Phi_x(\omega) \triangleq \frac{1}{\pi}|X(e^{j\omega})|^2$$

这样，信号 x(n)在$[\omega_1, \omega_2]$频带内的能量为

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_x(\omega)d\omega \quad 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 \leqslant \pi$$

1.2.3 LTI 系统频域表示

任意线性时不变系统(LTI 系统)都可由冲激响应 h(n)来表示，相应地在频域中可用频率响应 $H(e^{j\omega})$来表示，它是 h(n)的离散傅里叶变换，即

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

这样对任一输入序列 x(n)，其输出 y(n)可表示为

$$y(n) = x(n) \circledast h(n)$$

在频域可表示成简单的关系

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

由差分方程表示的 LTI 系统

$$y(n) + \sum_{l=1}^{N} a_l y(n-l) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

其频域传递函数可通过输入 $x(n)=e^{j\omega n}$时，$y(n)=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$求出

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m}}{1 + \sum_{l=1}^{N} a_l e^{-j\omega l}}$$

如果在$[0, \pi]$等间隔分成 k=0，1，…，K，则有

$$H(e^{j\omega_k}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega_k m}}{1 + \sum_{l=1}^{N} a_l e^{-j\omega_k l}} \qquad k = 0, 1, \cdots, K$$

这样，记矢量 $b=\{b_m\}$，$a=\{a_l\}(a_0=1)$，$m=\{0, 1, \cdots, M\}$，$l=\{0, 1, \cdots, N\}$，$\omega=\{\omega_1\ \omega_2 \cdots\ \omega_K\}$，则上式可在 MATLAB 中实现：

```
H=b*exp(-j*m'*w)./(a*exp(-j*l'*w));
```

1.2.4 模拟信号的取样和重构

模拟信号经取样后可得到数字信号，数字信号经处理后要经过重构再现模拟信号。

1. 取样

任何绝对可积信号 $x_a(t)$，其连续时间傅里叶变换为

$$X_a(j\Omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

其中 Ω 为模拟频率，其逆变换为

$$x_a(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

以时间间隔 T_s 对 $x_a(t)$ 进行取样，可得

$$x(n) = x_a(nT_s)$$

其 DFT 记为 $X(e^{j\omega})$，则有关系

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left[j\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi}{T_s}l\right)\right]$$

这就是混叠方程。模拟频率 Ω 与数字频率 ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega T_s$$

取样频率 F_s 为

$$F_s = \frac{1}{T_s}$$

对带限信号 $x(t)$，即 $X(e^{j\omega})$ 满足

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) \qquad -\frac{\pi}{T_s} < \frac{\omega}{T_s} \leqslant \frac{\pi}{T_s}$$

时，有一个重要的取样定理。

定理 1.1（取样定理） 设 $x_a(t)$ 为带限信号，带宽为 F_0，则当采样频率 $F_s > 2F_0$ 时，可从取样序列 $x(n)=x_a(nT_s)$ 中重构 $x_a(t)$，否则将导致 $x(n)$ 的混叠现象。带限信号的 $2F_0$ 的取样率称为 Nyquist（奈奎斯特）速率。

2. 重构

从取样信号 $x(n)$ 重构原信号 $x_a(t)$ 是一个重要的问题。理想情况下，序列经 $F_s > F_0$（奈奎斯特速率）采样处理后，经理想的低通滤波器（截止频率为 F_s）后，可重构出 $x_a(t)$。

这时采用的内插公式为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,\mathrm{sinc}[F_s(t-nT_s)]$$

但由于它是非因果序列，所以也是不可实现的。因此采用以下几种方法：

- 零阶保持内插：使取样值在一个取样间隔内保持不变，这种滤波器的冲激响应为

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t \leqslant T_s \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 一阶保持内插：相邻取样之间连成直线，这一滤波器的冲激响应为

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t}{T} & 0 \leqslant t \leqslant T_s \\ 1 - \dfrac{t}{T} & T_s \leqslant t \leqslant 2T_s \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 三次样条内插：

$$x_a(t) = \alpha_0(n) + \alpha_1(n)(t-nT_s) + \alpha_2(n)(t-nT_s)^2 + \alpha_3(n)(t-nT_s)^3$$
$$nT_s \leqslant n < (n+1)T_s$$

其中$\{\alpha_i(n),\ 0 \leqslant i \leqslant 3\}$为多项式系数，它可采用最小二乘法得到。

1.3 Z 变 换

1.3.1 双边 Z 变换

序列 x(n)的 Z 变换定义为

$$X(z) \triangleq \mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

其中 z 为复变量。X(z)存在 z 的集合称为收敛域(ROC)，一般为

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

X(z)的逆 Z 变换定义为

$$x(n) \triangleq \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

其中 C 为 ROC 中包含原点的逆时针围线。

由于 ROC 是由$|z|$定义的，因此 ROC 一般为环形，R_{x-}可等于零，R_{x+}可为$+\infty$。当$R_{x+}<R_{x-}$时，ROC 为空，故 Z 变换不存在。

$|z|=1$(或 $z=e^{j\omega}$)称为 z 平面上的单位圆，当 ROC 包含单位圆时，则可在单位圆上计算 X(z)，实际上它就是傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \mathscr{F}[x(n)]$$

因此，DFT 可看作 Z 变换的特殊情况。

在 Z 变换中，ROC 是它的一个重要特性，序列 Z 变换的 ROC 具有一些特点：

(1) ROC 的边界是圆；

(2) 右边序列的 ROC 为 $|z|>R_{x-}$；

(3) 左边序列的 ROC 为 $|z|<R_{x+}$；

(4) 双边带序列的 ROC 为 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$（要是存在的话）；

(5) 序列 x(n)

$$x(n)=\begin{cases}x_n & n_1 \leqslant n < n_2 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称为有限长序列，其 ROC 为整个 z 平面；

(6) ROC 中不包含极点，即以极点为界；

(7) ROC 为一连续区域。

1.3.2 Z 变换重要特性

Z 变换的特性是傅里叶变换的推广。

1. 线性

$$\mathscr{Z}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \qquad \text{ROC: } \text{ROC}_{x_1}\cap \text{ROC}_{x_2}$$

2. 取样移位

$$\mathscr{Z}[x(n-n_0)]=z^{-n_0}X(z) \qquad \text{ROC: ROC}_x$$

3. 频率移位

$$\mathscr{Z}[a^nx(n)]=X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \text{ROC: ROC}_x/|a|$$

4. 折叠

$$\mathscr{Z}[x(-n)]=X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{ROC: 与 ROC}_x\text{ 相反，即 ROC}_x\text{ 的逆}$$

5. 复共轭

$$\mathscr{Z}[x^*(n)]=X^*(z^*) \qquad \text{ROC: ROC}_x$$

6. z 域微分

$$\mathscr{Z}[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC: ROC}_x$$

7. 序列相乘

$$\mathscr{Z}[x_1(n)x_2(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad \text{ROC: ROC}_{x_1}\cap \text{ROC}_{x_2}\text{ 的逆}$$

其中 C 为公共 ROC 中包围原点的闭合围线。

8. 序列卷积

$$\mathscr{Z}[x_1(n)\circledast x_2(n)]=X_1(z)X_2(z) \qquad \text{ROC: ROC}_{x_1}\cap \text{ROC}_{x_2}$$

表 1.1 中给出一些常见序列的 Z 变换。

表 1.1　常见序列的 Z 变换

序　　列	Z　变　换	收　敛　域(ROC)
$\delta(n)$	1	$0\leqslant\vert z\vert\leqslant\infty$
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\vert a\vert<\vert z\vert\leqslant\infty$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\vert z\vert<\vert a\vert$
$nu(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\vert a\vert<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^4}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\dfrac{z^3}{(z-a)^3}$	$\vert a\vert<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$	$\dfrac{z^4}{(z-a)^4}$	$\vert a\vert<\vert z\vert\leqslant\infty$
$R_N(n)$	$\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$0<\vert z\vert\leqslant\infty$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$	$1<\vert z\vert\leqslant\infty$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^2-\cos(\omega_0)z}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$	$1<z\leqslant\infty$
$e^{-an}\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{e^{-a}\sin(\omega_0)z}{z^2-2e^{-a}\cos(\omega_0)z+e^{-2a}}$	$e^{-a}<\vert z\vert\leqslant\infty$
$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^2-e^{-a}\cos(\omega_0)z}{z^2-2e^{-a}\cos(\omega_0)z+e^{-2a}}$	$e^{-a}<\vert z\vert\leqslant\infty$

1.3.3　逆 Z 变换

计算逆 Z 变换需计算复围线积分，这是一个复杂的过程。最切合实际的方法是部分分式展开，但要求 Z 变换必须是有理函数，这一般都是满足的。

给定

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

则求逆 Z 变换可由下列步骤完成：