21世纪高等院校选用教材

非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

复变函数与积分变换

3

哈尔滨工业大学数学系　组编

盖云英　包革军　编

科 学 出 版 社

21 世纪高等院校选用教材（非数学专业）

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

复变函数与积分变换

哈尔滨工业大学数学系　组编

盖云英　包革军　编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一. 全书共八章,复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换. 每章后配备了一定量的习题,并根据难易程度分为 A,B 两类. 书中有 * 号部分供读者选用.

本书可作为高等工业院校各专业本科生工程数学课教材,也可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/盖云英,包革军编. —北京:科学出版社,2001.
(21 世纪高等院校选用教材(非数学专业))
ISBN 7-03-008471-3

I. 复… II. ①盖…②包… III. ①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 037834 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 8 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2001 年 8 月第一次印刷 印张: 21 3/4
印数: 1—6 000 字数: 390 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

培养基础扎实、勇于创新的人才,是大学教育的一个重要目标.随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出.在工科大学的教育体系中,数学课程是基础课程,在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等诸方面起着特殊重要的作用.

工程数学中复变函数与积分变换是理工科院校学生继工科数学分析课程之后的又一门数学基础课.通过本课程的学习,不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法,同时还可以巩固和复习工科数学分析的基础知识,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.为此我们按照教育部关于课程改革的精神,结合多年从事同名课程的教学实践,并参照原国家教委1993年批准印发的工程数学复变函数课程基本要求和工程数学积分变换课程基本要求编写了这本复变函数与积分变换教材.该教材可供高等工科院校的电类及与电类有关的各专业使用,也可供其他专业选用,此外,可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书.

在编写过程中我们力求突出以下几个特点:

1. 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起,既保证了教学质量的提高,又压缩了教学时数.完成本教材的全部教学内容需要48学时.

2. 重视对学生能力的培养,注意提高学生的基本素质,对基本概念的引入尽可能联系实际,突出其物理意义;基本理论的推导深入浅出,循序渐进,适合工科专业的特点.基本方法的阐述富于启发性,使学生能举一反三、融会贯通,以期达到培养学生创新能力的目的.

3. 例题和习题丰富,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题解决问题的能力.习题分为A,B两类,对A类习题读者应该独立完成,而B类习题是为那些学有余力的学生而准备的.

4. 为使理论完善,为学生展望新知识留下窗口,我们在编写过程中,适当增加了些超出大纲的内容,这样为进一步拓宽数学知识指出了方向.这在教材中已打有“*”号,可供有关专业选用.

参加本书编写的人员有盖云英(第一、二、三、八章),包革军(第四、五、六、七章),陈明浩、邢宇明完成了本书的全部习题采集和整理工作.罗声政教授审阅了全书.该书在编写过程中得到哈尔滨工业大学数学系的领导以及科学出版社的大力

支持，以使这本书能尽快与读者见面．在此，一并表示感谢！

限于编者的水平有限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正．

编　者

2001年4月于哈尔滨工业大学

目　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数及其四则运算

1. 复数的概念

在高中代数中已经讲述过复数.为了便于以后讨论,我们把有关复数的基本定义及结论,在这里回顾一下.

设 x,y 为两实数,则

$$z = x + \mathrm{i}y \quad (\text{或 } x + y\mathrm{i})$$

表示复数,这里 i 为**虚单位**,具有性质 $\mathrm{i}^2 = -1$. x 及 y 分别叫做 z 的**实部与虚部**,常记为

$$x = \mathrm{Re}z, \qquad y = \mathrm{Im}z$$

虚部为零的复数为实数,即 $x + \mathrm{i}0 = x$.因此,全体实数是全体复数的一部分.特别地 $0 + \mathrm{i}0 = 0$,即,当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零.

实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**.

如果两复数的实部和虚部分别相等,则称两复数**相等**.

2. 四则运算

复数的四则(加、减、乘、除)运算,可以按照多项式的四则运算进行,只要注意将 i^2 换成 -1.设

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \qquad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

则

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.1.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) \tag{1.1.3}$$

如果 $z_2 \neq 0$,则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.1.4}$$

从(1.1.1)～(1.1.4)式即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数. 又从(1.1.1)、(1.1.2)式以及实部与虚部的定义得出

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1 \pm z_2) &= \mathrm{Re}z_1 \pm \mathrm{Re}z_2 \\ \mathrm{Im}(z_1 \pm z_2) &= \mathrm{Im}z_1 \pm \mathrm{Im}z_2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

例 1.1.1　化简 $\mathrm{i}^3, \mathrm{i}^4, \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解

$$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$$

$$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^2=(-1)(-1)=1$$

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

例 1.1.2　计算

(1) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$,　　(2) $\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}$.

解　(1)　$\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\dfrac{4+12\mathrm{i}-9}{4+9}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}\mathrm{i}$

(2)　$\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}=\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\mathrm{i}(\sqrt{3}+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}+\dfrac{3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

例 1.1.3　已知 $x+y\mathrm{i}=(2x-1)+y^2\mathrm{i}$,求 $z=x+\mathrm{i}y$.

解

$$x=2x-1,\qquad x=1$$

$$y=y^2,\qquad y=0 \text{ 或 } y=1$$

由此

$$z=1 \text{ 或 } z=1+\mathrm{i}$$

§1.2　复数的几何表示

1. 用平面上的点和向量表示复数

复数 $z=x+\mathrm{i}y$,由实部 x 与虚部 y 惟一确定,这也就是说由一对有序实数 (x,y) 惟一确定. 而有序实数对 (x,y) 又与平面直角坐标系中的点 $P(x,y)$ 一一对应,于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数.

每一点 (x,y) 表示一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的直角坐标平面称为**复平面**. 由于 x 轴上的点对应实数,y 轴上的点对应纯虚数,故称 x 轴为**实轴**,称 y 轴为**虚轴**. 由于复数与复平面上的点是一一对应的,以后把“点 z”和“复数 z”作为同义词而不加区别.

在复平面上，如图 1.2.1 所示，从原点 O 到点 $P(x,y)$ 引向量 $\overrightarrow{OP}$. 我们看到 $\overrightarrow{OP}$ 与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量)，因此也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x,y 顺次等于 $\overrightarrow{OP}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量. 今后把“复数 z”与其对应的“向量 z”也视为同义词.

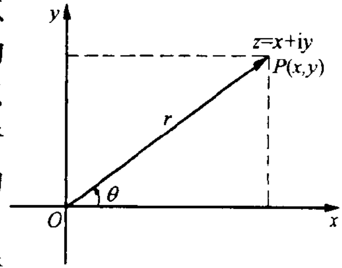

图 1.2.1

在物理学中，如力、速度、加速度等都可用向量表示，说明复数可以用来表示实有的物理量.

2. 模与辐角

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 叫做复数 z 的**模或绝对值**，记作 $|z|$，即 $|z|=r$. 实轴正向转到与向量 $\overrightarrow{OP}$ 方向一致时，所成的角度 θ 叫做复数的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z$，即 $\mathrm{Arg}z=\theta$.

复数 0 的模为零，即 $|0|=0$，其辐角是不确定的. 任何不为零的复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 均有无穷多个值，彼此之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记为 $\arg z$，于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi,\qquad k = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

由直角坐标与极坐标的关系(见图 1.2.1)，我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x} \end{cases}\tag{1.2.1}$$

以及

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}\tag{1.2.2}$$

于是复数 z 又可表示为

$$z = x+\mathrm{i}y = r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\tag{1.2.3}$$

(1.2.3)式通常称为复数 z 的**三角表示式**. 如果再利用欧拉(Euler)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

我们又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tag{1.2.4}$$

这种形式称为复数的**指数表示式**.

在§1.1 节中已经指出：两复数的实部与虚部分别相等，则称两复数相等. 于是从(1.2.1)式与(1.2.2)式即知两复数相等，其模必定相等，其辐角可以差 2π 的

整数倍(辐角如果都取主值,则应相等).反之,如果复数的绝对值及辐角分别相等,则从(1.2.3)式即知这两个复数必然相等.

复数用向量表示,即有大小,又有方向;所以两个复数,如果不都是实数,就无法比较大小.但是,两个复数的模都是实数,就可以比较大小.

从图 1.2.1 可以看出

$$-r \leqslant x, \qquad y \leqslant r$$

即

$$-|z| \leqslant \mathrm{Re}z, \qquad \mathrm{Im}z \leqslant |z| \tag{1.2.5}$$

例 1.2.1　求下列各复数的模及辐角

(1) i,　(2) -1,　(3) $-\mathrm{i}$,　(4) $1+\mathrm{i}$.

解　由 z 平面上的对应点的位置,可以看出

(1) $|\mathrm{i}|=1$,　$\arg\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}$,　$\mathrm{Arg}\,\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(2) $|-1|=1$,　$\arg(-1)=\pi$,　$\mathrm{Arg}(-1)=\pi+2k\pi$.

(3) $|-\mathrm{i}|=1$,　$\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}$,　$\mathrm{Arg}(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(4) $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,　$\arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$,　$\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$,

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 1.2.2　将复数 $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 分别化为三角表示式和指数表示式.

解　因为 $x=1, y=-\sqrt{3}$,所以

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

又 z 在第四象限内,于是

$$\theta=\arg z=\arctan\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}$$

所以

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

由于辐角的多值性,亦可表为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$$

指数表示式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}, \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

3. 加法与减法

以$\overrightarrow{Oz_1}$和$\overrightarrow{Oz_2}$为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2,通过图 1.2.2 可以说明,复数

的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致.

通过两向量的和与差的几何作图法,在复平面中可以求出相应两复数的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2 的对应点.

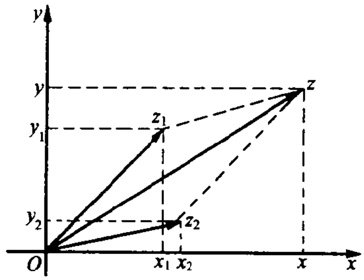

图 1.2.2

在图 1.2.3 中,以向量$\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$为邻边的平行四边形的两条对角线向量$\overrightarrow{Oz}$及$\overrightarrow{z_2z_1}$就分别对应于复数 z_1+z_2 及 z_1-z_2. 由于$\overrightarrow{Oz}$的起点为原点 O,因而终点 z 所对应的复数就是 z_1+z_2;而向量$\overrightarrow{z_2z_1}$的起点不是原点,经平移得起点为原点 O 的向量$\overrightarrow{OS}$,则终点 S 所对应的复数就是 z_1-z_2.

从图 1.2.3 还可以看到:$|z_1-z_2|$表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离.事实上,有

$$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这正是平面上两点距离的表达式.

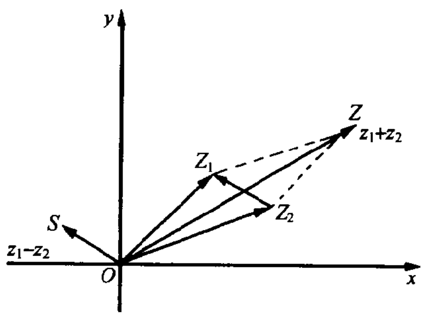

图 1.2.3

§1.3 共轭复数

1. 定义及性质

实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫做**共轭复数**.如果其中一个复数记为 z,则其共轭复数记为 $\bar{z}$.于是

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$$

由定义,显然 $\bar{\bar{z}}=z$.特别地,实数的共轭复数是该实数本身;反之,如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等,则这个复数便是一个实数.

由定义不难验证,两复数的和、差、积、商的共轭复数,分别等于这两复数的共

轭复数的和、差、积、商,即

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \tag{1.3.1}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{1.3.2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0) \tag{1.3.3}$$

我们还可以用共轭复数来表示复数的实部与虚部以及模.如

$$2\mathrm{Re}z = z + \overline{z}$$

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}z = z - \overline{z}$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|\overline{z}| = |z|$$

2. 三角不等式

利用共轭复数的性质,我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.3.4}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2|| \tag{1.3.5}$$

事实上,从共轭复数的性质,我们有

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + \overline{z_1\overline{z_2}} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

由此即可得不等式(1.3.4).如将上式中 z_2 换成 $-z_2$,则有

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\geqslant |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 \end{aligned}$$

由此即可推出不等式(1.3.5).

当然在图 1.2.3 中利用三角形三边关系也可证明不等式(1.3.4)及(1.3.5).

例 1.3.1　A, C 为实数,$A \neq 0$,β 为复数且 $|\beta|^2 > AC$,证明 z 平面上的圆周可以写成

$$Az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + C = 0$$

证　在解析几何中,已知任意一圆的方程可写作

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Dy + C = 0 \tag{1.3.6}$$

这里 A, B, C, D 为实数,且 $A \neq 0$,$B^2 + D^2 - 4AC > 0$.我们知道

$$x^2 + y^2 = z\overline{z}, \qquad x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$$

以此代入方程式(1.3.6),有

$$Az\bar{z}+\frac{B}{2}(z+\bar{z})+\frac{D}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})+C=0$$

也就是

$$Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-D\mathrm{i})z+\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})\bar{z}+C=0 \tag{1.3.7}$$

令

$$\beta=\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})$$

以此代入(1.3.7)式即得证.

例 1.3.2 计算$(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2$.

解 $(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2=(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})-(16-24\mathrm{i}-9)$

$=4+9-7+24\mathrm{i}=6+24\mathrm{i}$

有时利用复数的代数运算来证明平面几何问题也很方便,例如

例 1.3.3 证明等式$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并对此等式作出几何解释.

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

这等式的几何意义是:平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和(见图 1.3.1).

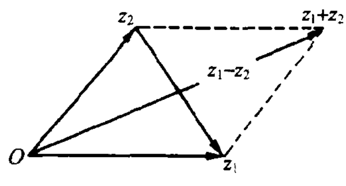

图 1.3.1

例 1.3.4 若 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$,且$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$,则此四点构成一个内接于单位圆的矩形.

证 因为 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$,故四边形 $z_1z_2z_3z_4$ 内接于单位圆$|z|=1$.

又由 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ 知

$$\frac{z_1+z_2}{2}=-\frac{z_3+z_4}{2}$$

若设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k\quad(k=1,2,3,4)$,则有

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{x_3+x_4}{2},\qquad \frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{y_3+y_4}{2}$$

故边 z_1z_2 的中点与边 z_3z_4 的中点关于原点为对称,从而 $z_1z_2z_3z_4$ 为一

矩形.

§1.4　乘方与开方

1. 乘除

把复数表示成三角表示式,再进行乘除或乘方、开方,比直接用代数式运算有时要方便得多.下面我们首先来讨论乘法.

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \tag{1.4.1}$$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 & [r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

由此可知,把两复数相乘,只要把它们的模相乘、辐角相加即可.

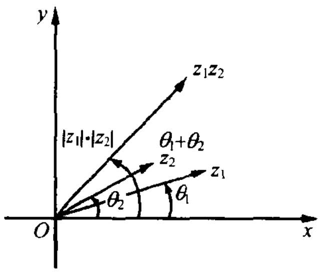

图 1.4.1

由此也可得到两复数乘积的几何作图法:将向量 z_1 沿本身方向伸长 $|z_2|$ 倍.再旋转一个角 $\arg z_2$,该向量的终点即为积 z_1z_2(见图 1.4.1).

特别地;当 $|z_2|=1$ 时,两复数 z_1 与 z_2 的乘积就只是旋转.比如,$z_2=\mathrm{i}$,由于 i 的辐角主值是 $\pi/2$,那么 $\mathrm{i}z_1$ 就可由向量 z_1 逆时针旋转 $\pi/2$ 弧度的角而得到;再如 $z_2=-1$,那么 $-z_1$ 就可由向量 z_1 逆时针旋转 π 弧度角而得到.

其次讨论除法.设(1.4.1)式中的 $z_2\neq 0$,则 $r_2>0$.于是

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

表示一复数,其模为 r_1/r_2,其辐角为 $\theta_1-\theta_2$.利用公式(1.4.2)可得

$$[r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)]\left\{\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]\right\} = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$$

亦即

$$z_2\left\{\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]\right\} = z_1$$

所以

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.4.3}$$

由此可知,把两复数相除,只把它们的模相除、辐角相减即可.

例 1.4.1 化简$\dfrac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$.

解 因为

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}\\
&=\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)\right]}\\
&=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right](\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta)\\
&=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]\end{aligned}$$

例 1.4.2 试证 z_1,z_2,z_3 在一条直线上的条件是$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$为实数.

证 z_1,z_2,z_3 在一直线上的条件是以线段$\overline{z_2z_3}$与线段$\overline{z_1z_3}$为两边的角$\angle z_2z_3z_1$ 是 π 的整数倍,即将 z_3 平移到原点来考虑(见图 1.4.2),则

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=n\pi$$

故$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$为实数是充要条件.

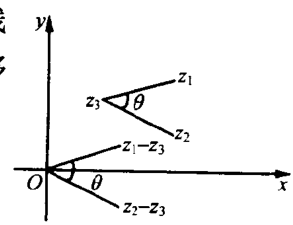

图 1.4.2

2. 乘方

令