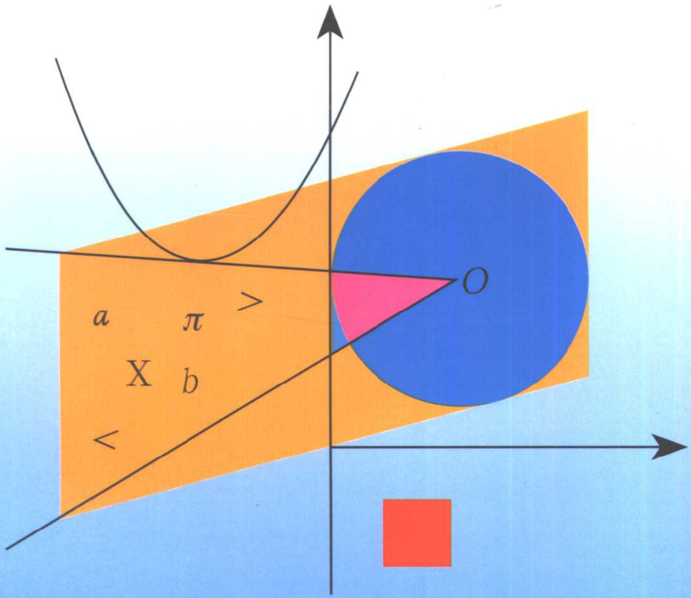
初中数学解题技巧

CHUZHONG SHUXUE JIETI JIQIAO



气象出版社

初中数学解题技巧

林炳华　主编

气象出版社

内 容 简 介

本书按九年制义务教育新大纲编写，又和初中各年级数学课本同步编写。并注意解题技巧和解题方法的研究，进一步加强了基础知识的理解，培养分析问题和解决问题的能力，开拓解题思路，寻找解题规律，掌握解题技巧。

本书内容包括实数、代数式、方程、不等式、函数及其图像、解三角形、直线形和圆。每一节内容分为内容概要、解题技巧、练习题和答案或提示等四部分。

本书适合初中各年级师生使用，也是社会知识青年的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题技巧/林炳华主编. -北京：气象出版社，1998.1

ISBN 7-5029-2306-3

Ⅰ. 初… Ⅱ. 林… Ⅲ. 数学课-初中-解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 04003 号

初中数学解题技巧

林炳华 主编

责任编辑：陈爱丽 终审：周诗健

封面设计：田春耕 责任技编：刘祥玉 责任校对：赵 敏

* * *

气象出版社出版

(北京市海淀区白石桥路 46 号 邮编：100081)

北京市白河印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

开本：850×1168 1/32 印张：8.75 字数：220 千字

1998 年 1 月第一版 1998 年 1 月第一次印刷

印数：1—6100 定价：9.50 元

ISBN 7—5029—2306—3/G·0701

《初中数学解题技巧》编委会名单

主　　编：林炳华

第一副主编：林　敬　王莉萍　靳建颖

第二副主编：王征祥　赵　全　严桂华

蔡继蓉　俞剑波　傅秀焱

刘晓庆　林宝金

编　　委：林晓芬　陈细龙　谢鹏飞

刘红卫　吴立芝　关金保

李保和　拱保罗　孟祥亚

赵全球　张凤杰　周金泉

陈美娟　郑婷婷　欧阳艳妃

郑艳姣　张金国　龚艳青

编者的话

出版此书的目的在于帮助学生在较短时间内掌握解题技巧和解题方法以及系统地复习、巩固在课本上所学的数学知识并能够灵活地、综合地加以运用，使解题能力有较明显地提高。

本书按九年制义务教育新大纲编写，紧密配合初中各年级数学课本进行编写。

本书注意解题技巧和解题方法的研究，进一步加强了基础知识的训练，培养了分析问题的能力，开拓解题思路，寻找解题规律，掌握解题技巧。

作者每年主编高中、初中与小学的三本数学书，邀请全国各中小学数学教师参加编写。这些参编者均在全国性数学刊物上发表过多篇文章，教学经验丰富，写作能力强，因此由这些骨干教师参加编写的书质量高，并适合初中师生使用。

由于经验不足，问题在所难免，恳请使用本书的广大读者提出宝贵的意见和建议。来信请寄福建闽侯尚干校园路 30 号(邮编 350112)。

作者　林炳华

于 1997 年 4 月于福州

目　　录

第一章　实数与代数式

§1.1　实　　数

一、内容概要

1. 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整　数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}$$

2. 实数的一些重要性质

(1)实数和数轴上的点一一对应.

(2) 任何一个实数都有绝对值，实数 a 的绝对值可以表示成：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

(3) 任何两个实数之间总存在另一个实数.

(4) 任何两个实数都可以比较它们的大小.

(5) 任何一个实数的绝对值、偶次幂都不可能是负数，任何一个非负实数的偶次方根都是非负实数.

二、解题技巧

例 1. 下列各实数中哪些是有理数？哪些是无理数？哪些是整数？

$0, -3\frac{1}{3}, 3-\sqrt{2}, \sqrt{2.25}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt[4]{4}, \frac{\pi}{4}, 3.14,$
$1.545454\cdots\cdots, 1.545445444\cdots\cdots,$

解：$0, -3\frac{1}{3}, \sqrt{2.25}, \sqrt[3]{-8}, 3.14, 1.545454\cdots\cdots$，是有理数.

$3-\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{4}$，$\frac{\pi}{4}$，1.545445444…… 是无理数.

0，$\sqrt[3]{-8}$ 是整数.

说明：(1) 有理数与无理数的区别在于有理数可以表示成 $\frac{n}{m}$(m、n 为互质数) 的形式，而无理数则不能.

(2)0 既不是正数也不是负数，但是整数.

例 2：求下列各数的绝对值

(1) $-(-5)$　(2) $2-\sqrt{5}$　(3) $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$

解：(1) $|-(-5)|=5$

(2) $|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$

(3) $\left|\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}\right|=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$

说明：任何一个数的绝对值都不可能是负数.

例 3. 在下列各式中，实数 a、b 的相互关系和取值范围是怎样的？

(1) $ab>0$　(2) $ab=1$　(3) $a+b=0$

(4) $a^2+b^2>0$　(5) $|a|+|b|=0$

解：(1)a、b 同号.

(2)a、b 互为倒数.

(3)a、b 互为相反数.

(4)a、b 都不等于零或 a、b 不同时为零.

(5)a、b 都为零.

例 4. 实数 a、b、c 在数轴上的位置如图 1.1 所示，

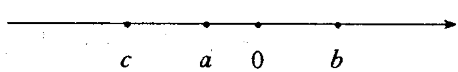


图 1.1

化简：$|a-b|-|b-|-a-c||+\sqrt{(a+c)^2}|$

解：∵　　$a<0, b>0$，且 $|c|>|b|$

$\therefore\quad a-b<0, a+c<0$

$a+b+c<0$

原式 $=-(a-b)-|b-(-a-c)|-(a+c)$

$=-a+b-|a+b+c|-a-c$

$=-a+b+a+b+c-a-c$

$=-a+2b$

说明：含有绝对值符号的式子的化简，首先要判定绝对值符号内的数或式子是正值、负值或零，再根据绝对值的意义去掉绝对值符号，再进行计算.

例 5. 计算

(1) $\left[-3^2\times 2+3\times(-2)^3-4\times(-6)\right]\div\left[-\sqrt{(-9)^2}\right]$

(2) $25\times 99-1\frac{3}{8}\times 544.2-(-1\frac{3}{8})\times 800\frac{3}{5}+(-356.4)\times 1\frac{3}{8}$

(3) $\left|149\frac{7}{8}-217\frac{5}{9}\right|-\left|215\frac{5}{9}+130\frac{1}{8}\right|$

(4) $3\frac{4}{7}+\left\{-1\frac{2}{5}-\left[3\frac{1}{3}-2-(\frac{3}{7}-\frac{2}{3})+\frac{3}{5}\right]\right\}$

解：(1) 原式 $=\left[-9\times 2+3\times(-8)+24\right]\div(-9)$

$=(-18-24+24)\div(-9)$

$=2$

(2) 原式 $=25\times(100-1)+(544.2-800\frac{3}{5}+356.4)\times(-1\frac{3}{8})$

$=2500-25+100\times(-1\frac{3}{8})$

$=2500-25-137\frac{1}{2}$

$=2337\frac{1}{2}$

(3) 原式 $= -(149\frac{7}{8} - 217\frac{5}{9}) - (215\frac{5}{9} + 130\frac{1}{8})$

$= 217\frac{5}{9} - 149\frac{7}{8} - 215\frac{5}{9} - 130\frac{1}{8}$

$= (217\frac{5}{9} - 215\frac{5}{9}) + (-149\frac{7}{8} - 130\frac{1}{8})$

$= 2 - 280$

$= -278$

(4) 原式 $= 3\frac{4}{7} + \left\{-1\frac{2}{5} - \left[3\frac{1}{3} - 2 - \frac{3}{7} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right]\right\}$

$= 3\frac{4}{7} + \left\{-1\frac{2}{5} - \left[4 - 2 - \frac{3}{7} + \frac{3}{5}\right]\right\}$

$= 3\frac{4}{7} + \left\{-1\frac{2}{5} - 2 + \frac{3}{7} - \frac{3}{5}\right\}$

$= 3\frac{4}{7} + \left\{-2 - 2 + \frac{3}{7}\right\}$

$= 3\frac{4}{7} - 4 + \frac{3}{7}$

$= 0$

说明:(1)实数运算一般情况下应按运算顺序进行.在每一步的计算中要特别注意符号.

(2) 实数运算时要善于使用运算律、去括号法则、绝对值的意义等,使运算简单.

例 6. 已知实数 x、y 满足 $2x - 1 - 2y\sqrt{2x-1} + y^2 + \sqrt{y-2} = 0$,求:$x$、$y$ 的值.

解:原式可变为:

$$(\sqrt{2x-1} - y)^2 + \sqrt{y-2} = 0$$

由此得出方程组: $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y = 0 \\ \sqrt{y-2} = 0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

经检验$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}$适合所得方程组的解.

$\therefore$ x、y的值分别为$\dfrac{5}{2}$和 2.

说明:若一个等式中含有两个未知数,通常将此等式转化为两个非负数的和的形式,从而得到两个等于零的等式组成方程组.

例7　已知$m = a + \sqrt{2}$,$n = 3 + b\sqrt{2}$(a、b为整数),且$mn = 7$,求a、b的值.

解:$\because$　$mn = 7$

$\therefore$　$(a + \sqrt{2})(3 + b\sqrt{2}) = 7$

即$(3a + 2b) + (ab + 3)\sqrt{2} = 7$

$\therefore$　a、b为整数 $\therefore$ $3a + 2b$和$ab + 3$一定为有理数.

$\therefore$ 可得方程组

$$\begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ ab + 3 = 0 \end{cases}$$

解此方程组得:$\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$和$\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{9}{2} \end{cases}$(不合题意,舍去)

$\therefore$　a、b的值分别为 3 和 -1.

三、练习题

1. 计算

(1) $1.5 - \left[(+4\frac{2}{3}) - (+2.75) - (-\frac{5}{6}) + (-\frac{3}{8})\right]$

(2) $(-1)^{1995} \times (-2)^3 - 2^3 \times (-\frac{1}{16}) \div 1\frac{1}{2}$

(3) $(-\frac{3}{4})^2 \div (-1\frac{1}{2})^3 - 1^{10} \times \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|$

(4) $-3^2\times(-1.2)^2\div(-0.3)^3+(-\frac{1}{3})^2\times(-3)^3\div(-1)^{28}$

(5) $\dfrac{-\frac{10}{13}+20.25\div(-1.5)^3}{(-1)^{1994}-\dfrac{1}{0.125+\frac{5}{12}}}$

2. 实数 a、b、c 在数轴上的位置如图 1.2，

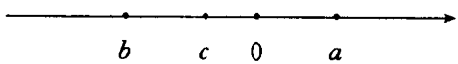


图 1.2

化简：(1) $|a|-|b|-|c-b|+|a-b|-|c|$

(2) $|b-a|+\sqrt{(c-b)^2}-|-b|-2\sqrt{(c-a)^2}$

3. 已知 a 的相反数是 $\sqrt{3}-2$，b 的倒数是 $\sqrt{3}+1$，求 $|a-2b|$ 的值.

4. 比较 $\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{30}}{4}$ 与 $\dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{29}}{6}$ 的大小.

5. 已知 x、y 为实数，且 $4x^2+y^2+4x-8y+17=0$，求 y^x 的值.

6. 已知 $x^2-y^2+2y\sqrt{1-x^2}=1$，求 x^2+y^2 的值.

四、答案或提示

1. (1) $-\frac{7}{8}$　(2) $8\frac{1}{3}$　(3) 0　(4) -477　(5) 8

2. (1) $2a+b$　(2) $-a-3b+3c$　3. $2\sqrt{3}-3$

4. $<$　5. $\frac{1}{2}$　6. 1

§1.2 整　式

一、内容概要

(一) 整式的定义：除式中不含有字母的有理式叫做整式.

整式里面包含单项式和多项式.

像 $-3x$，$\frac{ab^2}{8}$，$-x^2y^3z^4$ 这种都是数与字母的积的代数式叫做

单项式.

几个单项式的和叫做多项式.

(二)整式的运算

1. 整式的加减法

(1) 同类项：所含字母相同，并且相同的字母的指数也分别相同的项叫做同类项.

把多项式中的同类项合并成一项叫做合并同类项.

(2) 整式的加减法：整式的加减运算，实际上就是合并同类项，在运算时，如果遇到括号，就根据去括号法则先去括号，再合并同类项.

2. 整式的乘除法

(1) 正整数指数幂的运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$； $a^m \div a^n = a^{m-n}(m \geqslant n)$

$(a^m)^n = a^{mn}$； $(ab)^n = a^n \cdot b^n$；

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

(2) 乘法公式

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

二、解题技巧

例 1. 若 a、b、c 满足等式

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+3)^2 = 0$$

且 $ax^2 + bx + c = 0$，求 $x^2 + 3x + 1$ 的值.

解：由 $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+3)^2 = 0$，得

$$a = 1, b = 2, c = -3.$$

题中 $ax^2 + bx + c = 0$ 即为

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

解得，$x = 1$，或 $x = -3$.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，

$$x^2+3x+1=1^2+3\times1+1=5.$$

当 $x=-3$ 时，

$$x^2+3x+1=(-3)^2+3\times(-3)+1=1.$$

如果字母所取的是较繁的无理数或者由题设条件不能直接解出每个字母所取的值，可以将它们进行恒等变形，用另一种较简单的整体代换单个字母代入原式去求值，从而达到简化计算的目的，这种方法称为换元求值法.

例 2. 当 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ 时，求 $\dfrac{1}{2}x^3-x^2-x+2$ 的值.

分析：本题如果直接把 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ 代入所求的式中计算，显然较麻烦.

解：将条件进行恒等变形. 因 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，$\therefore\ x=\sqrt{3}+1$，得 $x-1=\sqrt{3}$，再将条件化成整式，得：

$$x^2-2x-2=0$$

再对所求的式子变形后再求值：

$$\frac{1}{2}x^3-x^2-x+2=\frac{1}{2}x(x^2-2x-x)+2=2.$$

在计算关于 x 的一元多项式 A 当 $x=a$ 的值时，直接代入求值计算过程会很繁. 如果能找到多项式 B，当 $x=a$，有 $B=0$，则

$$A=B+C=C.$$

这样由于 C 的次数较低，当 $x=a$ 时 C 的值便容易求得，从而求得 $x=a$ 时 A 的值. 由此可知道，当 $x=a$ 时 A 的值就是多项式 A 除以一次二项式 $(x-a)$ 的余式的值.

例 3. 当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，求 $6x^4+8x^3-5x^2+4x-5$ 的值.

解：由 $x=\dfrac{2}{3}$，得 $3x-2=0$

用 $3x-2$ 除 $6x^4+8x^3-5x^2+4x-5$，得商式为 $2x^3+4x^2$

$+x+2$,余式为 -1,即

$$6x^4+8x^3-5x^2+4x-5$$
$$=(2x^3+4x^2+x+2)(3x-2)-1$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时,原式的值为 -1.

整式的综合运算法是根据整式的概念和运算法则,按规定的运算顺序进行演算的方法.

例 4. 计算下列各式

(1) $3b\cdot(-2ab^2)^2-2a^5b^3\div(\frac{1}{2}ab)^3+16a^2$

(2) $(x^2-2xy)\cdot 9x^2-(9xy^4-12x^3y^3)\div 3xy$

解:(1) 原式 $=3b\cdot 4a^2b^4-2a^5b^3\div\frac{1}{8}a^3b^3+16a^2$

$=12a^2b^5-16a^2+16a^2$

$=12a^2b^5$

(2) 原式 $=x^2\cdot 9x^2-2xy\cdot 9x^2-9xy^4\div 3xy+12x^3y^3\div 3xy$

$=9x^4-18x^3y-3y^2+12x^2y^2$

$=9x^4-18x^3y+12x^2y^2-3y^3$

如果多项式乘以多项式的各项符合乘法公式的特点,那么就可以运用公式进行简便运算.

例 5. 计算下列各式

(1) $(x+y-z)(x-y-z)+(x+y)[(x-y)^2+xy]$

(2) $(x-a)^3(x+a)^3(x^2+ax+a^2)^3(x^2-ax+a^2)^3$

分析:本题按多项式乘法法则逐一展开计算就很繁,如果将它们进行适当变形就能运用乘法公式进行简便计算.

解:(1) 原式 $=[(x-z)+y][(x-z)-y]+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x-z)^2-y^2+x^3+y^3$

$=x^2-2xz+z^2-y^2+x^3+y^3$

(2) 原式 $=[(x-a)(x^2+ax+a^2)]^3[(x+a)(x^2-ax+x^2)]^3$

$$= [(x^3 - a^3)(x^3 + a^3)]^2 = (x^6 - a^6)^3$$
$$= x^{18} - 3x^{12}a^6 + 3x^6a^{12} - a^{18}$$

多项式的四则运算，特别是一元多项式的运算，可以列竖式演算. 列竖式运算时，各式都要按某一字母的降幂进行排列，同类项上下对齐，缺项补零.

例 6. 计算 $6x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 3$ 除以 $2x^2 - 3x + 1$ 的商式和余式.

解

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 3x^2 & +x & -2 \\
\cline{2-6}
2x^2 - 3x + 1 \,\big) & 6x^4 & -7x^3 & -4x^2 & +0 & +3 \\
-) & 6x^4 & -9x^3 & +3x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & 2x^3 & -7x^2 & +0 & \\
 & -) & 2x^3 & -3x^2 & +x & \\
\cline{2-6}
 & & & -4x^2 & -x & +3 \\
 & & -) & -4x^2 & +6x & -2 \\
\cline{3-6}
 & & & & -7x & +5
\end{array}$$

∴　商式 $= 3x^2 + x - 2$，余式 $= -7x + 5$.

三、练习题

1. 当 $a(a-1) - (a^2 - b) = 2$ 时，求 $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab$ 的值.

2. 已知 $(x^2 + y^2)(x^2 - 1 + y^2) - 12 = 0$，求 $(x^2 + y^2)^3$ 的值.

3. 当 $x = 2$ 时，求 $17x^4 - 31x^3 + 5x^2 - 19x + 3$ 的值.

4. 计算下列各式：

(1) $3x^2y + \left\{xy - \left[3x^2y - \left(4x^2y^2 + \frac{1}{2}xy\right)\right] - 4x^2y^2\right\}$

(2) $a^{m+1}b^{2n-2} \div \left(-\frac{1}{3}a^{m-2}b^{n+2}\right) - 2ab^2 \cdot (a^m b - 3b^n)$

5. 计算下列各式：

(1) $(a - b)(b + a)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

(2) $(x^m - y^2)^2 + (xy - z)^2(x^2y^2 + xyz + z^2)^2$

6. 计算 $6x^5 + x^4 + 2x^3 + 44x^2 + 6x + 3$ 除以 $3x^2 + 5x - 2$