

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人 民 教 育 出 版 社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0111 开本 850×1168 1/32 印张 8

字数 200,000 印数 85,801—123,600 定价(¥) 0.80

1957年4月第1版 1980年3月北京第5次印刷

第一分册目录

第十五章 曲线积分·斯底尔吉斯积分

§ 1. 第一型曲线积分

517. 第一型曲线积分的定义(1) 518. 约化为普通定积分(3) 519. 例(5)

§ 2. 第二型曲线积分

520. 力场中功的问题(10) 521. 第二型曲线积分的定义(12) 522. 第二型曲线积分的存在与计算(15) 523. 闭路的情形·平面的定向(18) 524. 例(20) 525. 用取在折线上的积分的逼近法(25) 526. 用曲线积分计算面积(26) 527. 例(30) 528. 两种不同型曲线积分间的联系(33) 529. 物理问题(35)

§ 3. 曲线积分与道路无关的条件

530. 与全微分相关问题的提出(39) 531. 与道路无关积分的微分法(40) 532. 用原函数来计算曲线积分(43) 533. 确切微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法(44) 534. 推广到任意区域的情形(46) 535. 最终结果(49) 536. 沿闭路的积分(50) 537. 非单连区域或有奇点的情形(51) 538. 高斯积分(56) 539. 空间的情形(58) 540. 例(61) 541. 物理问题的应用(65)

§ 4. 有界变差函数

542. 有界变差函数的定义(68) 543. 有界变差函数类(70) 544. 有界变差函数的性质(73) 545. 有界变差函数的判定法(77) 546. 连续的有界变差函数(79) 547. 可求长曲线(82)

§ 5. 斯底尔吉斯积分

548. 斯底尔吉斯积分的定义(86) 549. 斯底尔吉斯积分存在的一般条件(87) 550. 斯底尔吉斯积分存在情况的若干类(88) 551. 斯底尔吉斯积分的性质(91) 552. 分部积分法(94) 553. 化斯底尔吉斯积分为黎曼积分(95) 554. 斯底尔吉斯积分的计算(97) 555. 例(102) 556. 斯底尔吉斯积分的几何解说(108) 557. 中值定理, 估计值(109) 558. 斯底尔吉斯积分记号下面的极限过程(111) 559. 例题及补充(113) 560. 化第二型曲线积分为斯底尔吉斯积分(118)

第十六章 二重积分

§ 1. 二重积分的定义及简单性质

561. 柱形长条体积的问题(120) 562. 化二重积分为逐次积分(121) 563. 二重积分的定义(123) 564. 二重积分存在的条件(125) 565. 可积函数类(126) 566. 下积分及上积分作为极限(129) 567. 可积函数与二重积分的性质(130) 568. 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法(133)

§ 2. 二重积分的计算

569. 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分(136) 570. 例(140) 571. 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分(150) 572. 例(153) 573. 力学应用(167) 574. 例(169)

§ 3. 格林公式

575. 格林公式的推演(177) 576. 应用格林公式到曲线积分的研究(181) 577. 例题及补充(182)

§ 4. 二重积分中的变数更换

578. 平面区域的变换(185) 579. 例(188) 580. 曲线坐标中面积的表示法(193) 581. 补充说明(196) 582. 几何推演(198) 583. 例(200) 584. 二重积分中的变数更换(209) 585. 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分(211) 586. 例(213)

§ 5. 广义二重积分

587. 展布在无界区域上的积分(220) 588. 广义二重积分的绝对收敛性定理(223) 589. 化二重积分为逐次积分(225) 590. 无界函数的积分(228) 591. 广义积分中的变数更换(230) 592. 例(232)

第二分册目录

第十七章 曲面面积·曲面积分

§ 1. 双侧曲面

593. 曲面的侧(249) 594. 例(251) 595. 曲面和空间的定向(252) 596. 法线方向余弦公式中符号的选择(254) 597. 分片光滑曲面的情形(256)

§ 2. 曲面面积

598. 许瓦耳兹的例子(257) 599. 曲面面积的定义(259) 600. 附注(260) 601. 曲面面积的存在及其计算(262) 602. 用内接多边形的接近法(267) 603. 面积定义的特殊情况(269) 604. 例(270)

§ 3. 第一型曲面积分

605. 第一型曲面积分的定义(285) 606. 化为寻常的二重积分(286) 607. 第一型曲面积分在力学上的应用(288) 608. 例(290)

§ 4. 第二型曲面积分

609. 第二型曲面积分的定义(297) 610. 最简单的特殊情形(299) 611. 一般情形(302) 612. 证明的细节(304) 613. 用曲面积分表立体体积(305) 614. 斯托克斯公式(310) 615. 例(312) 616. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用(318)

第十八章 三重积分及多重积分

§ 1. 三重积分及其计算

617. 立体质量计算的问题(321) 618. 三重积分及其存在的条件(322) 619. 可积函数与三重积分的性质(323) 620. 展布在平行六面体上的三重积分的计算(325) 621. 在任何区域上的三重积分的计算(327) 622. 广义三重积分(329) 623. 例(329) 624. 力学应用(337) 625. 例(338)

§ 2. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式

626. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式(346) 627. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式应用于曲面积分的研究(349) 628. 高斯积分(350) 629. 例(352)

§ 3. 三重积分中的变数更换

630. 空间的变换及曲线坐标(355) 631. 例(356) 632. 曲面坐标下的体积表示法(358) 633. 补充说明(361) 634. 几何推演(362) 635. 例(363) 636. 三重积分中的变数更换(371) 637. 例(373) 638. 立体的吸引力及在内点上的位势(378)

(iii)

§ 4. 場論初步

639. 純量及向量(380) 640. 純量場及向量場(381) 641. 梯度(381) 642. 向量通过曲面的流量(383) 643. 高斯-奧斯特洛格拉斯基公式·發散量(384) 644. 应用(386) 645. 向量的循環量·斯托克斯公式·旋度(389) 646. 应用(391)

§ 5. 多重积分

647. 兩立体間的引力及位勢問題(394) 648. n 維立体的体积· n 重积分(396)
649. n 重积分中的变数更換(398) 650. 例(402)

第十五章 曲綫积分 · 斯底尔吉斯积分

§1 第一型曲綫积分

517 第一型曲綫积分的定义 为了很自然地得出这一新的概念，我們来考察一个能导出它的力学問題。

設已給一連續的可求长平面* 曲綫(K) (图 1)，在它上面分布有质量，且在曲綫上所有的点 M 处其綫性密度 $\rho(M)$ 为已知，要求确定整个曲綫(K) 的质量 m 。

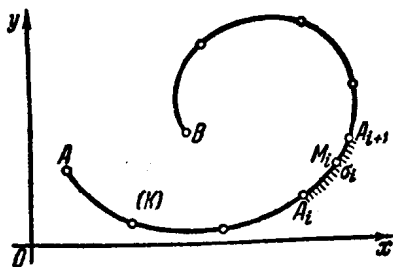


图 1

为达此目的，在曲綫端点 A 与 B 間任意地插入一系列点 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} (为使記号对称，命 A_0 与 A 相合， A_n 与 B 相合)。为了明确起見，我們认为这些点是从 A 到 B 記数的 [参看 317**]，但是，将它们以相反的方向記数也可以。

在曲綫的弧 $A_i A_{i+1}$ 上任取一点 M_i ，算出这一点处的密度 $\rho(M_i)$ 。近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的，并以 σ_i 表弧 $A_i A_{i+1}$ 的长，对这一弧的质量 m_i 我們將有近似表示式

* 今后为简单計，我們只討論平面曲綫，整个所述的东西不必改变就可移到空間曲綫的情形。

** 参看关于本书第一卷及第二卷时，均以原书的中譯本为准——譯者。

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而对整个所求的质量,将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

这一式子的误差与上面所作的近似假定是有关的;如所有小段的长 σ_i 趋近于零时,这误差也将趋近于零。因此,如以 λ 表长 σ_i 中最大的一个,只要变到极限就得到准确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

现在开始一般地来研究这一类型的极限。丢开上面的问题不谈,取一任意“点函数” $f(M) = f(x, y)$, 它是在一连续的可求长平面曲线 (K) 上给出的*, 并重复上述手续: 分曲线 (K) 为许多弧元 $A_i A_{i+1}$, 在它们上面任取点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 计算出在这些点处的值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$, 并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它亦代表一定类型的“积分和”。

当 $\lambda = \max \sigma_i$ 趋近于零时,如这一积分和有一确定的有限极限 I , 既与曲线 (K) 细分的方法无关, 又与小段 $A_i A_{i+1}$ 上点 M_i 的选择无关, 则这一极限称作函数 $f(M) = f(x, y)$ 沿曲线或道路 (K) 上所取的(第一型**)曲线积分, 并以记号

$$I = \int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (1)$$

来表示(其中 s 是曲线的弧长, ds 就象征长度元 σ_i)。极限过程的精确说明留给读者。

因此,上面所得曲线质量的式子可重写为:

* 这里假定某一直角坐标系取作基础。

** 以示与下面[521]所讨论的第二型曲线积分不同。

$$m = \int_{(K)} \rho(M) ds. \quad (2)$$

特別注意，給道路(K)所加的方向在所介紹的定义中不起任何作用。例如若这一曲綫不是閉的，且以(AB)及(BA)作为不同方向的曲綫，則

$$\int_{(AB)} f(M) ds = - \int_{(BA)} f(M) ds.$$

类似地，我們可以引导散布在空間曲綫(K)上的积分概念：

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y, z) ds. *$$

由于没有什么新的原則性东西，沒有必要在这里詳談。

518 約化为普通定积分 假定在曲綫(K)上任意取定一方向(两个可能方向之一)，曲綫上点 M 的位置可由从一点 A 量起的弧长 $s = \overline{AM}$ 来确定。那末曲綫(K)可表为参数方程的形状：

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S),$$

而在曲綫上給出的函数 $f(x, y)$ 便化成变量 s 的复合函数 $f(x(s), y(s))$ 。

对应于在 AB 弧上所选取的分点 A_i ，其弧的值如表为 s_i ($i = 0, 1, \dots, n$)，則显然 $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$ 。以 \bar{s}_i 表定点 M_i 的 s 值(而且显然， $s_i \leq \bar{s}_i \leq s_{i+1}$)，可以看到曲綫积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和，所以立刻有：

$$\int_{(K)} f(M) ds = (R) \int_0^S f(x(s), y(s)) ds^{**}, \quad (3)$$

且这两积分中只要有一个存在，另一个就也存在。

当然，这种直接由第一型曲綫积分約化为普通的积分会降低了它

* 某一直角坐标系将取作基础。函数 f 仅在曲綫(K)的点处有定义。

** 符号(R)表示，积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分。

的理論价值,但在方法上的价值它仍全部保存着。

我們以后将假定函数 $f(M)$ 是連續的*, 显然在这种情形下积分是存在的。

令設一曲綫(K)由任意的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

所給出, 其中函数 φ 及 ψ 与它們的导数 φ' 及 ψ' 都連續; 此外, 假定曲綫上无重点。那么曲綫就是可求长的, 且若弧 $s = \overline{AM} = s(t)$ 的增加对应于参数 t 的增加, 則

$$s'_t = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[320, 321]。在(3)的右端的积分中換变数, 立刻得到:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

因此, 在計算第一型曲綫积分时, 在积分号下的函数中, 变量 x 及 y 應該用坐标的参数表示式来代替, 至于因子 ds , 應該把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替。特別指出, 定积分(4)的下限必須小于上限。

在曲綫以显方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

給出时, 公式(4)的形状是:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

这一关系式也可有另一形式。在函数 $y(x)$ 与它的导数 $y'(x)$ 連續的假定下, 曲綫(K)在每一点处都有一不平行于 y 軸的确定切綫。以

* 我們是指在曲綫(K)上的点处連續, 也就是指沿着曲綫連續。用“ ϵ - δ ”的說法, 这就是說: 对 $\epsilon > 0$ 能找到这样的 $\delta > 0$, 使当 $\overline{MM'} < \delta$ 时就有 $|f(M') - f(M)| < \epsilon$ (M 及 M' 是曲綫上的点)。在这一假定下, 复合函数 $f(x(s), y(s))$, 由于 $x(s)$ 及 $y(s)$ 是連續的緣故, 也同样是 s 的連續函数。

α 表切綫与 x 軸的夹角, 我們得到:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

故

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx. \quad (6)$$

如用 S 表示整个曲綫 (AB) 的长, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特別地有

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (7)$$

附注 公式(7)是經形式的变換得来的。如果我們定义曲綫弧长为外切(不是内接)折綫周长的极限, 則这一定义——在曲綫以显式給出时——立即可得出公式(7)。讀者不妨自己来证实这一点。

519 例1) 若 (K) 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限內的部分, 計算积分 $I = \int_{(K)} xy ds$.

解 (a) 我們有

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}},$$

所以由公式(5),

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} \cdot x dx. \end{aligned}$$

进行积分, 得:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

應該注意, 上面做的計算事实上还要有所說明才行, 因为当 $x = a$ 时切綫斜率变为无穷

大。下一解法就没有这一缺点。

(6) 如变到椭圆的参数表示 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, 故

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

则可按公式(4)来进行计算:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt. \end{aligned}$$

这里令 $\cos 2t = z$, 则 $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} dz$, 且

$$\begin{aligned} I &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z} dz = \\ &= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

2) 计算积分 $I = \int_{(K)} y ds$, 其中 (K) 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上自坐标原点到点 (x_0, y_0) 的一段。

一解。

解 由曲线的方程, 我们有 $yy' = p$, 所以

$$y ds = y \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} dx = \sqrt{p^2 + 2px} dx,$$

$$\text{且} \quad I = \int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2px} dx = \frac{1}{3p} [(p^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

3) 计算积分 $L = \int_{(A)} (x^2 + y^2) ds$, 其中 (A) 是联结点 (a, a) 及 (b, b) 的直线段 ($b > a$).

提示 直线方程: $y = x$. 答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3 - a^3)$.

4) 计算积分 $K = \int_{(C)} ye^{-x} ds$, 其中 (C) 是曲线

$$x = \log(1 + t^2), \quad y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 3$$

在点 $t = 0$ 及 $t = 1$ 间的一段。

提示 $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 1$,

$$K = \int_0^1 \frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t - t + 3}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{3\pi}{4}.$$

5) 常見曲線中一大部分(橢圓、雙曲線、正弦曲線、雙紐綫等)其弧長不能表作初等函數,因為它們的 ds 不能積分為有限型。然而,對這種曲線,積分 $\int_{(K)} f(x,y)ds$ 往往算出來是初等函數[例如,參看例1],因為與因子 $f(x,y)$ 聯在一起時,積分號下微分式的整個構造改變了。讀者不妨做一些積分 $\int_{(K)} f(x,y)ds$ 的例題,積分取在正弦曲線 $y = \sin x$ 或雙曲線 $xy=1$ 上但又可表作初等函數者。

6) 計算積分 $I = \int_{(C)} xyz ds$, 其中 (C) 是曲線 $x=t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2$ 在點 $t=0$ 及 $t=1$ 間的弧。

$$\text{解 } ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = (1+t)dt,$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (1+t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7) 當曲線 (K) 用極坐標方程 $r=r(\theta)$ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) 給出時,試求計算積分

$$I = \int_{(K)} f(x,y) ds$$

的一公式。

$$\text{答 } I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

8) 若 (K) 是雙曲螺綫 $r\theta=1$ 自 $\theta = \sqrt{3}$ 到 $\theta = 2\sqrt{2}$ 的一段,試計算積分

$$H = \int_{(K)} \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{答 } \frac{19}{3}.$$

9) 試求曲線 $y = \log x$ 在有橫坐標 x_1 及 x_2 的兩點間這一段的質量,設曲線在每點處的(綫性)密度等於該點橫坐標的平方。

解 由公式(2),因為在我們的情形下 $\rho = x^2$,故有:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} x^2 ds. \text{ 但 } ds = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx, \text{ 所以}$$

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{3} \left[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$

10) 試求悬鏈綫 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 $x=0$ 及 $x=a$ 間一段的质量，設曲綫在每点的密度与該点的纵坐标成反比。

提示 $\rho = \frac{k}{y}$, $ds = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{y}{a} dx$, $m = k$.

与連續地分布在曲綫上的质量相关的其它問題，很自然地也可变成上面所考察类型的曲綫积分。

11) 在第十章中 [340] 我們討論过平面曲綫对坐标軸的靜矩的計算，以及它的重心坐标的計算，那时假定“綫性密度” $\rho = 1$ 。讀者不难推广那里所得的公式到质量連續分布的一般情形。如引用曲綫积分概念时，則結果可写作下面形状：

$$M_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad M_x = \int_{(K)} \rho y ds,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x ds}{\int_{(K)} \rho ds}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y ds}{\int_{(K)} \rho ds}.$$

12) 我們还說明第一型曲綫积分的一个应用——应用到有质量的曲綫对一质点引力的問題。

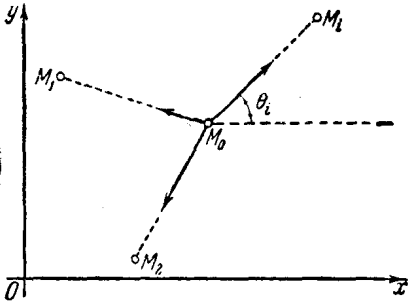


图 2

大家都知道，按牛頓定律，质量 m_0 的质点 M_0 对质量 m 的质点 M 的吸引力，方向是从 M_0 到 M ，大小等于 $k \cdot \frac{m m_0}{r^2}$ ，其中 r 是距离 M_0M ，而 k 是与测量的基本单位选择有关的一系数；并且为了簡單起见，我們常认为它等于一。

設点 M_0 被一质点系 M_1, M_2, \dots, M_n 所吸引，它們的质量是 m_1, m_2, \dots, m_n ，則

将各个点对 M_0 的吸引力几何地相加，就得到合力。同时，合力在坐标軸上的射影等于各个力射影的代数和。

如以 X 及 Y 表合力在坐标軸上的射影，且以 θ_i 表向量 $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$ 与 x 軸間的夹角，則显然，

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

(与寻常一样, 其中 r_i 表向量 \vec{r}_i 的长)。

现在设吸引质点的质量连续地分布在一曲线 (K) 上。为要找出吸引力, 我们分曲线为许多小段, 将每一小段的质量集中在它上面任意取定的一点 M_i 处后, 我们就求出合力在坐标轴上射影的近似值:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i \cos \theta_i}{r_i^2}, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i \sin \theta_i}{r_i^2},$$

因为这时各个小段其质量近似地等于 $\rho(M_i) \sigma_i$ 。如令所有的 σ_i 趋近于零, 则取极限后就得到准确的等式, 且这时和就被积分所代替了:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \cos \theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \sin \theta}{r^2} ds, \quad (8)$$

这里 r 表向量 $\vec{r} = \vec{M_0 M}$ 的长, 而 θ 表它与 x 轴的夹角。

13) 试求一均匀半圆 ($\rho=1$) 对位于其中心的一单位质量的吸引力。

解 将坐标原点放在圆心, 通过半圆端点作横轴 (图 3)。

由对称性, $X=0$, 所以只要求出射影 Y 好了。由公式 (8),

$$Y = \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds.$$

但在现在的情况下 $r=R$ (半圆的半径) 且

$ds = R d\theta$ 。故

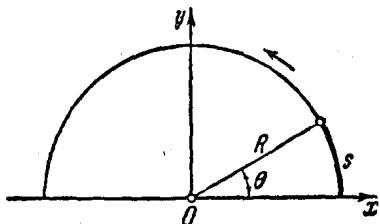


图 3

$$Y = \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

14) 一单位质量的点 ($m_0=1$) 与一无穷的均匀直线 ($\rho=1$) 的距离为 h , 求直线对这一点的引力。

解 将所求的引力当作由所述直线上有限线段所生引力的极限, 假设这一线段的端点在两头变到无穷远去。如将直线本身取作 x 轴, 而 y 轴通过已知点, 则得 (考虑在所给的情况下 $ds=dx$)

$$Y = -h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2}{h}.$$

同样, $X=0$ (但由对称性这很明显)。

15) 试求星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 在第一象限内的弧对位于坐标原点的单位质

量所生的引力，設曲綫在每一点的密度等于这一点到坐标原点距离的立方。

$$\text{答 } X = Y = \frac{3a^2}{5}$$

§2 第二型曲綫积分

520 力場中功的問題 我們轉而討論在实际上更为重要的第二型曲綫积分的概念，这里还是从一个力学問題出发。

設在 xy 平面(或平面的一确定部分)的任一点 M 如放一单位质量，就有一确定的力 \vec{F} 作用于它，这个力的大小与方向只与点 M 的位置有关；如放在 M 的质点其质量 m 不等于一，則作用于它的力就等于 $m\vec{F}$ 。在这种情形下 xy 平面(或所考察的一部分)称作(平面)力場，而作用于单位质量的力 \vec{F} 称作場的引力。給出力 \vec{F} 的大小与方向相当于給出它在坐标軸上的射影 X, Y ，显然射影是点 M 的坐标 x, y 的函数

$$X = X(x, y), Y = Y(x, y).$$

現在假定，位于場中的质点 $M(x, y)$ (有单位质量者)运动，且以一确定的方向描出某一連續曲綫(K)。我們的問題是在这一运动中場的力所做的功 A 如何計算。

假如作用于点的力保持一常值 F 且保持一固定方向，而点的位移本身以直綫进行，則大家都知道，功 A 可表为位移 l 与力在位移方向上射影的乘积：

$$A = Fl \cos \theta,$$

其中 θ 是力 \vec{F} 与位移方向間的夹角。

在非直綫运动以及非常数力的情况下，功要借某一极限过程来确定[比照 344]。例如，我們可以这样来理解。在点的軌道曲綫內，內接一多角形折綫，并确定当沿这一折綫运动时場的力所做的功。这时不計力在折綫的同一段上的变化，所以問題就变成上述的直綫运动以及常数力的最簡單情形了。所得的式子当作所求功 A 的近似值。它的准确值，总是这样，可以用一极限过程即当折綫的所有各段趋近于零

时*就能得到。

根据所述的计划, 现在来进行功 A 的计算。以 A 表轨道 (K) 的起点, B 表终点 (这里当然, 哪一点取作起点, 哪一点取作终点, 不能随便)。用自 A 到 B 方向排好的点

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$$

来分曲线 AB 为许多部分。为使记号对称, 将 A, B 写作 A_0, A_n , 而它们的坐标分别表为 x_0, y_0 及 x_n, y_n 。最后, 作曲线 (K) 的内接折线, 以上述各点为接續顶点。

为了要确定通过小段 $A_i A_{i+1}$ 时的功 A_i , 我们设这时力 \vec{F} 大小与方向都保持不变, 例如与点 A_i 处的情形相同。如以 F_i 表力在这一点的大小, θ_i 表小段的方向 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 与力的方向间的夹角, 则元素功 A_i 将 (近似地) 等于

$$A_i \doteq F_i \cdot A_i A_{i+1} \cdot \cos \theta_i.$$

引进 x 轴与力 \vec{F}_i 间夹角 α_i 以及 x 轴与小段 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 间

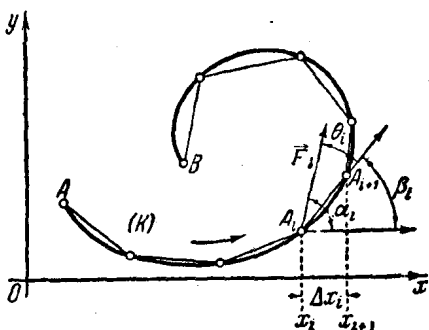


图 4

夹角 β_i , 则 (图 4) $\theta_i = \alpha_i - \beta_i$. 在 A_i 的表示式中令

$$\cos \theta_i = \cos \alpha_i \cos \beta_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i,$$

它就可改写作形状

$$F_i \cos \alpha_i \cdot A_i A_{i+1} \cos \beta_i + F_i \sin \alpha_i \cdot A_i A_{i+1} \sin \beta_i.$$

但是不难看出, $F_i \cos \alpha_i$ 及 $F_i \sin \alpha_i$ 是力 \vec{F}_i 在坐标轴上的射影, 所以

$$F_i \cos \alpha_i = X_i = X(x_i, y_i), \quad F_i \sin \alpha_i = Y_i = Y(x_i, y_i).$$

同样, 式子 $A_i A_{i+1} \cos \beta_i$ 及 $A_i A_{i+1} \sin \beta_i$ 是线段 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 在坐标轴上的射

* 在闭曲线的情形时更正确的说法是: 当所有的部分弧的直径趋近于零时 [参看 318]。