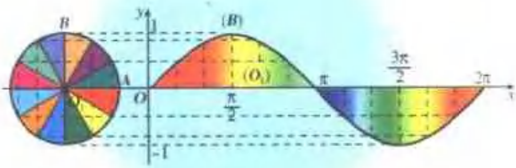
名师解惑丛书



平面三角

索云旺　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

平面三角

索云旺　编著

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面三角/索云旺编著.—济南:山东教育出版社,2001
(名师解惑丛书)
ISBN 7-5328-3116-7

Ⅰ.平… Ⅱ.索… Ⅲ.三角课-高中-课外读物
Ⅳ.G634.643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 10753 号

名师解惑丛书
平面三角
索云旺 编著

出 版 者:山东教育出版社
(济南市纬一路 321 号 邮编:250001)
电 话:(0531)2023919 传真:(0531)2050104
网 址:http://www.sjs.com.cn
发 行 者:山东教育出版社
印 刷:山东新华印刷厂临沂厂
版 次:2001 年 8 月第 1 版
2001 年 8 月第 1 次印刷
规 格:787mm×1092mm 32 开本
印 张:9.125
字 数:169 千字
书 号:ISBN 7-5328-3116-7/G·2814
定 价:8.50 元

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作者的话

平面三角是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似形和圆，研究方法以代数方法为主，因此三角函数的研究，已经初步把代数和几何联系起来了．高等数学、物理学、天文学、测量学以及其它各种应用技术学科，都常常要用到三角函数的有关知识．平面三角既是进一步学习高等数学的基础，又是解决生产实际问题的工具．

本书从现行高中数学教材出发，体现了综合性和灵活性的结合，为提高读者处理三角问题的能力，重新组合了平面三角知识结构，对教材内容进行了必要的调整和拓展．

本书在编写过程中，完全落实了教育部基教[1998]5号文件对高中数学教学内容的调整意见．取材丰富新颖，覆盖面广，许多解题方法引人入胜，使人耳目一新；注意抓重点和难点，通过典型例题，进行重点剖析；注重解题思路的分析、指导，解题后

的反思,解题规律的总结;注重数学思维的培养和数学解题能力的训练．在书写步骤上,力求严谨、规范,起到示范作用.因此,本书十分适合高中数学教学的实际,可与教材配合使用,是一本实用的教学参考书.

由于作者水平所限,书中错误、不当之处在所难免,敬请读者批评、指正.

2001 年 3 月

作者简介 索云旺,1965 年出生,大学本科学历、中学高级教师,山东省特级教师,现任北镇中学教育科学研究室主任、滨州市数学会理事、滨州市政协委员.近年来,共在省级以上刊物发表学术论文 20 余篇,出版专著 2 部,参与编写教材、教学辅导用书 8 部,其中,《浅谈数学技能的训练》等 2 篇论文获全国优秀论文一等奖,并于 1995 年被山东省教委授予"山东省高中数学十佳教学能手"荣誉称号．近年指导的学生中,有 2 人获全国数学联赛一等奖,8 人获二等奖.

目 录

引子

平面三角既是中学数学知识的一个重要组成部分，也是学习其它部分数学知识的重要工具，在代数、几何的各章节中都有所渗透，所以，学好平面三角知识，不仅关系到三角本身的学习质量，而且能够影响到对其它各章知识的掌握．学习平面三角时，应当特别注意以下几点：

1．把对三角函数和反三角函数的学习作为代数中函数学习的继续，达到对函数的认识的进一步深化．

2．既要重视对概念的理解，又要重视操作训练．平面三角知识，既有知识的理论性和概念的抽象性较强的特点，又有对技能的熟练性和准确性要求较高的特点，这就决定了我们在学习中，必须坚持既重视对概念的理解，又重视基本技能的训练．学习中，易出现的问题是，对三角知识尚能了解，但对公式记忆不准，混淆各函数值的

符号、对特殊角的函数值"张冠李戴",作起题来.不是寸步难行,就是漏洞百出,造成学习结束后,运用三角知识的实际能力低下,使三角这个十分有用的工具,变成一个极不可靠的工具,从而直接影响到解决其它数学问题的能力.为此,特提出以下要落实的技能:

(1)单位圆的使用.单位圆和单位圆中的各三角函数线是研究三角函数的重要工具,它在表现各三角函数的变化规律、各三角函数间的关系、各三角函数的性质,以及三角方程和三角不等式(组)解等方面,都有着直观、鲜明的特点,是在三角知识方面实现数形结合的一个重要途径.

(2)准确记忆(除积化和差与和差化积公式之外的全部)三角公式和主要的公式变形.

(3)准确记忆 $0^\circ \sim 360^\circ$ 角中与 30°、45°、60° 有关的特殊角的各三角函数值.

(4)准确画出各基本三角函数和反三角函数的图象,熟悉每一条曲线的走向趋势和各关键点的坐标.

(5)迅速准确地写出最简单的三角方程的解集.

3.要加强对公式的特点与公式功能的分析,加强三角恒等变形的目的性和选择公式的针对性.

在对三角的学习过程中,常常缺乏对公式特点的分析和对公式功能的探讨,因而即使准确地记忆了公式,在使用公式时也常缺乏选择的自觉性和针对性,常常是依靠形式的接近而随意"试用",盲目性很大,有时白费时间毫无进展,有时则舍近求远,解法笨拙.所以,在学习时,应分析公式的特点,进行系统归类;总结公式的功能,进行从分析问题出发合理选择

公式的训练.

4. 注意数学思想方法在三角问题中的渗透.

5. 注意三角函数作为解决数学问题的工具，在解决实际问题中的应用.

一 三角函数的基本概念及基本公式

本讲内容是平面三角的基础，包括三角函数的定义、符号、单位圆中的三角函数线、同角三角函数的关系式和诱导公式.

三角函数的基础主要是几何中的相似形和圆；三角函数的主要研究方法是代数中的函数方法.因此，三角函数的研究，把代数和几何联系在了一起.三角函数的图象和性质，从形和数两个不同侧面展示了三角函数的变化规律.三角函数在高等数学、物理学、天文学、测量学以及其它各种应用技术学科中有着广泛的应用，因此，它既是解决生产实际问题的工具，又是学习高等数学的基础.

对于本讲内容，高考中主要考查弧度与角度的换算、三角函数的定义、三角函数的符号、同角三角函数关系式与诱导公式.试题以选择题、填空题形式居多，试题难度不大，常表现为上述内容与其它知识的综

合．学习或复习时应把握好以下几点：

1. 理解弧度制表示角的优点在于把角的集合与实数集一一对应起来，从而就可把三角函数看成以实数为自变量的函数.

2. 要区分正角、负角、零角、锐角、钝角、区间角、象限角、终边相同的角的概念.

3. 在已知一个角的三角函数值，求这个角的其它三角函数值时，要注意题设中角的范围，并就不同的象限分别求出相应的值. 在应用诱导公式进行三角式的化简、求值时，应注意公式中符号的选取.

4. 单位圆中的三角函数线，是三角函数的一种几何表示. 用函数线的数值来代替三角函数值，比由三角函数定义所规定的比值得出三角函数值优越得多. 因此，三角函数线是研究三角问题的重要工具. 应注意提高应用单位圆分析问题、解决问题的能力.

5. 本讲公式既是化简求值的基本工具，又是变形中一些相关角的各种函数互化的依据. 应用中常涉及到平方根、算术根和绝对值等有关概念．要建立分类讨论的思想，要善于总结常用的技巧和方法，摸索其内在的规律性，增强应用公式的自觉性.

(一)角的概念的推广

在平面几何中，角是由一点引出的两条射线所组成的图形，其取值范围是 $0^\circ \sim 360^\circ$. 这一定义通常称为角的静止定义，显然有其局限性.

为研究问题的需要，角的概念必须推广．一个角可以看成是一条射线由原来的位置（始边）按指定方向绕其端点旋转到另一位置（终边）所形成的．这样，把角看成旋转的量，其大小是任意的，这种定义称为角的运动定义．从角的运动定义可以看出角有两种相反的旋转方向：逆时针方向和顺时针方向．通常规定按逆时针方向作为旋转的正方向．这样一来，就有了任意角的概念，包括任意大小的正角、负角和零角．

平面三角学主要在直角坐标系内讨论角，这时要使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 x 轴正半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角．如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限．另外，我们把具有相同终边的角叫做终边相同的角．

一般地，和角 α 终边相同的角连同角 α 在内（而且只有这样的角），可以用式子 $k\cdot360^\circ+\alpha(k\in Z)$ 来表示．其中，k 为整数，α 是任意角．

终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同．终边相同的角有无数多个，它们之间相差 360° 的整数倍．与 α 角终边相同的角的集合可记作

$$\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in Z\}.$$

例 1　在 $0^\circ\sim360^\circ$ 间，找出分别与 640°，$-950^\circ12'$ 终边相同的角．

解：$\because 640^\circ=360^\circ+280^\circ$，

$$-950^\circ12'=-3\cdot360^\circ+129^\circ48'.$$

$\therefore$ 与 640° 终边相同的角为 280°，与 $-950^\circ12'$ 终边相同的角为 $129^\circ48'$．

[导评]这里，当角是负角时，360°的系数 k 是负整数，$|k|$比该负角除以 360°所得的商大 1 个单位，才能使余数在 0°～360°之内.

当角的概念推广后，要注意区别"锐角"、"0°～90°的角"、"小于 90°的角"、"象限角"、"区间角"、"轴线角"（也称"象限界角"）等概念.

①锐角：$\{\alpha \mid 0° < \alpha < 90°\}$.

②0°到 90°的角：$\{\alpha \mid 0° \leqslant \alpha < 90°\}$.

③小于 90°的角：$\{\alpha \mid \alpha < 90°\}$.

④第一象限角：$\{\alpha \mid k \cdot 360° < \alpha < k \cdot 360° + 90°, k \in Z\}$；

第二象限角：

$$\{\alpha \mid k \cdot 360° + 90° < \alpha < k \cdot 360° + 180°, k \in Z\};$$

第三象限角：

$$\{\alpha \mid k \cdot 360° + 180° < \alpha < k \cdot 360° + 270°, k \in Z\};$$

第四象限角：

$$\{\alpha \mid k \cdot 360° + 270° < \alpha < k \cdot 360° + 360°, k \in Z\}.$$

⑤轴线角（或象限界角）：

$k \cdot 360°(k \in Z)$，$k \cdot 360° + 90°(k \in Z)$，$k \cdot 360° + 180°(k \in Z)$，$k \cdot 360° + 270°(k \in Z)$.

例 2 若 θ 为第三象限角，求角 $\frac{\theta}{2}$、$\frac{\theta}{3}$ 所在象限，它们在该象限什么区域内？

解题指导：由已知角的终边位置确定相关角的终边位置，常用不等式法.

解：由已知，得

$$k\cdot 360^\circ + 180^\circ < \theta < k\cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in Z).$$

$\therefore k\cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < k\cdot 180^\circ + 135^\circ (k \in Z)$.

当 k 为偶数(如 $k=0$)时，$\frac{\theta}{2}$ 在第二象限；

当 k 为奇数(如 $k=1$)时，$\frac{\theta}{2}$ 在第四象限.

如图 1－1，$\frac{\theta}{2}$ 在图中所示第二、第四象限的阴影区域内(不含边界).

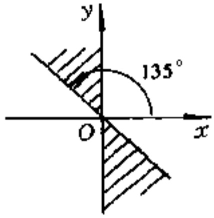


图 1－1

又∵角 θ 在第三象限，

$\therefore k\cdot 120^\circ + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < k\cdot 120^\circ + 90^\circ (k \in Z)$.

当 $k=3n(n\in Z)$(如 $k=0$)时，$\frac{\theta}{3}$ 在第一象限；

当 $k=3n+1(n\in Z)$(如 $k=1$)时，$\frac{\theta}{3}$ 在第三象限；

当 $k=3n+2(n\in Z)$(如 $k=2$)时，$\frac{\theta}{3}$ 在第四象限.

类似地，如图 1－2，$\frac{\theta}{3}$ 在图中所示第一、第三、第四象限的阴影区域内(不含边界).

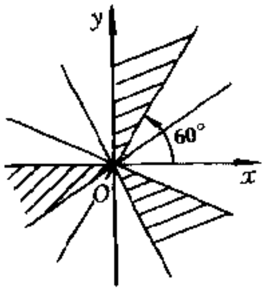


图 1－2

[导评]本解法是解决这类问题的通法.同学们应仔细体会为什么对整数 k 分类讨论，为什么分两种或三种情况讨

论？以下再给出解答这类问题的一种简便易行的方法. 以本题中$\frac{\theta}{2}$为例：

我们知道，终边落在 x 轴上的角的集合是

$$S=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^{\circ}, k\in Z\};$$

终边落在 y 轴上的角的集合是

$$T=\{\beta \mid \beta=k\cdot 180^{\circ}+90^{\circ}, k\in Z\};$$

终边落在坐标轴上的角的集合是

$$P=S\cup T=\{\gamma \mid \gamma=n\cdot 90^{\circ}, n\in Z\}.$$

这样，$\because k\cdot 180^{\circ}+90^{\circ}<\frac{\theta}{2}<k\cdot 180^{\circ}+135^{\circ}, k\in Z$,

$\therefore$当 $k\cdot 180^{\circ}$的终边在 x 轴的正半轴上时，$\frac{\theta}{2}$在第二象限；

当 $k\cdot 180^{\circ}$的终边在 x 轴的负半轴上时，$\frac{\theta}{2}$在第四象限.

又如，角 $k\cdot 90^{\circ}+45^{\circ}(k\in Z)$与角 $k\cdot 180^{\circ}\pm 45^{\circ}(k\in Z)$的终边是否相同？回答是肯定的. 因为 $k\cdot 90^{\circ}+45^{\circ}(k\in Z)$的终边在四个象限内，$k\cdot 180^{\circ}\pm 45^{\circ}(k\in Z)$的终边也在四个象限内，通过画图可知二者终边显然相同.

（二）弧度制

在平面几何里，弧被定义为圆的一部分，其长不超过圆周长，也没有规定方向. 在角的概念推广以后，弧的概念自然也得到相应的推广. 我们可把弧定义为一动点由某一点起沿圆周运动的结果. 当动点按逆时针方向旋转时，把弧的值规定为正的；反之，则把弧的值规定为负的. 这样，弧的概念就扩充为